Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

О СООТНОШЕНИЯХ УПРУГОСТИ РЕЙССНЕРА — НАХДИ

Н. Н. Рогачева

(Москва)

Методом работы [1] строятся уравнения теории оболочек с точностью до величин порядка h_*^{2+k}, где $k = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ и $k = 2-4t$ при $1/2 \leqslant t < 1$ (h_* — относительная полутолщина оболочки, t — показатель изменяемости напряженного состояния). Полученные уравнения, не укладывающиеся в рамки теории типа Лява, сопоставляются с уравнениями Рейсснера — Нахди [2,3], в которых учтен поперечный сдвиг, и показывается, что последние с асимптотической точки зрения непоследовательны. Вместе с тем показано, что если оболочка слабо сопротивляется сдвигу, то для нее теория Рейсснера — Нахди с асимптотической точки зрения вполне обоснована.

В работе [1] трехмерные уравнения теории упругости сведены к двумерным при помощи асимптотического метода, т. е. на каждом этапе вычислений принимаются во внимание все члены одинакового порядка относительно малого параметра h_*. Было показано, что, не выходя за рамки обычных понятий теории оболочек типа Лява (в частности, не учитывая поперечного сдвига), можно построить уравнения теории оболочек с точностью до величин порядка h_*^{2-2t}, но нельзя превзойти этот предел без качественного усложнения теории.

1. Для построения теории оболочек с точностью до величин порядка h_*^{2+k} ($k = 0$ при $t \leqslant 1/2$ и $k = 2-4t$ при $1/2 < t < 1$) воспользуемся асимптотическим представлением величин трехмерной теории упругости, принятым в [1].

Применяемая в дальнейшем терминология и обозначения соответствуют принятым в [1, 4].

За исходные возьмем уравнения трехмерной теории упругости, отнесенные к триортогональной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Криволинейные координаты α_1 и α_2 совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, линии α_3 им ортогональны.

Преобразуем исходные уравнения.

Введем несимметричный тензор напряжений τ_{ik}, связанный с симметричным тензором σ_{ik}, следующим образом:

$$\tau_i = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_i, \qquad \tau_{ij} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right)\sigma_{ij}$$

$$\tau_{i3} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right)\sigma_{i3}, \qquad \tau_3 = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right)\sigma_{33} \tag{1.1}$$

Кроме того, сделаем следующую замену переменных:

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i, \ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \ h = R\lambda^{-l}, \ p/l = t \tag{1.2}$$

Это обычное для асимптотического метода растяжение масштаба по координатным линиям. Координаты ξ и ζ выбираются таким образом, что дифференцирование по ним не приводит к существенному увеличению искомых функций.

Примем следующее асимптотическое представление для напряжений и перемещений:

$$\tau_i = \lambda^l \tau_i^*, \quad \tau_{ij} = \lambda^l \tau_{ij}^*, \quad \tau_{i3} = \lambda^p \tau_{i3}^* \tag{1.3}$$
$$\tau_3 = \lambda^c \tau_3^* \quad v_i = \lambda^{l-p} v_i^*, \quad v_3 = \lambda^{l-c} v_3^*$$
$$c = \begin{cases} 0, & l \geqslant 2p \\ -l+2p, & l < 2p \end{cases}$$

В формулах (1.3) все величины со звездочкой одного порядка.

Запишем уравнения трехмерной теории упругости с учетом формул (1.1) — (1.3).

Уравнения равновесия

$$L_i^* + \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \zeta} (a_i^2 \tau_{i3}^*) + \lambda^{-l-p} R a_i a_j q_i = 0 \tag{1.4}$$
$$-\lambda^{-c} L^* + \lambda^{-l+2p-c} F^* + \frac{\partial \tau_3^*}{\partial \zeta} + \lambda^{-l-c} R a_1 a_2 q_3 = 0$$

