Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 624.07 : 62—50

ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ СИСТЕМ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Предлагается один из возможных вариантов оптимального управления вынужденными движениями упругих систем типа стержней, пластин и оболочек. Развиваемая процедура применяется к простейшим задачам о переводе свободно опертого стержня или пластины из начального состояния φ, ψ в состояние покоя за наименьшее возможное время T при наличии ограничения на вынуждающую нагрузку. Используются простейшие результаты теории l-проблемы моментов М. Г. Крейна [1-3].

1. Рассмотрим шарнирно опертый стержень, совершающий вынужденные движения под действием нагрузки $f(x, t)$.

Полная система уравнений, определяющая состояние стержня в любой момент времени t, имеет, как известно, вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{f(x,t)}{EJ}, \quad x \in (0, l), \quad t > 0 \tag{1.1}$$

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad w_{xx}(0,t) = w_{xx}(l,t) = 0$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad w^{\cdot}(x, 0) = \psi(x), \quad w^{\cdot} = \partial w / \partial t$$

Здесь $w(x, t)$ — вертикальное смещение, ρ и E — плотность и модуль упругости материала, J и F — момент инерции и площадь поперечного сечения стержня.

Вынуждающую нагрузку (управление) представим следующим образом:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant t < T \tag{1.2}$$

$$f(x, t) = 0, \quad t \geqslant T$$

Система $\{f_k(t)\}$ предполагается линейно-независимой.

Решение задачи (1.1) имеет вид

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{C_k \sin\lambda_k t + D_k \cos\lambda_k t + \tag{1.3}$$

$$+ \frac{1}{\lambda_k \rho F}\int_0^t f_k(\eta) \sin\lambda_k(t-\eta)\, d\eta\Big\} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$D_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$C_k = \frac{2}{l\lambda_k}\int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{k\pi\xi}{l}\, d\xi, \qquad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

Интерпретируя $f_k(t)$ как функции управления, поставим задачу об «успокоении» стержня, т. е. о переводе его из состояния $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в состояние покоя за минимальное время T.

Будем предполагать, что управления $f_k(t)$ принадлежат пространству L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ функций, суммируемых с p-й степенью на $[0, T]$. На $f_k(t)$ наложим ограничения

$$\|f_k\|_{L^p} \leqslant \Lambda, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Условия перехода системы из начального состояния в конечное имеют вид

$$w|_{t=T} = 0, \quad w^{\boldsymbol{\cdot}}|_{t=T} = 0, \quad x \in [0, l] \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.5) функцию (1.3), приходим к системе соотношений

$$\begin{gathered} C_k \sin\lambda_k T + D_k \cos\lambda_k T + \frac{1}{F\rho\lambda_k}\int_0^T f_k(\eta)\sin\lambda_k(T-\eta)\,d\eta = 0 \\ C_k \cos\lambda_k T + D_k \sin\lambda_k T + \frac{1}{F\rho\lambda_k}\int_0^T f_k(\eta)\cos\lambda_k(T-\eta)\,d\eta = 0 \\ k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{1.6}$$

Исключая в соотношениях (1.6) время T из подынтегральных выражений, приходим к счетной системе проблем моментов второго порядка

$$\begin{gathered} a_k = \int_0^T f_k(\eta)\cos\lambda_k\eta\,d\eta, \qquad a_k = -C_k\rho F\lambda_k \\ b_k = \int_0^T f_k(\eta)\sin\lambda_k\eta\,d\eta, \qquad b_k = D_k\rho F\lambda_k \\ \|f_k\| \leqslant \Lambda, \quad f_k \in L^p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \end{gathered} \tag{1.7}$$

В каждой из указанной совокупности проблем моментов (1.7) свое минимальное время T_k. Наибольшее из $\{T_k\}$ (если оно существует) дает наименьшее возможное время T, в течение которого реализуется перевод стержня из состояния φ, ψ в состояние покоя при наличии ограничений (1.3).

