Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

М. И. Гусейн-Заде

(Москва)

Двумерные динамические уравнения колебаний тонких пластин получены из трехмерных динамических уравнений теории упругости на основе асимптотического метода [1–3]. Такой подход позволяет установить пределы применимости двумерных динамических уравнений и соответствующих граничных и начальных условий и указать пути получения уточненных разультатов.

В данной работе рассматривается вопрос о построении внутреннего напряженного состояния тонкой пластинки в условиях динамики. Учитывается возможность рассматривать напряженные состояния с различной изменяемостью во времени и по координатам и с различным соотношением интенсивностей смещений.

В трехмерных динамических уравнениях теории упругости в перемещениях, учитывающих наличие массовых сил, перейдем к безразмерным величинам и выполним замену переменных

$$v_x = \frac{u_x}{h}\ (xy),\ v_z = \frac{u_z}{h},\ \xi = \varepsilon^{-r}\frac{x}{l}\ (xy),\quad \zeta = \frac{z}{h},\quad \tau = \frac{t}{t_0} \tag{1}$$

где

$$t_0 = \varepsilon^{\omega}\frac{l^2}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \varepsilon^{\omega-1} l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \tag{2}$$

Здесь $2h$ — толщина, l — характерный размер пластинки, $\varepsilon = h/l$ — относительная толщина, t_0 — характерное время, которое удобно представить в виде (2).

Величина ω характеризует изменяемость напряженного состояния во времени: чем больше ω, тем меньше t_0 и, следовательно, тем более резко изменяется процесс во времени. Величина $r = p/q$ (p, q — целые числа) характеризует изменяемость по координатам, причем при $r = 0$ ($q = 1$, $p = 0$) изменяемость такова, что характерный размер рисунка деформации совпадает с характерным геометрическим размером l пластинки.

Будем считать, что массовые силы X, Y, Z, действующие на пластинку, постоянны по ее толщине. (Если бы возникла необходимость рассмотреть зависимость X, Y, Z от z, то это не представило бы затруднений.)

Решение уравнений, получаемых из уравнений Ламе после перехода (I) к новым переменным, разыскиваем в виде асимптотических рядов по малому параметру $\lambda = \varepsilon^{1/q}$

$$v_x = \varepsilon^{\varkappa+1-r}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s v_x^{(s)}\quad (xy),\quad v_z = \varepsilon^{\varkappa}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s v_z^{(s)} \tag{3}$$

где $\varkappa$ — некоторое число, которое будет определено позднее.

Уравнения для $v_x^{(s)}\ (xy)$, $v_z^{(s)}$ можно проинтегрировать по ζ, что дает

$$v_x^{(s)} = \sum_{k=0}^{K+1} \zeta^k v_{xk}^{(s)} \quad (xy), \qquad v_z^{(s)} = \sum_{k=0}^{K} \zeta^k v_{zk}^{(s)} \tag{4}$$

$$K = \begin{cases} [s/q], & \text{если } [s/q] \text{ четное число} \\ [s/q] - 1, & \text{если } [s/q] \text{ нечетное число} \end{cases}$$

Здесь квадратные скобки означают, что берется целая часть s/q.

Для $v_{xk}^{(s)}\ (xy)$, $v_{zk}^{(s)}$ получаем рекуррентные соотношения, позволяющие определять их через величины, известные из предыдущих приближений ($\delta_k{}^i$ — символ Кронекера)

$$\begin{gathered}(k+2)(k+1)\, v^{(s)}_{x,\,k+2} + \frac{k+1}{1-2\nu} v^{(s)}_{z,\,k+1} + \\ + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v_{xk}^{(s-2q+2p)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_{yk}^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta}\right) + \Delta v_{xk}^{(s-2q+2p)} - \\ - 2(1+\nu)\frac{\partial^2 v_{xk}^{(s-4q+2\omega q)}}{\partial\tau^2} + \delta_k{}^{\circ}\delta_s^{-\varkappa q-q+p}(1+\nu)\frac{\rho}{E} X^* = 0 \ (\xi\eta)\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}(k+2)(k+1)\, v^{(s)}_{z,\,k+2} + \frac{k+1}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial v_{x,\,k+1}^{(s-2q+2p)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_{y,k+1}^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta}\right) + \\ + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\Delta v_{zk}^{(s-2q+2p)} - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\partial^2 v_{zk}^{(s-4q+2\omega q)}}{\partial\tau^2} + \\ + \delta_k{}^{\circ}\delta_s^{-\varkappa q}\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\rho}{E} Z^* = 0 \\ X^* = 2hX, \quad Y^* = 2hY, \quad Z^* = 2hZ\end{gathered}$$