Формулы напряжения — перемещения

$$\frac{E}{R} a_j e_i^* = a_i \tau_i^* - \nu a_j \tau_j^* - \nu \lambda^{-l+c} \tau_3^* \tag{1.5}$$
$$\frac{E}{R} a_1 a_2 \frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta} = \lambda^{-2l+2c} \tau_3^* - \nu \lambda^{-l+c} (a_1 \tau_1^* + a_2 \tau_2^*)$$
$$\frac{E}{R} (a_i m_i^* + a_j m_j^*) = 2(1+\nu) a_j \tau_{ij}^*$$
$$\frac{E}{R} \left(a_i a_j \frac{\partial v_i^*}{\partial \zeta} + \lambda^{-l+2p-c} a_j g_i^* \right) = 2(1+\nu) \lambda^{-2l+2p} \tau_{i3}^*$$

Условия на лицевых поверхностях оболочки

$$\left. \frac{\tau_{i3}^*}{a_j} \right|_{\zeta=\pm 1} = \pm q_i^{\pm}, \quad \left. \frac{\tau_3^*}{a_1 a_2} \right|_{\zeta=\pm 1} = \pm \lambda^{-c} q_3^{\pm} \tag{1.6}$$

Приняты следующие обозначения:

$$L_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \tau_i^*}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial \xi_j} + \lambda^{-p} \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (\tau_i^* - \tau_j^*) + \tag{1.7}$$
$$+ \lambda^{-p} \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (\tau_{ij}^* + \tau_{ji}^*), \qquad L^* = R \left(\frac{\tau_1^*}{R_1} + \frac{\tau_2^*}{R_2} \right)$$
$$F^* = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \tau_{13}^*}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \tau_{23}^*}{\partial \xi_2} + \lambda^{-p} \frac{R}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{13}^* + \lambda^{-p} \frac{R}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tau_{23}^*$$
$$e_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_i} + \lambda^{-p} \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j^* + \lambda^{-c} R \frac{v_3^*}{R_i} \tag{1.8}$$
$$m_i^* = \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} - \lambda^{-p} \frac{R}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} v_j^*$$
$$g_i^* = \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3^*}{\partial \xi_i} - \lambda^{-2p+c} R \frac{v_i^*}{R_i}, \qquad a_i = 1 + \lambda^{-l} \zeta \frac{R}{R_i}$$

Здесь и далее каждое равенство, содержащее индексы i, j, следует рассматривать как двойное: при $i = 1$ ($j = 2$) получается одно уравнение, при $i = 2$ ($j = 1$)—другое.

Из формул (1.4) — (1.6), поступая так же, как в [1], но удерживая больше членов, можно получить следующие разложения искомых величин по ζ:

(1.9)
$$
\begin{aligned}
v_3^* &= v_3^{(0)} + \lambda^{-l+c}\zeta v_3^{(1)} + \lambda^{-2l+2p}\zeta^2 v_3^{(2)}\\
v_i^* &= v_i^{(0)} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta v_i^{(1)} + \lambda^{-2l+2p}\zeta^2 v_i^{(2)} + \lambda^{-3l+4p-c}\zeta^3 v_i^{(3)}\\
\tau_i^* &= \tau_i^{(0)} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_i^{(1)} + \lambda^{-2l-2p}\zeta^2\tau_i^{(2)} + \lambda^{-3l+4p-c}\zeta^3\tau_i^{(3)}\\
\tau_{ij}^* &= \tau_{ij}^{(0)} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{ij}^{(1)} + \lambda^{-2l+2p}\zeta^2\tau_{ij}^{(2)} + \lambda^{-3l+4p-c}\zeta^3\tau_{ij}^{(3)}\\
\tau_{i3}^* &= \tau_{i3}^{(0)} + \zeta\tau_{i3}^{(1)} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{i3}^{(2)} + \lambda^{-2l+2p}\zeta^3\tau_{i3}^{(3)} + \lambda^{-3l+4p-c}\zeta^4\tau_{i3}^{(4)}\\
\tau_3^* &= \tau_3^{(0)} + \zeta\tau_3^{(1)} + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_3^{(2)} + \lambda^{-2l+4p-2c}\zeta^3\tau_3^{(3)} +\\
&+ \lambda^{-3l+4p-c}\zeta^4\tau_3^{(4)} + \lambda^{-4l+6p-2c}\zeta^5\tau_3^{(5)}
\end{aligned}
$$