2. Согласно [1-3], каждая из проблем моментов (1.7) сводится к следующей эквивалентной задаче: найти

$$\begin{gathered} \min_{\xi_k, \eta_k} \int_0^T |\xi_k \cos\lambda_k t + \eta_k \sin\lambda_k t|^q dt = \\ = \int_0^T |\xi_k^\circ \cos\lambda_k t + \eta_k^\circ \sin\lambda_k t|^q\, dt \geqslant \Lambda^{-q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{gathered} \tag{2.1}$$

при условии

$$\xi_k a_k + \eta_k b_k = 1 \quad (k \text{ фиксировано})$$

Решение задачи на условный экстремум (2.1) элементарно. Полагая для сокращения записи $a_k = 0$ (например, начальная и конечная скорости стержня равны нулю), $f_k \in L^2$, получаем выражение для величин ξ_k°, η_k° $(p = q = 2)$

$$(2.2) \qquad \eta_k = \eta_k^\circ = \frac{1}{b_k}, \quad \xi_k^\circ = \frac{\cos 2\lambda_k T - 1}{2\lambda_k T + \sin 2\lambda_k T} \frac{1}{b_k}$$

Подставляя (2.2) в подынтегральное выражение (2.1), интегрируя при $q = 2$ и приравнивая полученный результат величине Λ^{-2}, приходим к трансцендентному уравнению относительно наименьшего возможного времени $T = T_k$ в каждой из задач (2.1)

$$(2.3) \qquad 1 - \frac{\sin^2 \tau_k}{\tau_k^2} = \frac{\varkappa_k}{\tau_k}\left(1 + \frac{\sin 2\tau_k}{2\tau_k}\right)$$

$$\varkappa_k = \frac{2\lambda_k b_k^2}{\Lambda^2}, \qquad \tau_k = \lambda_k T_k$$

Теорема 2.1. Для любого значения $m\pi < \varkappa < (m+1)\pi$, $(m = 0, 1, \ldots)$ существует единственное решение δ уравнения

$$(2.4) \qquad 1 - \frac{\sin^2 \delta}{\delta^2} = \frac{\varkappa}{\delta}\left(1 + \frac{\sin 2\delta}{2\delta}\right)$$

заключенное в интервале $m\pi < \delta < (m+1)\pi$. При $\varkappa = m\pi$ решение $\delta = m\pi$. С увеличением $\varkappa$ функция $\delta(\varkappa)$ монотонно возрастает на $(m\pi, m\pi + \pi)$, $\lim \delta / \varkappa = 1$ при $\varkappa \to \infty$.

Доказательство. Введем функцию

$$(2.5) \qquad R(\delta) = \delta - \lambda r(\delta), \qquad r(\delta) = \frac{\delta^2 - \sin^2\delta}{2\delta + \sin 2\delta} - \frac{\varkappa}{2}$$

$$r'(\delta) \geqslant 0, \qquad \lambda = \{\max r'(\delta)\}^{-1}, \qquad m\pi \leqslant \delta \leqslant (m+1)\pi,$$

$$r(m\pi) < 0, \; r(m\pi + \pi) > 0$$

Уравнение $\delta = R(\delta)$, очевидно, эквивалентно (2.4). В силу (2.5) $|R'(\delta)| < 1$ на $(m\pi, m\pi + \pi)$, т. е. отображение R — сжимающее. По принципу сжатых отображений [4] это уравнение имеет единственное решение $m\pi < \delta < (m+1)\pi$.

Монотонное возрастание $\delta(\varkappa)$ на каждом из интервалов $(m\pi, m\pi + \pi)$ следует из положительности производной $d\delta / d\varkappa$ на нем.