Для напряжений получим асимптотические разложения

$$\frac{1}{E}\sigma_{xx} = \varepsilon^{\varkappa}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s\sigma_{xx}^{(s)} \quad (xy), \qquad \frac{1}{E}\sigma_{xy} = \varepsilon^{\varkappa+2-2r}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s\sigma_{xy}^{(s)} \tag{6}$$

$$\frac{1}{E}\sigma_{xz} = \varepsilon^{\varkappa+1-r}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s\sigma_{xz}^{(s)} \quad (xy), \qquad \frac{1}{E}\sigma_{zz} = \varepsilon^{\varkappa}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s\sigma_{zz}^{(s)} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}^{(s)} = \sum_{k=0}^{K+1}\zeta^k\sigma_{xxk}^{(s)} \ (xy), \qquad \sigma_{xy}^{(s)} = \sum_{k=0}^{K+1}\zeta^k\sigma_{xyk}^{(s)} \\ \sigma_{xz}^{(s)} = \sum_{k=0}^{K}\zeta^k\sigma_{xzk}^{(s)} \ (xy), \qquad \sigma_{zz}^{(s)} = \sum_{k=0}^{K+1}\zeta^k\sigma_{zzk}^{(s)}\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{xxk}^{(s)} = \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}(k+1)\, v^{(s)}_{z,\,k+1} + \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{\partial v_{xk}^{(s-2q+2p)}}{\partial\xi} + \\ + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{\partial v_{yk}^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta} \ (xy), \ \sigma_{xyk}^{(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_{xk}^{(s)}}{\partial\eta} + \frac{\partial v_{yk}^{(s)}}{\partial\xi}\right) \\ \sigma_{xzk}^{(s)} = \frac{1}{2(1+\nu)}\left((k+1)\, v^{(s)}_{x,k+1} + \frac{\partial v_{zk}^{(s)}}{\partial\xi}\right) \quad (xy) \\ \sigma_{zzk}^{(s)} = \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}(k+1)\, v^{(s)}_{z,k+1} + \\ + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_{xk}^{(s-2q+2p)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v_{yk}^{(s-2q+2p)}}{\partial\eta}\right)\end{gathered} \tag{9}$$

На лицевых плоскостях пластинки при $\zeta = \pm 1$ имеют место граничные условия

$$\sigma_{xz}(\xi, \eta; \pm 1) = \tau_x^{\pm} \quad (xy), \qquad \sigma_{zz}(\xi, \eta; \pm 1) = \tau_z^{\pm} \tag{10}$$

Удовлетворяя этим условиям, придем к системе уравнений, описывающей внутреннее напряженное состояние пластинки. Будем интересоваться такими воздействиями на пластинку, при которых ее движение имеет существенно динамический характер. Поэтому при получении уравнений необходимо предусмотреть, чтобы инерционные члены входили в систему уравнений нулевого приближения.

Выясняя возможность выполнения произвольных условий (10) и принимая во внимание сказанное выше, придем к выводу, что, во-первых, необходимо, чтобы в разложениях (7) для σ_{xz} (xy) обращались в нуль первые $2q - 2p$ члена, а в разложениях для $\sigma_{zz}^{(s)}$ — первые $4q - 4p$ члена. Это дает

$$v_{x1}^{(s)} + \frac{\partial v_{z0}^{(s)}}{\partial \xi} = 0 \quad (xy), \quad s < 2q - 2p \tag{11}$$

$$v_{z1}^{(s)} + \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_{x0}^{(s-2q+2p)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{y0}^{(s-2q+2y)}}{\partial \eta}\right) = 0, \quad s < 4q - 4p$$

Во-вторых, необходимо, чтобы

$$\omega = 2p/q \text{ или } \omega = 2r \tag{12}$$

Соотношения (11) эквивалентны выполнению гипотезы Кирхгофа — Лява, а соотношение (12) устанавливает связь между параметрами, характеризующими изменяемость процесса во времени и по координатам.