В этих формулах $v_3^{(0)}$, $v_3^{(1)}$, . . ., $\tau_3^{(5)}$ — величины одного порядка. Для них имеют место следующие уравнения:

(1.10)
$$
\begin{aligned}
v_i^{(n)} &= -\frac{1}{n} g_i^{(n-1)} + \lambda^{-c}\frac{R}{nR_i} k_n{}^3 g_i^{(n-2)} + \frac{2(1+\nu)R}{nE} r_n{}^1\tau_{i3}^{(n-1)} \qquad (n = 1, 2, 3)\\
v_3^{(n)} &= -\frac{\nu R}{nE}\left(\tau_i^{(n-1)} + \tau_j^{(n-1)}\right) \qquad (n = 1, 2)\\
\tau_i^{(n)} &= \frac{E}{R(1-\nu^2)}\left[e_i^{(n)} + \nu e_j^{(n)} + s_n{}^1 k_n{}^3 d_n{}^2 R\left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_i}\right)e^{(n-1)}\right] +\\
&+ \frac{\nu}{1-\nu}\frac{r_n{}^0 s_n{}^1}{d_n{}^1}\tau_3^{(n)} \qquad (n = 0, \ldots, 3)\\
\tau_{ij}^{(n)} &= \frac{E}{2R(1+\nu)}\left[m_i^{(n)} + m_j^{(n)} + s_n{}^1 k_n{}^3 d_n{}^2 R\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_j}\right)m_i^{(n-1)}\right] \qquad (n = 0, \ldots, 3)\\
\tau_3^{(n)} &= \frac{d_n{}^1}{n}\left(s_n{}^3 d_n{}^2 d_n{}^4 \delta_n{}^5 L^{(n-1)} - \frac{r_n{}^1}{s_n{}^1}F^{(n-1)} - \lambda^{-l}\delta^1{}_n R q_3\right) \qquad (n = 1, \ldots, 5)\\
\tau_{i3}^{(n)} &= -\frac{1}{n}L^{(n-1)} - \frac{\lambda^{-c}}{12}\frac{R}{R_i}\delta_n{}^3 L_i^{(1)} - \delta_n{}^1\left(\lambda^{-l}\frac{2R}{R_i}\tau_{i3}^{(0)} + \lambda^{-l-p}Rq_i\right) \qquad (n = 1, \ldots, 4)
\end{aligned}
$$

(1.11)
$$
\begin{aligned}
&\tau_{i3}^{(0)} + \lambda^{-l+2p-c}\tau_{i3}^{(1)} + \lambda^{-3l+4p-c}\tau_{i3}^{(4)} = \frac{\lambda^{-p}}{2}\times\\
&\times\left[q_i^+ - q_i^- + \lambda^{-l}\frac{R}{R_j}(q_i^+ + q_i^-)\right]\\
&\tau_{i3}^{(1)} + \lambda^{-2l+2p}\tau_{i3}^{(3)} = \frac{\lambda^{-p}}{2}\left[q_i^+ + q_i^- + \lambda^{-l}\frac{R}{R_j}(q_i^+ - q_i^-)\right]\\
&\tau_3^{(0)} + \lambda^{-l+2p-c}\tau_3^{(2)} + \lambda^{-3l+4p-c}\tau_3^{(4)} = \frac{\lambda^{-c}}{2}\times\\
&\times\left[q_3^+ - q_3^- + \lambda^{-l}R\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right)(q_3^+ + q_3^-)\right]\\
&\tau_3^{(1)} + \lambda^{-2l+4p-2c}\tau_3^{(3)} + \lambda^{-4l+6p-2c}\tau_3^{(5)} = \frac{\lambda^{-c}}{2}\times\\
&\times\left[q_3^+ + q_3^- + \lambda^{-l}R\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}\right)(q_3^+ - q_3^-)\right]
\end{aligned}
$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$k_n{}^n = 0, \quad s_n{}^n = \lambda^{-2p+c}, \quad r_n{}^n = -\lambda^{-l+c}, \quad \delta_n{}^n = 1, \quad d_n{}^n = \lambda^{-c}$$
$$k_n{}^m = s_n{}^m = r_n{}^m = d_n{}^m = 1, \quad \delta_n{}^m = 0 \quad (n \neq m)$$