Из доказательства, в частности, следует, что решение уравнения (2.4) может быть получено методом последовательных приближений при помощи рекуррентного процесса

$$(2.6) \qquad \delta_{n+1} = R(\delta_n), \quad n = 0, 1, \ldots; \quad \delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n$$

Корни уравнения (2.4) в зависимости от значений параметра $\varkappa$ приведены ниже

$\varkappa = 0.005$,	0.010,	0.015,	0.020,	0.025,	0.5,
$\delta = 0.308$,	0.387,	0.441,	0.484,	0.522,	1.308,
$\varkappa = 1$,	2,	10,	15,	20,	30,
$\delta = 1.603$,	2.017,	10.48,	14.625,	20.23,	29.94

Будем предполагать, что $\varphi(x) \in C^n$ $(n \geqslant 1)$, а $d^n\varphi / dx^n$ имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$. В этих условиях справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Задача об оптимальном (в указанном выше смысле) управлении стержня в L^2 разрешима. Наименьшее возможное время T, в течение которого реализуется перевод стержня из начального состояния в конечное (при наличии ограничений (1.4)), определяется формулой

$$T = \sup\left\{T_k = \frac{\tau_k}{\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots\right\} = \frac{\tau_{k_0}}{\lambda_{k_0}} = T_{k_0} \tag{2.7}$$

Доказательство. В силу условий, наложенных на $\varphi(x)$, коэффициенты Фурье D_k убывают с ростом k не медленнее, чем k^{-3}. На основании (1.3), (1.7) и (2.3) заключаем, что последовательность $\{\varkappa_k\}$ ограничена. В силу теоремы 2.1 ограничена и последовательность $\{\tau_k = \tau(\varkappa_k)\}$.

Отсюда вытекает существование конечной точной верхней грани последовательности $\{\tau_k / \lambda_k\}$, причем она реализуется при некотором $k = k_0$. Таким образом, (2.7) имеет смысл и определяет наименьшее возможное время, которому соответствуют одновременно решения всей совокупности проблем моментов (1.7).

Далее, ряд (1.2), задающий управляющую нагрузку $f(x, t)$, сходится. В самом деле, в силу (2.2) искомые управляющие функции $f_k(t)$ имеют в L^2 вид [3]

$$\begin{gathered}
f_k(t) = \frac{1}{\beta_k} G(\xi_k^\circ, \eta_k^\circ), \quad G(\xi_k, \eta_k) = \xi_k \cos\lambda_k t + \eta_k \sin\lambda_k t \\
\beta_k = \int_0^T |G(\xi_k^\circ, \eta_k^\circ)|^2 dt \geqslant \Lambda^{-2}, \quad \beta_{k_0} = \Lambda^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots \\
\xi_k^\circ = \frac{1}{b_k} \frac{\cos 2\varepsilon_k\tau^\circ - 1}{2\varepsilon_k\tau^\circ + \sin 2\varepsilon_k\tau^\circ}, \quad \eta_k^\circ = \frac{1}{b_k} \\
\varepsilon_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k_0}} = \left(\frac{k}{k_0}\right)^2, \quad \tau^\circ = \tau_{k_0}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Непосредственно из (2.7), учитывая (1.3) и (1.7), находим

$$\begin{gathered}
f_k(t) = \frac{2EJk_0^2}{\tau^\circ} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 k^2 D_k \{A_k(\tau^\circ) \sin\lambda_k t - B_k(\tau^\circ) \cos\lambda_k t\} \\
A_k(\tau^\circ) = \left(1 + \frac{\sin 2\varepsilon_k\tau_0}{2\varepsilon_k\tau^\circ}\right) \frac{1}{\Delta_k(\tau^\circ)}, \quad k = 1, 2, \ldots \\
B_k(\tau^\circ) = \frac{\sin^2 \varepsilon_k\tau^\circ}{\varepsilon_k\tau^\circ \Delta_k(\tau^\circ)}, \quad \Delta_k(\tau^\circ) = 1 - \left(\frac{\sin\varepsilon_k\tau^\circ}{\varepsilon_k\tau^\circ}\right)^2
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует сходимость ряда (1.2) при любом фиксированном $0 \leqslant t \leqslant T_{k_0}$ по норме L^2. Если же $n \geqslant 2$, то ряд (1.2) сходится абсолютно и равномерно на $[0, l]$ при любом $0 \leqslant t \leqslant T_{k_0}$.

