

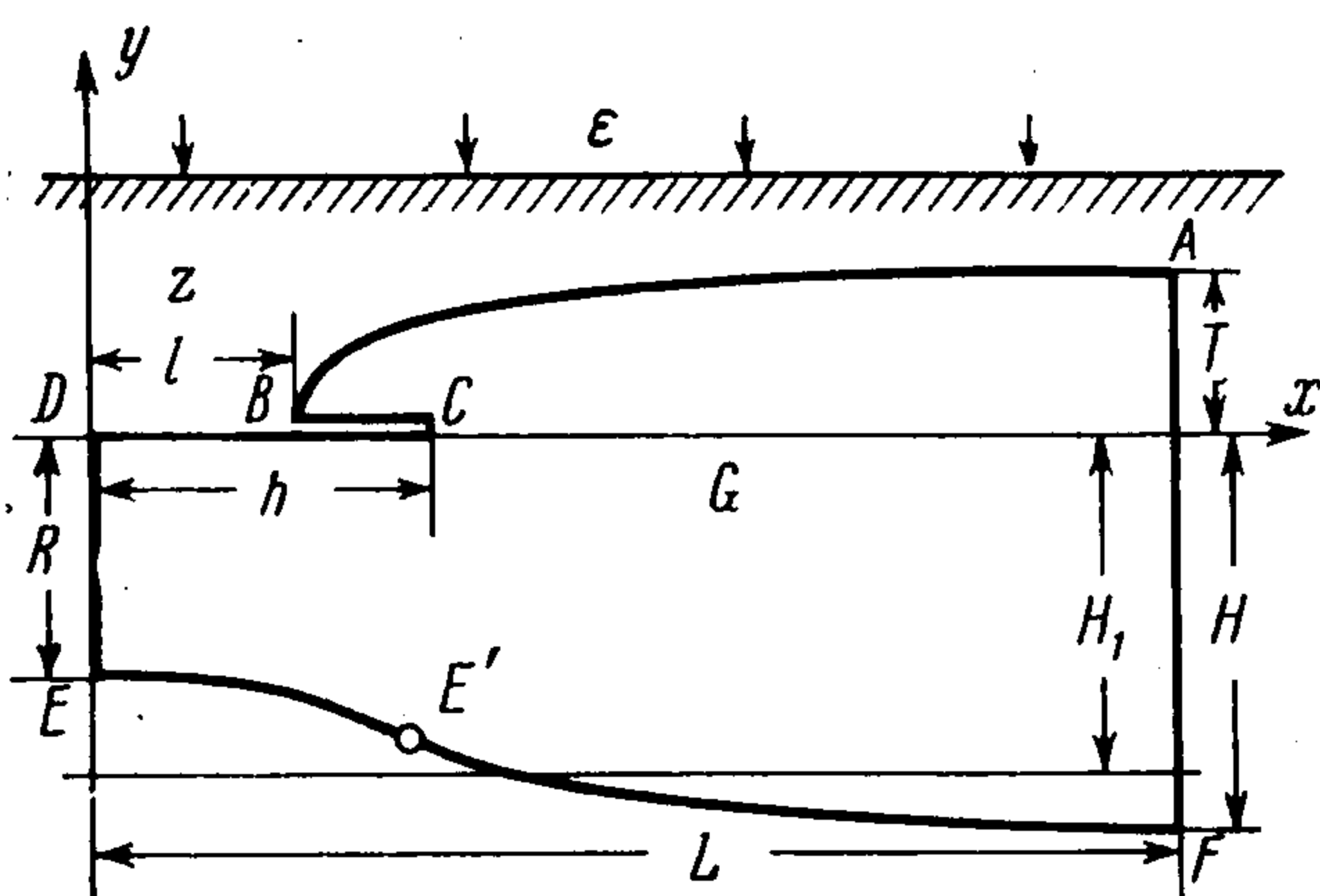
ЛИНЗА ПРЕСНОЙ ВОДЫ, ОБРАЗОВАННАЯ РАВНОМЕРНОЙ ИНФИЛЬТРАЦИЕЙ

Ю. И. Капранов

(Новосибирск)

В гидродинамической постановке исследуется предложенная Н. Н. Веригиным плоская модель установившейся линзы пресной воды, образованной равномерной инфильтрацией, для случая системы равноудаленных горизонтальных щелевых дрен. Получены представления для границы раздела, кривой депрессии и характерных размеров линзы.