Кроме того, величины с отрицательными верхними индексами следует полагать равными нулю. Обозначения $e_i{}^{(0)}$, $e_i{}^{(2)}$, $g_i{}^{(0)}$, $m_i{}^{(k)}$, $L_i{}^{(k)}$, $L^{(k)}$, $F^{(m)}$ ($k = 0, \ldots, 3$; $m = 0, \ldots, 4$) расшифровываются формулами (1.7), (1.8), в которых надо заменить звездочки верхними индексами 0,2, k или m соответственно. Для остальных величин имеют место следующие формулы:

$$e_i^{(1)} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_i} + \lambda^{-p}\frac{R}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j^{(1)} + \lambda^{-2p+c} R \frac{v_3^{(1)}}{R_i}$$
$$g_i^{(1)} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi_i} - \lambda^{-c} R \frac{v_i^{(1)}}{R_i}$$
$$e_i^{(3)} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^{(3)}}{\partial \xi_i} + \lambda^{-p}\frac{R}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} v_j^{(3)}, \qquad g_i^{(2)} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial \xi_i}$$

Система уравнений (1.10), (1.11) содержит 43 неизвестных и столько же уравнений. Эту систему можно преобразовать, используя принятые в теории оболочек величины. В результате преобразований получим формулы, аналогичные предлагаемым Нахди.

Перемещения срединной поверхности, усилия и моменты определяются с помощью формул (1.1), (1.3), (1.9) следующим образом:

$$u = \lambda^{l-p} v_1^{(0)}, \quad v = \lambda^{l-p} v_2^{(0)}, \quad w = -\lambda^{l-c} v_3^{(0)} \tag{1.12}$$
$$T_i = \int_{-h}^{h} \tau_i d\alpha_3 = 2h\lambda^l \left(\tau_i^{(0)} + \frac{\lambda^{-2l+2p}}{3}\tau_3^{(2)}\right)$$
$$G_i = \int_{-h}^{h} \tau_i \alpha_3 d\alpha_3 = \frac{2h^2}{3}\lambda^{2p-c}\left(\tau_i^{(1)} + \lambda^{-2l+2p}\frac{3}{5}\tau_i^{(3)}\right)$$
$$S_{ij} = \int_{-h}^{h} \tau_{ij} d\alpha_3 = 2h\lambda^l \left(\tau_{ij}^{(0)} + \frac{\lambda^{-2l+2p}}{3}\tau_{ij}^{(2)}\right)$$
$$H_{ij} = \int_{-h}^{h} \tau_{ij}\alpha_3 d\alpha_3 = \frac{2h^2}{3}\lambda^{2p-c}\left(\tau_{ij}^{(1)} + \lambda^{-2l+2p}\frac{3}{5}\tau_{ij}^{(3)}\right)$$
$$N_i = \int_{-h}^{h} \tau_{i3} d\alpha_3 = 2h\lambda^p \left(\tau_{i3}^{(0)} + \frac{\lambda^{-l+2p-c}}{3}\tau_{i3}^{(2)} + \frac{\lambda^{-3l+4p-c}}{5}\tau_{i3}^{(4)}\right)$$

Преобразовывая систему (1.10), (1.11) совместно с формулами (1.12), получим уравнения равновесия теории оболочек, совпадающие с общеизвестными, и уточненные соотношения упругости. Для краткости выпишем их в тензорном виде

$$T^{ik} = BE^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + (1+\nu) DF^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + DP^{ik}\mu_\gamma{}^\gamma + \tag{1.13}$$
$$+ D\frac{\nu}{2(1-\nu)} G^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varepsilon_\gamma{}^\gamma + \frac{h^2}{3(1-\nu)} K^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha(q_\beta{}^+ + q_\beta{}^-) + \frac{\nu}{1-\nu} h a^{ik}(q_3{}^+ - q_3{}^-)$$