3. Рассмотрим примеры. Пусть начальная скорость $\psi(x) = 0$, а начальное смещение совпадает с прогибом стержня под действием равномерной поперечной нагрузки $s = \text{const}$, т. е.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad D_k = \frac{2s(1 - \cos k\pi)}{EJl} \left(\frac{l}{k\pi}\right)^5 \tag{3.1}$$

Определим управляющую нагрузку $f(x, t)$ и наименьшее возможное время T, необходимые для того, чтобы успокоить стержень. Функции управления $f_k(t)$ будем разыскивать в L^2.

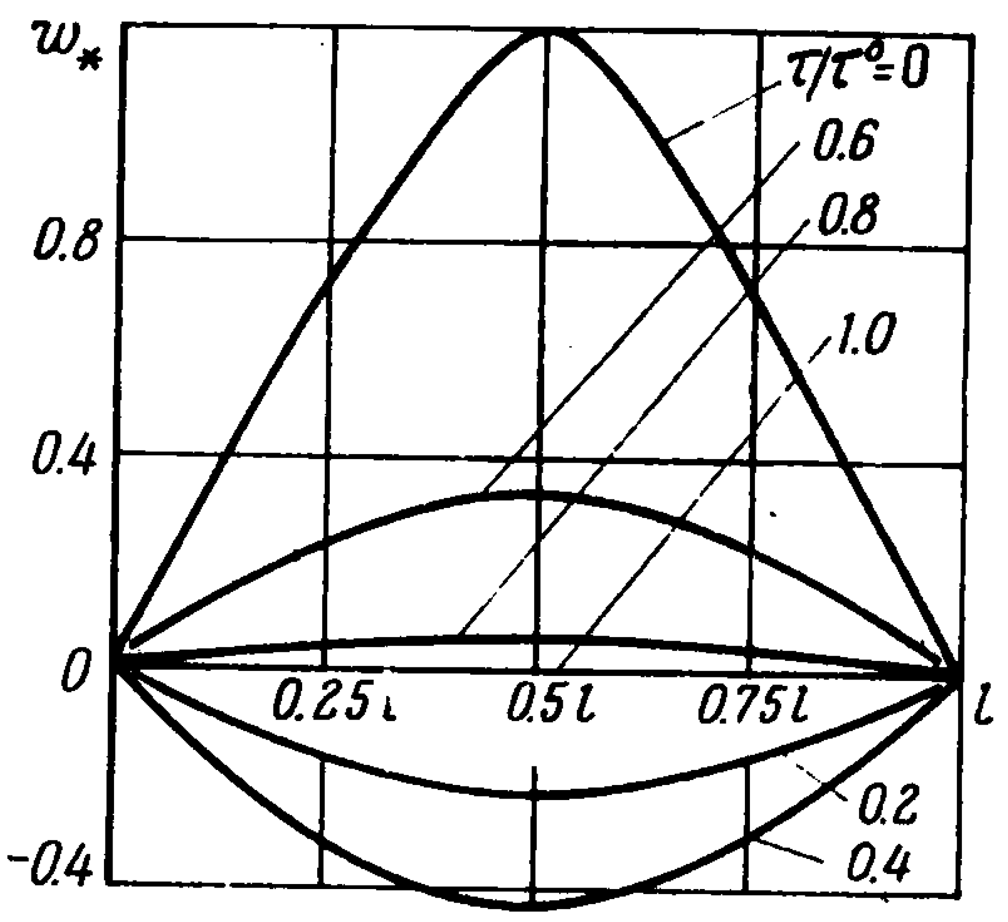
Очевидно, в данном случае $f_{2k}(t) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Величины $\varkappa_k$ и β_k в силу (1.7), (1.3), (2.3), (2.7) и (2.9) имеют вид

$$\varkappa_k = \frac{32 s^2 l^2}{\pi^4 k^4 \Lambda^2} \sqrt{\frac{\rho E}{EJ}} \tag{3.2}$$