1. Постановка задачи. Рассматриваемая схема течения представлена на фиг. 1. Бесконечная система параллельных щелевых дрен одинаковой ширины $2h$ располагается вдоль оси x перпендикулярно плоскости xu



Фиг. 1

(ось y направлена вертикально вверх). Грунт считаем однородным, неограниченным по глубине, а расстояние между серединами соседних дрен — постоянным и равным $2L$. Пресные инфильтрационные воды плотности ρ_1 поступают с поверхности земли на свободную границу (кривая депрессии AB), проходят через линзу (область G) и отводятся в дренажи. Ниже границы раздела (кривая EF) находятся соленые грунтовые воды плотности ρ_2 . Рассматривается

случай неполного затопления дрен; предполагается, что интенсивность инфильтрации ε (на единицу длины оси x) постоянна, грунтовые воды неподвижны [1,2], движение в линзе установившееся.

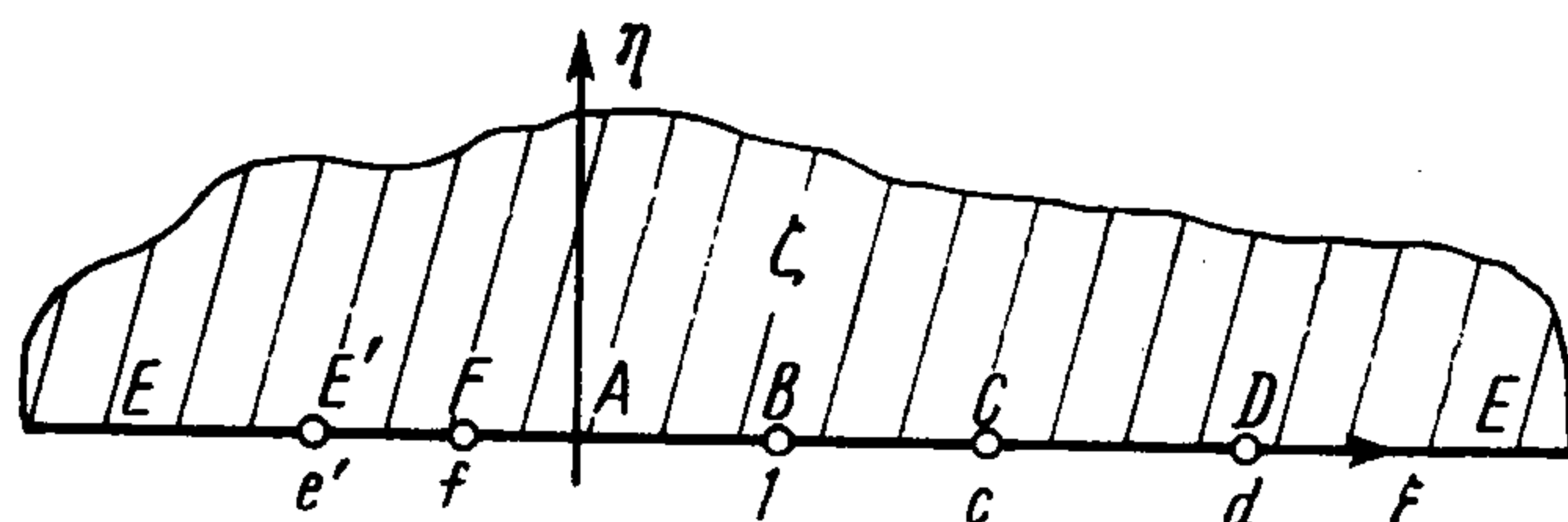
Исследование описанной модели, периодической по x с периодом $2L$ и симметричной относительно оси y , сводится к решению следующей математической задачи [1]. Построить область G указанного на фиг. 1 вида и пару гармонически сопряженных внутри нее функций φ, ψ так, чтобы выполнялись краевые условия

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\varphi + y)|_{AB} &= [\psi + \varepsilon_0(L - x)]|_{AB} = \varphi|_{BC, CD} = \\ &= \psi|_{DE, EF, FA} = (\varphi - \rho_0 y - \varphi_1)|_{EF} = 0 \\ \rho_0 &= (\rho_2 - \rho_1) / \rho_1, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon / k \end{aligned}$$

Здесь φ и ψ — отнесенные к коэффициенту фильтрации грунта k потенциал скорости и функция тока соответственно, φ_1 — некоторая постоянная. Через $\omega = \varphi + i\psi$ далее обозначается комплексный потенциал, а через $z = x + iy$ — произвольная точка области G .