Значение $\varkappa$ в (3) определим из условия, что нормальная поверхностная нагрузка не зависит от относительной толщины. Это дает

$$\varkappa = -4 + 4r \tag{13}$$

Удовлетворяя граничным условиям (10) на лицевых плоскостях пластинки, получим динамические уравнения пластинки в различных приближениях. Для любого s они имеют вид

$$\frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v_{x0}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{y0}^{(s)}}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v_{y0}^{(s)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{x0}^{(s)}}{\partial \eta}\right) = p_x^{(s)} \quad (xy) \tag{14}$$

$$\frac{1}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta v_{z0}^{(s)} + \frac{\partial^2 v_{z0}^{(s)}}{\partial \tau^2} = p_z^{(s)} \tag{15}$$

Введем обозначения

$$\tau_x^+ - \tau_x^- = Q_x \quad (xy), \quad \tau_z^+ - \tau_z^- = Q_z \tag{16}$$

$$\tau_x^+ + \tau_x^- = M_y \quad (xy), \quad \tau_z^+ + \tau_z^- = m$$

Правые части уравнений (14) для $s < 4q - 4p$ имеют вид

$$p_x^{(s)} = -\delta_s{}^0 \frac{\varepsilon^{1-r}}{2E}(Q_x + \rho X^*) - \delta_s^{2q-2p}\frac{1}{2E}\left\{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial m}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon^{1-r}}{6} \times \right. \tag{17}$$

$$\times\left[\frac{2+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial \eta} - \frac{\partial Q_y}{\partial \xi}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1-8\nu}{2(1-\nu)}\rho\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial X^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Y^*}{\partial \eta}\right) + 3\rho\Delta X^*\right]\right\} + \frac{\partial^2 v_{x0}^{(s-2q+2p)}}{\partial \tau^2} \quad (xy)$$

Правая часть уравнения (15) для $s < 6q - 6p$ имеет вид

(18)
$$p_z^{(s)} = \delta_s{}^0 \frac{1}{2E}\left[Q_z + \varepsilon^{1-r}\left(\frac{\partial M_y}{\partial \xi} + \frac{\partial M_x}{\partial \eta}\right) + \rho Z^*\right] -$$
$$- \delta_s^{2q-2p} \frac{1}{20E(1-\nu)} \Delta\left[(8-3\nu) Q_z + \varepsilon^{1-r} \frac{4+\nu}{3}\left(\frac{\partial M_y}{\partial \xi} + \frac{\partial M_x}{\partial \eta}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{24+\nu}{3} \rho Z^*\right] + \frac{17-7\nu}{15(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Delta v_{z0}^{(s-2q+2p)} - \delta_s^{4q-4p} \frac{1}{2E(1-\nu)} \times$$
$$\times \left\{\frac{1}{4200} \Delta\Delta \left[(227-157\nu) Q_z + \varepsilon^{1-r}(87-17\nu)\left(\frac{\partial M_y}{\partial \xi} + \frac{\partial M_x}{\partial \eta}\right) +\right.\right.$$
$$\left. + (87-17\nu)\rho Z^*\right] - \frac{1+\nu}{1050} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left[3(223-141\nu-22\nu^2) Q_z +\right.$$
$$+ \varepsilon^{1-r} 2(72+101\nu-33\nu^2)\left(\frac{\partial M_y}{\partial \xi} + \frac{\partial M_x}{\partial \eta}\right) +$$
$$\left.\left. + 2(422-424\nu-33\nu^2)\rho Z^*\right]\right\} - \frac{(1+\nu)(422-424\nu-33\nu^2)}{525(1-\nu)} \frac{\partial^4 v_{z0}^{(s-4q+4p)}}{\partial \tau^4}$$

Таким образом, для построения динамического внутреннего напряженного состояния пластинки имеем итерационный процесс, на каждом этапе которого нужно решать одни и те же уравнения: для задачи о деформации пластинки в ее плоскости — статические уравнения обобщенного плоского напряженного состояния (инерционные члены известны из предыдущих приближений), а для задачи изгиба — динамическое уравнение классической теории пластинки. Правые части этих уравнений для $s = 0$ выражаются через поверхностную нагрузку и массовые силы, для $0 < s < 2q - 2p$ равны нулю, а для $s \geqslant 2q - 2p$ выражаются через поверхностную нагрузку, массовые силы и через решения для предыдущих приближений.

От уравнений (14), (15), полученных для различных приближений, можно перейти к уравнениям, не содержащих индекса приближения, но определенных с заданной асимптотической точностью.