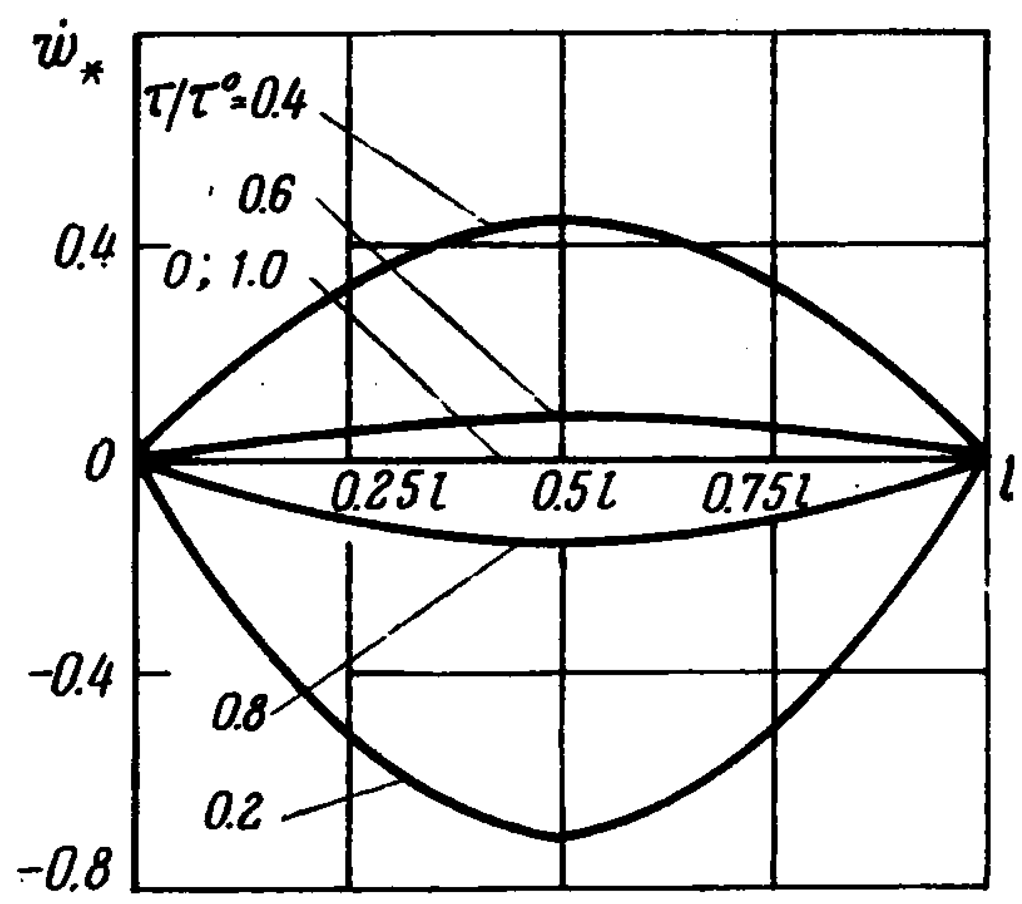
$$\beta_k = \frac{(k^2\tau^\circ)^2 - (\sin k^2\tau^\circ)^2}{2k^2\tau^\circ + \sin 2k^2\tau^\circ} \frac{1}{\lambda_k b_k^2}, \qquad k = 1, 3, \ldots$$

В силу теорем 2.2 и 2.1 решение задачи об оптимальном успокоении стержня существует, и наименьшее возможное время управления

$$T = T_1 = \tau_1 / \lambda_1, \qquad \tau^0 = \tau_1 \tag{3.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Управляющие функции находим из (2.9) и (3.1) при $k_0 = 1$

$$f_k(t) = \frac{8S}{\pi\tau^0 k^3}\{A_k(\tau^\circ)\sin\lambda_k t - B_k(\tau^\circ)\cos\lambda_k t\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1 \tag{3.4}$$

Управляющая нагрузка $f(x, t)$ находится по формуле (1.2), которую необходимо подставить функции $f_k(t)$ из (3.4).