Вводятся вспомогательная комплексная переменная $\zeta = \xi + i\eta$ и функции: $z(\zeta)$ — конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta = \eta > 0$ на область G (соответствие точек указано на фиг. 2), комплексная скорость $w = u - iv = d\omega / dz$ и

$$(1.2) \quad \begin{aligned} Z(\zeta) &= dz / d\zeta, \\ \Omega(\zeta) &= d\omega / d\zeta \end{aligned}$$



Фиг. 2

2. Построение функции $w(\zeta)$. На фиг. 3 представлена область годографа, соответствующая краевым условиям (1.1) [1, 3]. С помощью преобразования

$$(2.1) \quad W = \ln \frac{2i + \beta w}{2i\sigma - \alpha w}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\rho_0 + \varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_0(1 + \rho_0)}}{\sqrt{\rho_0 + \varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon_0(1 + \rho_0)}}, \quad \alpha, \beta = \frac{\sigma - 1}{\varepsilon_0} \pm (\sigma + 1)$$

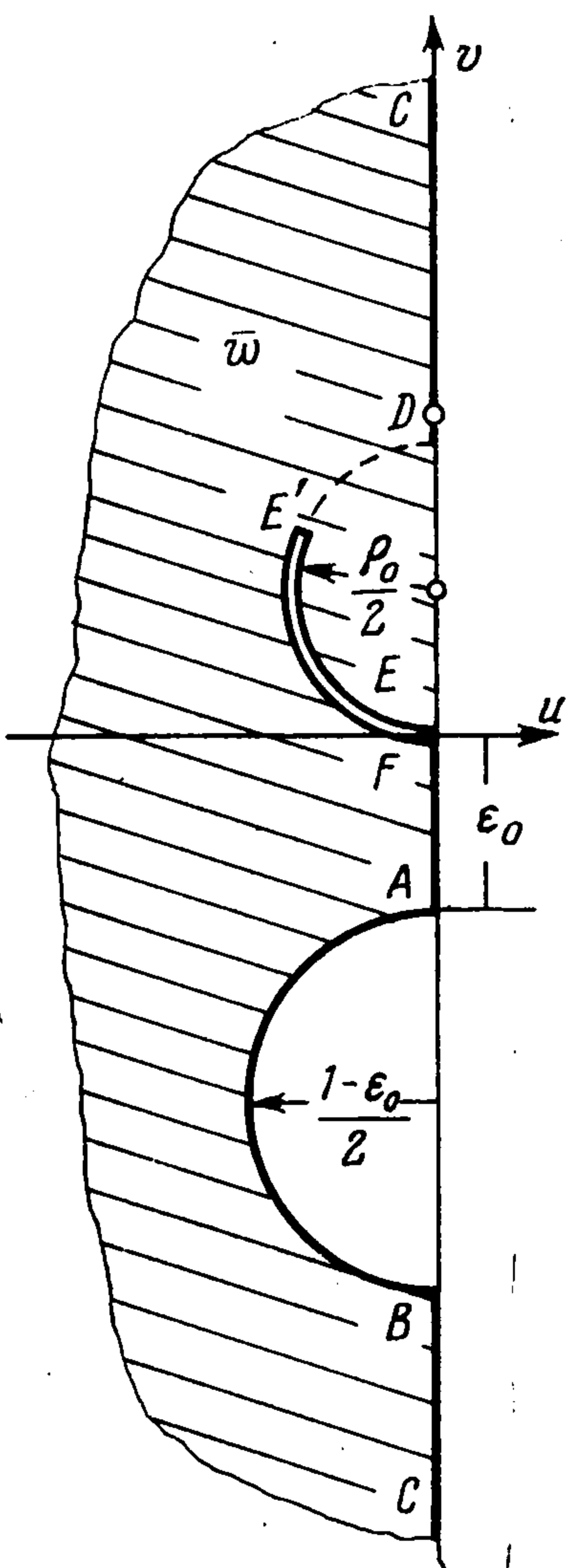
ее можно перевести в горизонтальную полуполосу ширины π с вертикальным разрезом (фиг. 4). Для функции W получаем по формуле Шварца — Кристоффеля

$$(2.2) \quad \frac{dW}{d\zeta} = c_0 \Phi(\zeta) = c_0 \frac{\zeta - e'}{\zeta - q} \Phi_0(\zeta),$$