Динамические уравнения тонкой пластинки с точностью $O(\varepsilon^{2-\omega})$, записанные через первоначальные размерные величины (1), имеют вид

(19)
$$\frac{1}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_{y0}}{\partial x} - \frac{\partial u_{x0}}{\partial y}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2Eh} Q_x \qquad (xy)$$

(20)
$$\Delta\Delta u_{z0} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial t^2} = \frac{1}{D}\left[Q_z + h\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) + \rho Z^*\right]$$
$$D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$$

Здесь u_{x0}, u_{y0}, u_{z0} — смещения точек срединной плоскости.

Таким образом, для динамических процессов с различной изменяемостью во времени (т. е. для различных ω) получаем одни и те же уравнения внутреннего напряженного состояния: статические уравнения обобщенного плоского напряженного состояния и динамическое уравнение поперечных колебаний, которое не является гиперболическим. Однако точность этих уравнений существенно зависит от ω: с увеличением ω она падает и сходит на нет при $\omega = 2$.

При $\omega = 2$, как это следует из (1), (3) и (12), характерный размер рисунка деформации пластинки становится равным h, а интенсивности всех смещений одинаковыми. Это говорит о существенно трехмерном характере процесса при $\omega = 2$.

Из (14), (15) можно получить и более точные динамические уравнения пластинки. Уравнения с точностью $O(\varepsilon^{4-2\omega})$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
(21)\qquad & \frac{1}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial u_{y0}}{\partial y}\right)+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_{y0}}{\partial x}-\frac{\partial u_{x0}}{\partial y}\right)-\\
& -\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_{x0}}{\partial t^2}=\frac{1}{2Eh}\left\{-Q_x-h\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial m}{\partial x}-\rho X^*-\right.\\
& -\frac{h^2}{6}\left[\frac{2+\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}-\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right)-\right.\\
& \left.\left.-\frac{1-8\nu}{2(1-\nu)}\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X^*}{\partial x}+\frac{\partial Y^*}{\partial y}\right)+3\rho\Delta X^*\right]\right\}\qquad (xy)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad & \Delta\Delta u_{z0}-\frac{2\rho h^3}{D}\frac{17-7\nu}{15(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u_{z0}+\frac{2\rho h}{D}\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial t^2}=\\
& =\frac{1}{D}\left\{Q_z+\rho Z^*+h\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)-h^2\frac{1}{20E(1-\nu)}\times\right.\\
& \left.\times\Delta\left[(8-3\nu)Q_z+\frac{4+\nu}{3}h\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)+\frac{24+\nu}{3}\rho Z^*\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Из (21) видно, что с точностью $O(\varepsilon^{4-2\omega})$ уравнения обобщенного плоского напряженного состояния имеют уже волновой характер. В уравнении (22), описывающем поперечное движение пластинки, удержаны все члены, необходимые для обеспечения точности $O(\varepsilon^{4-2\omega})$. Это уравнение не является вполне гиперболическим. На поперечное движение пластинки, мгновенно захватывающее всю пластинку, накладывается некоторый волновой процесс, связанный с наличием в рассматриваемом уравнении члена с $\partial^2\Delta u_{z0}/\partial t^2$.

Между тем уравнение типа Тимошенко для пластинки, полученное Я. С. Уфляндом [4] с учетом сдвига, вызванного перерезывающими напряжениями, и инерции вращения, является вполне гиперболическим. Это связано с тем, что в указанном уравнении учтен член с $\partial^4 u_{z0}/\partial t^4$, который, как показывает асимптотический анализ, следует учитывать лишь в уравнении, имеющем более высокую асимптотическую точность.

Уравнение поперечного движения пластинки, полученное асимптотическим методом и имеющее точность $O(\varepsilon^{6-3\omega})$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \Delta\Delta u_{z0}-\frac{2\rho h^3}{D}\frac{17-7\nu}{15(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u_{z0}+\frac{2\rho^2 h^3}{ED}\frac{(1+\nu)(422-424\nu-33\nu^2)}{525(1-\nu)}\times\\
& \times\frac{\partial^4 u_{z0}}{\partial t^4}+\frac{2\rho h}{D}\frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial t^2}=\frac{1}{D}\left\{Q_z+h\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)+\rho Z^*-\right.\\
& -h^2\frac{1}{20E(1-\nu)}\Delta\left[(8-3\nu)Q_z+h\frac{4+\nu}{3}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)+\right.\\
& \left.+\frac{24+\nu}{3}\rho Z^*\right]-h^4\frac{1}{2E(1-\nu)}\times
\end{aligned}
$$

$$\times \left\{\frac{1}{4200}\Delta\Delta\left[(227-157\nu)Q_z+h(87-17\nu)\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+(87-17\nu)\rho Z^*\right]-\frac{1+\nu}{1050}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[3(223-141\nu-22\nu^2)\,Q_z+\right.$$
$$+h2(72+101\nu-33\nu^2)\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}+\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)+$$
$$\left.\left.+2(422-424\nu-33\nu^2)\rho Z^*\right]\right\}$$