На фиг. 1—3 приведены эпюры $w_* = \pi^5 EJw / 4sl^4$, $w_*^\bullet = \pi^3\sqrt{EJ\rho E}\, w^\bullet / 4sl^2$ и $f(x, t) / s$ для разных значений безразмерного времени $\tau = \lambda_1 t$ $(0 \leqslant \tau \leqslant \tau^0)$ при $\tau^0 = 10$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об успокоении стержня при $\psi(x) = 0$ и начальном смещении, совпадающем с прогибом стержня под действием приложенной в средине сосредоточенной силы P.

Имеем в этом случае

$$\varkappa_k = \frac{8P^2}{\pi^2 k^2 \Lambda^2} \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}, \qquad D_k = \frac{2P}{EJl}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^4 \sin\frac{k\pi}{2}$$

Следовательно, наименьшее возможное время управления совпадает с T_1 и $\tau^0 = \tau_1$.

Управляющие функции имеют вид

$$f_k(T) = \frac{4P\sin k\pi/2}{k^2 l\tau^\circ}(A_k\sin\lambda_k t - B_k\cos\lambda_k t), \qquad 0 \leqslant t < T$$

Величины A_k и B_k заданы в (3.4). Управляющая нагрузка $f(x, t)$ определяется рядом (1.2).

Рассмотрим теперь наиболее тяжелый с точки зрения оптимального успокоения стержня случай, когда начальное смещение совпадает с прогибом стержня под действием сосредоточенного в точке $x = x_0$ изгибающего момента M. Здесь

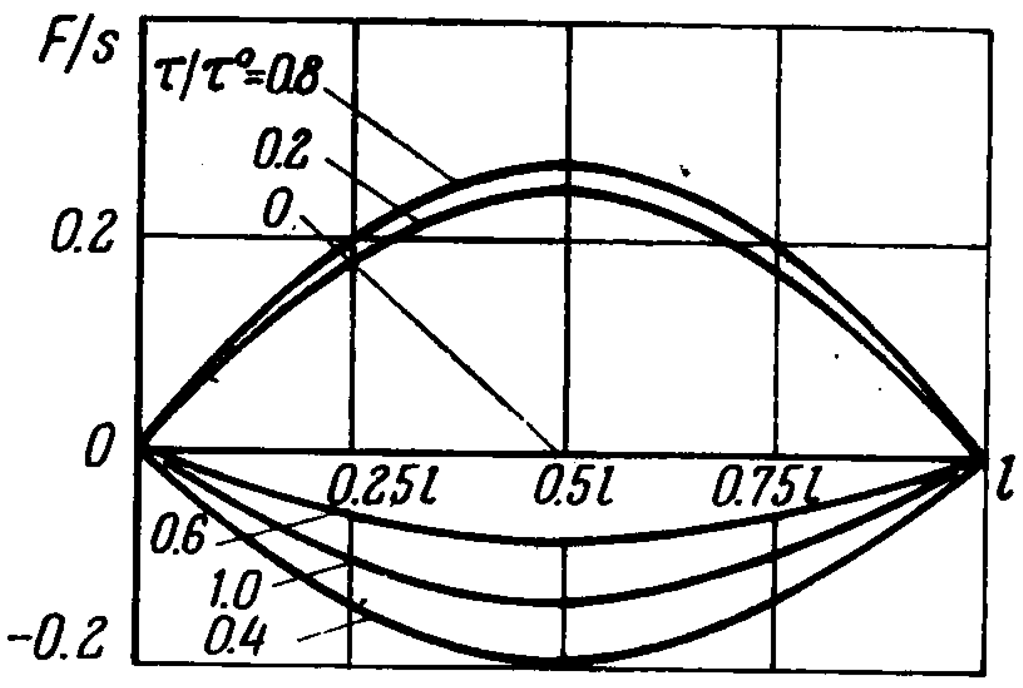
$$\varkappa_k = \frac{8M^2}{\Lambda^2 l^2}\sqrt{\frac{\rho F}{EJ}}\cos^2\frac{k\pi x_0}{l}, \qquad D_k = \frac{2M}{EJl}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^3\cos\frac{k\pi x_0}{l}, \qquad C_k = 0$$