$$M^{ik} = D\left(E^{ik\alpha\beta} - \frac{1+\nu}{2} c^{\alpha\beta}c^{ik}\right)\mu_{\alpha\beta} + DH^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} +$$
$$+ D\frac{\nu}{1-\nu}E^{ik\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\varepsilon_\gamma{}^\gamma + D\frac{\nu h^2}{10(1-\nu)}G^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\mu_\gamma{}^\gamma +$$
$$+ D\frac{4}{5}G^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha\gamma_{\beta 3} + \frac{h^3}{15}Q^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha(q_\beta{}^+ - q_\beta{}^-) + \frac{\nu h^2}{3(1-\nu)}a^{ik}(q_3{}^+ + q_3{}^-)$$
$$N^i = -\frac{2Eh}{3(1+\nu)}a^{i\alpha}\gamma_{\alpha 3} - \frac{h}{3}a^{i\alpha}(q_\alpha{}^+ - q_\alpha{}^-).$$

Здесь

(1.14) $\gamma_{\alpha 3} = -\nabla_\alpha w + u_\beta b_\alpha{}^\beta - c_\alpha{}^\beta u_{\beta 1}$

(1.15) $E^{ik\alpha\beta} = a^{i\alpha}a^{k\beta} + \nu c^{i\alpha}c^{k\beta}$

$$P^{ik} = \frac{\nu}{2(1-\nu)}[(1+2\nu)a^{i\alpha}a^{k\beta} + (2+\nu)c^{i\alpha}c^{k\beta}]\,b_{\alpha\beta}$$
$$F^{ik\alpha\beta} = 2Ha^{i\alpha}a^{k\beta} + 2a^{i\alpha}b^{k\beta} - \frac{1+3\nu}{2(1+\nu)}(a^{i\alpha}b^{k\beta} - b^{i\alpha}a^{k\beta})$$
$$V^{ik\alpha\beta} = a^{i\alpha}a^{k\beta} + c^{i\alpha}c^{k\beta} - c^{\alpha\beta}c^{ik}$$
$$G^{ik\alpha\beta} = E^{ik\alpha\beta} - \frac{1+\nu}{2}c^{\alpha\beta}c^{ik}$$
$$H^{ik\alpha\beta} = 2Ha^{i\alpha}a^{k\beta} + 2a^{i\alpha}b^{k\beta} - \frac{1+\nu}{2}(a^{i\alpha}b^{k\beta} - b^{i\alpha}a^{k\beta})$$
$$Q^{ik\alpha\beta} = \frac{2}{1-\nu}G^{ik\alpha\beta} + \frac{2\nu}{3(1-\nu)}V^{ik\alpha\beta}, \quad 2H = -b_\alpha{}^\alpha$$
$$K^{ik\alpha\beta} = \nu V^{ik\alpha\beta} + G^{ik\alpha\beta}, \quad B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

Физические составляющие тензоров T^{ik}, M^{ik}, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ связаны с усилиями, моментами и компонентами деформации следующим образом:

(1.16) $[\varepsilon_{ii}] = \varepsilon_i, \quad [\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}\omega, \quad [\mu_{ii}] = \varkappa_i, \quad [\mu_{ij}] = \tau - \frac{\omega}{2R_j}$

$$[T^{ii}] = T_i, \quad [T^{ij}] = S_{ij}, \quad [M^{ii}] = G_i, \quad [M^{ij}] = H_{ij}$$

Остальные обозначения в формулах (1.13) — (1.15) совпадают с принятыми в [1].

Построенная теория качественно отличается от теорий типа Лява. В ней, как и в теории Нахди, появилось соотношение упругости для перерезывающих усилий. Кроме того, формулой (1.18) введен сдвиг $\gamma_{\alpha 3}$, характеризующий изменение угла между касательной к α-линии и нормалью к срединной поверхности. Причем для определения $\gamma_{\alpha 3}$ потребовалось, кроме смещений срединной поверхности, ввести следующие смещения:

(1.17) $u_{\alpha,1} = \lambda^p v_1^{(1)}, \qquad u_{\beta,1} = \lambda^p v_2^{(1)}$

Заметим, что в теориях типа Лява сдвиг $\gamma_{\alpha 3}$ считают равным нулю. Это равносильно отбрасыванию $\tau_{i3}{}^*$ в последней формуле (1.5), что вносит погрешность порядка h_*^{2-2t}. Порядок системы дифференциальных уравнений полученной теории шестнадцатый.