В этом уравнении наряду с деформацией сдвига и инерцией вращения учтены и более тонкие факторы, физический смысл которых, возможно, и затруднительно раскрыть. Это уравнение, как и уравнение С. Я. Уфлянда [4], относится к вполне гиперболическому типу, но отличается от него коэффициентами и правыми частями.

Проследим, какой же тип имеют уравнения поперечных движений пластинки, отвечающие еще более высокой точности. Выпишем лишь старшие члены, определяющие тип уравнения. Имеем

$$d_1\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Delta u_{z0}+\ldots=\ldots\qquad (O(\varepsilon^{8-4\omega})) \tag{24}$$
$$d_1\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Delta u_{z0}+d_2\frac{\partial^6 u_{z0}}{\partial t^6}+\ldots=\ldots\qquad (O(\varepsilon^{10-5\omega}))$$

Таким образом, уравнения поперечных движений пластинки, определенные с более высокой точностью, чем $O(\varepsilon^{6-3\omega})$, не принадлежат к вполне гиперболическому типу. По мере увеличения точности уравнений в них появляются члены со все более высокими порядками производных по времени; однако коэффициенты при этих производных уменьшаются по мере роста порядка этих производных.

Из изложенного выше следует, что для получения уточненных результатов о динамическом поведении тонкой пластинки целесообразно использовать итерационный процесс, построение которого на каждом этапе сводится к решению одних и тех же привычных уравнений (14), (15), т. е. к решению статических уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и динамического уравнения изгиба классической теории.

Построение уточненных уравнений, отвечающих разной асимптотической точности, проведено для сравнения с уточненными уравнениями, полученными на основе гипотез, и для оценки их точности.

В зависимости от значения параметра ω, характеризующего изменяемость напряженного состояния во времени, можно предложить следующую классификацию динамических процессов, происходящих в тонкой пластинке.

1) Квазистатические процессы ($\omega < 0$). Двумерные уравнения для ряда первых приближений не содержат инерционных членов (время t считается параметром). В уравнениях же тех приближений, в которых появляются инерционные члены, они входят в правые части и известны из предыдущих приближений.

2) Динамические процессы ($0 \leqslant \omega < 2$). Задача о деформации пластинки в ее плоскости имеет квазистатический характер, а задача изгиба сводится к динамическому уравнению классической теории.

3) Существенно трехмерные процессы ($\omega \geqslant 2$), которые не могут быть описаны никакими двумерными теориями.

Остановимся на рассмотрении еще одного вопроса. Заметим, что скорость распространения продольных волн равна $\sqrt{E/\rho}$ для среды, у которой коэффициент Пуассона $\nu = 0$, и $1.16\sqrt{E/\rho}$ для среды, у которой $\nu = 0.3$. Поэтому величина $\sqrt{E/\rho}$ близка к скорости распространения возмущений в реальных материалах. Величина $L(t_0) = t_0\sqrt{E/\rho}$ соизмерима с расстоянием, на которое распространяется возмущение в материале пластинки за характерное время t_0. Для динамических процессов, для которых $0 \leqslant \omega < 2$, имеем

$$l\varepsilon^{-1} \leqslant L(t_0) < h$$

Следовательно, для динамических процессов, для которых характерный размер рисунка деформации соизмерим с характерным геометрическим размером l (т. е. при $\omega = 0$), возмущение за время t_0 проходит расстояние в ε^{-1} раз большее характерного размера пластинки. С увеличением ω расстояние $L(t_0)$ уменьшается. При $\omega = 1$, когда характерный размер рисунка деформации соизмерим с $\sqrt{lh}$, величина $L(t_0)$ соизмерима с l. А при $\omega = 2$ и характерный размер рисунка деформации и величина $L(t_0)$ становятся соизмеримыми с h. Это также говорит о том, что динамические процессы, отвечающие значениям $\omega \geqslant 2$, имеют существенно трехмерный характер.

Поступила 24 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
3. *Гусейн-Заде М. И.* О некоторых свойствах напряженного состояния тонкого упругого слоя. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
4. *Уфлянд Я. С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ, 1948, т. 12, вып. 3.