При $x_0 = 0.5\ l$, например, минимальное время успокоения $T = T_1\ (\tau^\circ = \tau_1)$. Соответственно управляющие функции таковы:

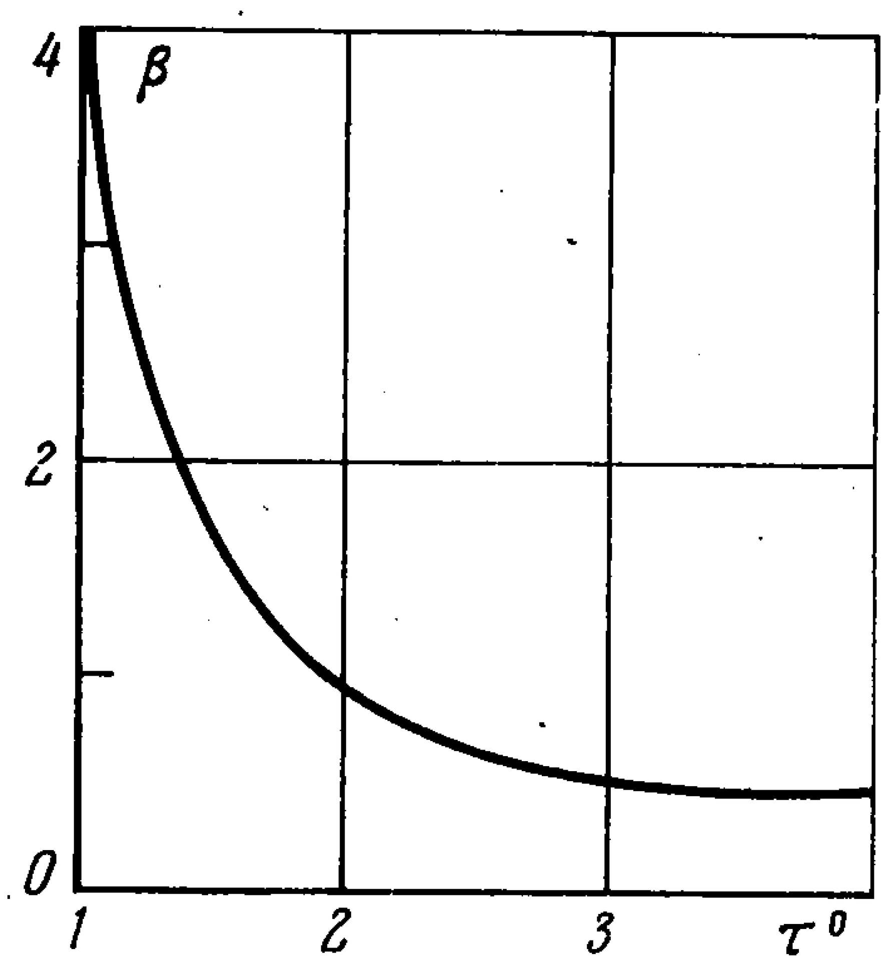
$$f_k(t) = \frac{2\pi M}{kl^2\tau^\circ}(A_k \sin\lambda_k t - B_k \cos\lambda_k t)\cos\frac{k\pi}{2}, \qquad \|f_k\| \leqslant \Lambda$$

Здесь A_k и B_k определены в (3.4).