Замечание. Полученными соотношениями упругости можно воспользоваться для уточнения расчета простого краевого эффекта, о чем говорилось в статье [5].

2. Выпишем в принятых обозначениях соотношения упругости Нахди (речь идет о первом варианте соотношений упругости, предложенных

Нахди, в котором учитывается поперечный сдвиг, но принимается гипотеза о сохранении нормального элемента)

$$T^{ik} = BE^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + DH^{ik\alpha\beta}M_{\alpha\beta} + DH^{ik\alpha\beta}\nabla_\beta\gamma_{\alpha3} \tag{2.1}$$
$$M^{ik} = DG^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + DH^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + DG^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha\gamma_{\beta3}$$
$$N^i = -\frac{5Eha^{i\alpha}}{6(1+\nu)}\gamma_{\alpha3} - \frac{h}{6}a^{i\alpha}(q_\alpha^+ + q_\alpha^-) - \frac{h^2}{3}c^{i\alpha}c^{\beta\lambda}b_{\alpha\beta}(q_\lambda^+ + q_\lambda^-)$$

где $E^{ik\alpha\beta}$, $H^{ik\alpha\beta}$, $G^{ik\alpha\beta}$ определяются формулами (1.15).

Проведем сравнение формул (1.13) и (2.1). Сравним, например, соотношения упругости для усилий T^{ik}. Нахди сохраняет члены $DH^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}$ и отбрасывает члены такого же порядка: $(1+\nu)DF^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}$ и $DP^{ik}\mu_\gamma{}^\gamma$ ($H^{ik\alpha\beta}$ и $F^{ik\alpha\beta}$ различны). Кроме того, в соотношениях упругости Нахди для усилий отсутствуют члены, учитывающие влияние нагрузки. Пренебрежение ими приводит к погрешности $O(h_*)$ в соотношениях упругости для нормальных усилий и погрешности $O(h_*{}^{2-2t})$ в соотношениях упругости для изгибающих моментов.

Таким образом, формулы (2.1) нельзя признать асимптотически последовательными. В них Нахди ввел члены с $\gamma_{\alpha3}$, но пропустил не только члены того же порядка малости, но даже и члены, превышающие их (слагаемые с $(q_3^+ - q_3^-)$).

Рассмотрим пример, который показывает к чему это может привести в числах. Возьмем шарнирно опертую замкнутую круговую цилиндрическую оболочку радиуса r, толщины $2h$ и длины l.

Пусть лицевые поверхности оболочки загружены следующим образом:

$$\tau_3|_{\alpha_3=h} = q\sin k\xi, \qquad \tau_3|_{\alpha_3=-h} = 0 \tag{2.2}$$

$$k = \pi r/l, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{l}{r} \tag{2.3}$$

Координатная ξ-линия направлена вдоль образующей, линия α_3 — по нормали к срединной поверхности.

Будем искать решение поставленной осесимметричной задачи в виде

$$u = a\cos k\xi, \qquad v = 0, \qquad w = c\sin k\xi \tag{2.4}$$

При этом граничные условия выполняются автоматически.

Будем сравнивать нормальные смещения w, полученные по теориям (1.13) и (2.1). Представим w в виде

$$w = w_0 + \frac{h}{r}W$$

Здесь w_0 — смещение, определяемое по теории типа Лява, W — поправка к теории типа Лява, найденная по уточненной теории.

Опуская простые вычисления, сводящиеся к решению алгебраических уравнений, выпишем окончательные результаты.

При $k = 1$ (показатель изменяемости напряженного состояния равен нулю) получим

$$W_1 = -(1-\nu)\frac{rq}{2E}\sin\xi, \qquad W_2 = -\frac{rq}{2E}\sin\xi \tag{2.5}$$

Здесь и ниже W_1 означает поправку W, найденную по теории (1.13), а W_2—поправку по теории Нахди.

В остальных примерах, чтобы избежать выписывания громоздких формул, смещения вычислены при $\nu = 0.3$.