4. Свяжем ограничение Λ со статической нагрузкой, необходимой для создания начального прогиба $\varphi(x)$. Рассуждения проведем применительно к первому примеру п. 3.



Фиг. 3



Фиг. 4

Учитывая, что в $L^2\,[0, T_2]$ будет $\|s\| = s\sqrt{T}$, находим из (3.2), (3.3) и (1.3)

$$\beta \quad \frac{\Lambda}{s\sqrt{T}} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\varkappa\tau^\circ}}$$

Кривая $\beta(\tau^0)$ приведена на фиг. 4.

Порядок расчета можно принять следующим. Задаемся величиной β и параметрами стержня l, ρ, F и J. По кривой $\beta(\tau^\circ)$ на фиг. 4 определяем τ°. Время успокоения T находим по формуле (3.3), а отношение управляющей нарузки $f(x, t)$ к интенсивности статической нагрузки s — по формуле (1.2) с учетом (3.4). Величина s фиксирована, так как начальный прогиб стержня считается заданным.

Аналогичные рассуждения проходят и в остальных случаях.

5. Рассмотрим задачу об оптимальном успокоении шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластинки.

Полная система уравнений, определяющая вынужденные движения пластинки, имеет вид

$$\text{(5.1)} \qquad \nabla^2\nabla^2 w(x, y, t) + \frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{D} f(x, y, t)$$

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0$$

$$w(x, y, t)\,|_c = 0, \quad w_{nn}(x, y, t)\,|_c = 0, \quad t \geqslant 0$$

$$w(x, y, t)\,|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad w^\cdot(x, y, t)\,|_{t=0} = \psi(x, y)$$

$$D = Eh^3/12\,(1 - \mu^2)$$

Здесь $w(x, y, t)$ — вертикальное смещение пластинки; ρ, E, μ — плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона, h — толщина пластинки; c — граница прямоугольной области B $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$.

По смыслу задачи функции φ и ψ непрерывны, обладают непрерывными первыми и ограниченными вторыми производными по совокупности своих аргументов в B.

Управляющую нагрузку будем разыскивать в форме

$$f(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.2}$$

$$0 \leqslant t < T$$

$$f(x, y, t) = 0, \quad t \geqslant T$$

Тогда решение задачи (5.1), соответствующее нагрузке (5.2), представляется в обычном виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left\{ C_{mn} \sin \lambda_{mn} t + D_{mn} \cos \lambda_{mn} t + \right. \tag{5.3}$$

$$\left. + \frac{1}{\rho h \lambda_{nm}} \int_0^t f_{mn}(\eta) \sin \lambda_{mn}(t - \eta)\, d\eta \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$D_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$C_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^a \int_0^b \psi(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$\lambda_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

Отправляясь от решения (5.3), поставим задачу о переводе пластинки из состояния $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ в состояние покоя за минимальное возможное время T.

Условия полного успокоения пластинки имеют вид

$$w|_{t=T} = 0, \quad w^{\cdot}|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \tag{5.4}$$

Подставляя в (5.4) функцию (5.3) при $t = T$, получаем (после промежуточных преобразований) счетную совокупность проблем моментов второго порядка

$$a_{mn} = \int_0^T f_{mn}(\eta) \cos \lambda_{mn} \eta\, d\eta, \quad \| f_{mn} \| \leqslant \Lambda$$

$$b_{mn} = \int_0^T f_{mn}(\eta) \sin \lambda_{mn} \eta\, d\eta, \quad f_{mn} \in L^p$$

$$1 \leqslant p \leqslant \infty$$

$$a_{mn} = -\rho h \lambda_{mn} C_{mn}, \quad b_{mn} = \rho h \lambda_{mn} D_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, приходим к задаче, изученной выше.

Очевидно, описанную процедуру можно применить и в задачах оптимального управления вынужденными движениями упругих оболочек.

Поступила 2 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, ГОНТИ, 1938.
2. *Красовский Н. Н.* Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, 1957, т. 21, вып. 5.
3. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., «Наука», 1965.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.