При $k = h_*^{-1/2}$ получим

$$W_1 = -1.12\frac{rq}{2E}\sin h_*^{-1/2}\xi, \qquad W_2 = -1.07\frac{rq}{2E}\sin h_*^{-1/2}\xi \tag{2.6}$$

Из формул (2.5), (2.6) видно, что расхождение между рассматриваемыми теориями при нагрузке (2.2) более существенно в случае $k = \mathrm{I}$, $\nu = 0{,}3$.

Загрузим ту же оболочку касательными силами следующим образом:

$$\tau_{\alpha 3}\big|_{\alpha_3=h} = p\cos k\xi, \qquad \tau_{\alpha 3}\big|_{\alpha_3=-h} = 0 \tag{2.7}$$

Формулы (2.3) и (2.4) сохраняются.

Проведенный расчет показал, что для нагрузки (2.7) при $k = \mathrm{I}$ получается полное совпадение смещений w, найденных по обеим теориям. При $k = h_*^{-1/2}$ получается существенное расхождение

$$W_1 = -2.02\frac{\sqrt{hr}}{2E}p\sin h_*^{-1/2}\xi, \qquad W_2 = -0.191\frac{\sqrt{hr}}{2E}p\sin h_*^{-1/2}\xi \tag{2.8}$$

Замечание. Нахди там же [3] строит теорию, в которой он отказывается от гипотезы сохранения длины нормального элемента. Не останавливаясь на анализе соответствующих соотношений, заметим только, что они с излагаемой точки зрения также непоследовательны.

3. Получим асимптотическим методом соотношения упругости для оболочек, слабо сопротивляющихся сдвигу.

Введем величину, характеризующую отношение модуля сдвига G к G', где G — модуль сдвига для поверхностей, параллельных срединной, а G' — модуль сдвига для плоскостей, перпендикулярных к срединной поверхности

$$G / G' = \eta = h_*^{-a} \tag{3.1}$$

Внесем (3.1) в (1.5). Это приведет к изменению только в правой части последней формулы (1.5), где появится дополнительный множитель λ^{al}.

При построении теории оболочек, слабо сопротивляющихся сдвигу, следует ограничиться следующими значениями a:

$$0 < a < 2-2t \tag{3.2}$$

так как, если $a \geqslant 2-2t$, то можно показать, что построение двумерной теории становится невозможным.

Опуская выкладки, аналогичные проделанным в п. I, выпишем соотношения упругости для оболочек, слабо сопротивляющихся сдвигу

$$\begin{aligned} T^{ik} &= BE^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + r\frac{h^2\eta}{3(1-\nu)}G^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha(q_\beta^+ + q_\beta^-) + \\ &+ r\frac{\nu}{1-\nu}ha^{ik}(q_3^+ - q_3^-) \\ M^{ik} &= DG^{ik\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} + \frac{4}{5}DG^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha\gamma_{\beta 3} + rDH^{ik\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + rDR^{ik}\varepsilon_\gamma^\gamma + \\ &+ r\frac{2h^3\eta}{15(1-\nu)}G^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha(q_\beta^+ + q_\beta^-) + \frac{r\nu h^3}{3(1-\nu)}a^{ik}(q_3^+ + q_3^-) \\ N^i &= -\frac{2Eh}{3(1+\nu)\eta}a^{i\alpha}\gamma_{\alpha 3} - r\frac{h}{3}a^{i\alpha}(q_\alpha^+ - q_\alpha^-) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для выписанных формул сохраняют силу введенные в п. I обозначения (1.15).

Формулами (3.3) объединены два варианта соотношений упругости; полагая $r=0$, получим первый вариант соотношений упругости, составленный с точностью

$$\varepsilon = \begin{cases} O\,(h_* + h_*^{4-4t-2a}), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ O\,(h_*^{2-2t} + h_*^{4-4t-2a}), & 1/2 < t < 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

а при $r=1$ — второй вариант с точностью

$$\varepsilon = O\,(h_*^{2-2t} + h_*^{4-4t-2a}), \quad 0 \leqslant t < 1 \tag{3.5}$$

Следует отметить, что теория (3.3) при $r=1$ играет для оболочек, слабо сопротивляющихся сдвигу, такую же роль, как теория [1] по отношению к остальным теориям типа Лява: при попытке выйти за рамки точности (3.5) получается более сложная и более высокого порядка система уравнений теории оболочек, чем у Нахди.

Сравнивая соотношения упругости (3.3) при $r=0$ с соотношениями упругости Нахди (2.1), заметим, что они незначительно отличаются некоторыми численными коэффициентами при второстепенных членах: так, в (3.3) при члене $DG^{ik\alpha\beta}\nabla_\alpha\gamma_{\beta 3}$ коэффициент $^4/_5$, а у Нахди при том же члене единица, кроме того, в соотношениях упругости для перерезывающих усилий в первом слагаемом справа в (3.3) коэффициент $^2/_3$, а у Нахди $^5/_6$. Отсюда следует, что соотношения упругости Нахди при расчете оболочек, слабо сопротивляющихся сдвигу, обеспечивают точность до величин порядка (3.4).

Приведем таблицу погрешностей различных теорий для оболочек, слабо сопротивляющихся сдвигу. Погрешности представим в виде $h_*^\alpha + h_*^\beta$ или h_*^α, значения α и β занесем в таблицу. В первой строке таблицы выписаны погрешности, получаемые при расчете оболочек, не имеющих краев, с нулевым показателем изменяемости напряженного состояния. Во второй строке даются погрешности, получаемые при расчете методом расчленения напряженного состояния [5], в верхней части строки даются погрешности, получаемые для безмоментного напряженного состояния ($t=0$), в нижней части строки приведены погрешности расчета простых краевых эффектов ($t={}^1/_2$). В третьей строке выписаны погрешности для напряженных состояний с большой изменяемостью.

Выясним область применимости теории Нахди в зависимости от показателя изменяемости напряженного состояния и числа a, характеризующего сопротивляемость оболочки на сдвиг.

Расчет рассматриваемых оболочек по теории типа Лява, не подвергнутой улучшениям, дает погрешность $O\,(h_* + h_*^{2-2t-a})$, а по модифицированной теории [1] погрешность $O\,(h_*^{2-2t-a})$. Из этих оценок погрешности видно, что при расчете замкнутых оболочек с нулевым показателем изменяемости для значений $a<1$ теории типа Лява обеспечивают точность, совпадающую с точностью теории Нахди, а во втором случае даже ее превышает. При $a=1$ погрешности всех этих теорий совпадают. При $1<a<2$ теория Нахди дает меньшую погрешность (см. первую строку таблицы).

t	Теории						
	типа Лява		[1]	Нахди		(3.3), $r=1$	
	α	β	α	α	β	α	β
0	1	$2-a$	$2-a$	1	$4-2a$	2	$4-2a$
0	1	$^3/_2-a$	$^3/_2-a$	1	$^5/_2-2a$	$^3/_2$	$^5/_2-2a$
$^1/_2$	$1-a$	—	$1-a$	1	$2-2a$	1	$2-2a$
$[^1/_2, 1]$	$2-2t-a$	—	$2-2t-a$	$2-2t$	$4-4t-2a$	$2-2t$	$4-4t-2a$

Если напряженное состояние допускает расчленение на безмоментное и простые краевые эффекты, то, применив итерационный метод, описанный в [5], получим, что при $a \leqslant {}^1/_2$ расчет безмоментного напряженного состояния по теории Нахди не дает преимуществ по сравнению с теориями типа Лява. Но для простых краевых эффектов и напряженных состояний с большой изменяемостью теория Нахди обеспечивает более высокую точность, чем теории типа Лява (см. вторую и третью строки таблицы).

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за консультации и постоянное внимание к работе.

Поступила 14 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. (К 60-летию академика Л. И. Седова.) М., «Наука», 1969.
2. *Reissner E.* On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
3. *Naghdi P. M.*, On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., 1957, vol. 14, No. 4.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
5. *Антропова Н. Н.*, *Гольденвейзер А. Л.* Погрешности построения основного напряженного состояния и простого краевого эффекта в теории оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5.