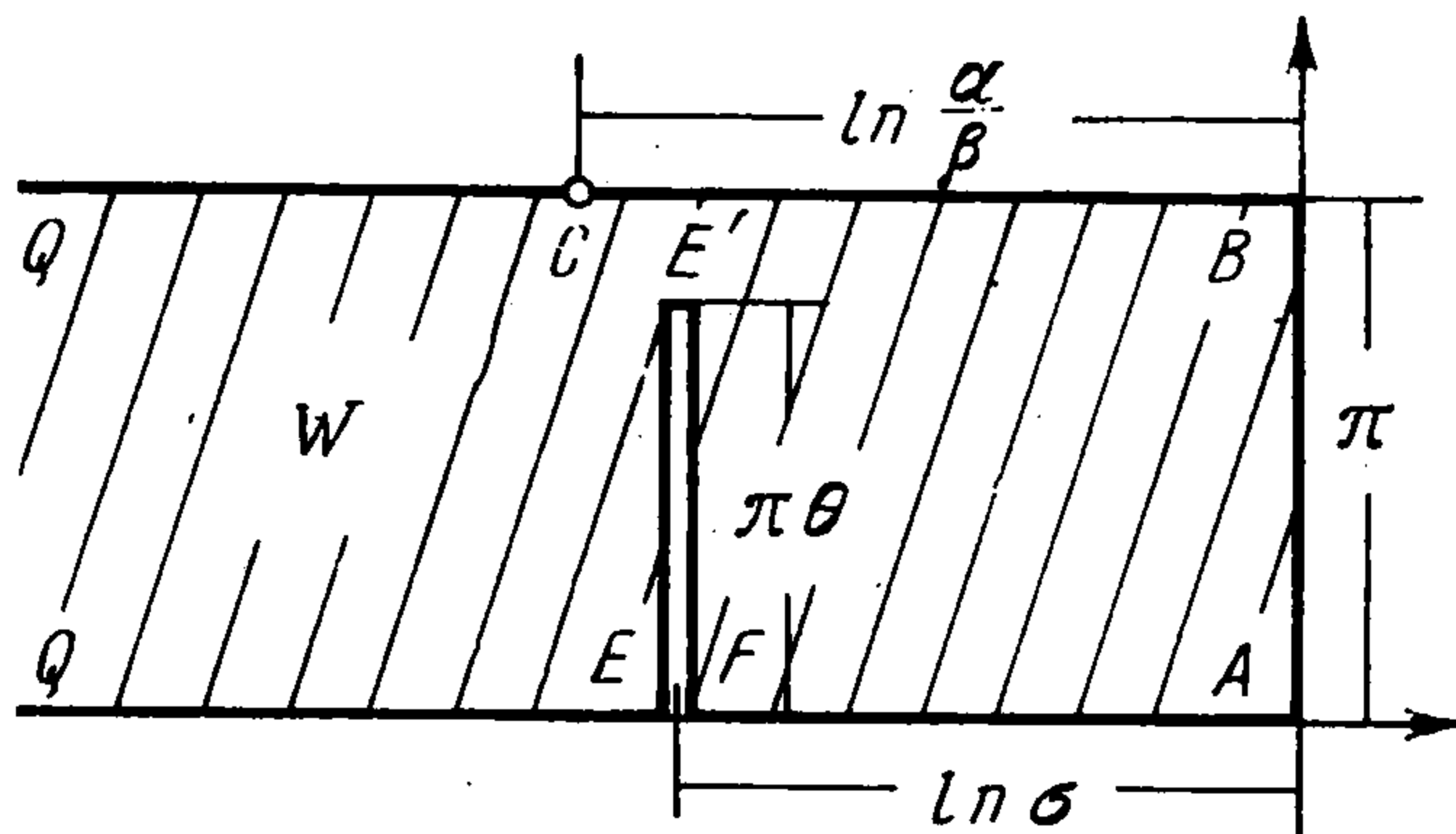
$$\Phi_0 = [(\zeta - f)\zeta(\zeta - 1)]^{-1/2}$$

где c_0 — искомая постоянная и $\zeta = q$ — прообраз бесконечно удаленной точки полуполосы относительно отображения $W = W(\zeta)$.

В плоскости W (фиг. 4) ширина полуполосы и длины отрезков FA и BC заданы. Известно также, что расстояния между точками F, E' и E, E' одинаковы. Поэтому параметры c_0, f, q, e' и σ должны удовлетворять уравнениям (ветвь



Фиг. 3



Фиг. 4

Φ_0 выбирается из условия $\arg \Phi_0 = 0$ при $1 < \zeta = \xi < +\infty$)

$$(2.3) \quad c_0(q - e') \Phi_0(q) = 1, \quad \ln \sigma = c_0 \int_f^q |\Phi| ds$$

$$\ln \frac{\alpha}{\beta} = c_0 \int_1^c |\Phi| ds, \quad \int_{e'}^f |\Phi| ds = \int_{-\infty}^{e'} |\Phi| ds$$

Для исследования этой системы удобно вместо параметров f, q, e' и c ввести новые искомые величины

$$(2.4) \quad \lambda^2 = \frac{-f}{1-f}, \quad \mu^2 = \frac{1-f}{q-f}, \quad \nu = \frac{q-e'}{q-f}, \quad \delta = \frac{1-f}{c-f} \\ (0 < \lambda, \mu < 1; \quad \mu^2 < \delta < 1)$$

Тогда первое уравнение системы (2.3) представится в виде

$$(2.5) \quad c_0 = \frac{1}{\mu\nu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1-\lambda^2} (1-\lambda^2\mu^2)}$$

а последнее после ряда простых преобразований определит зависимость

$$(2.6) \quad \nu = \nu(\lambda, \mu) = (1-\lambda^2\mu^2)K(\lambda') [K(\lambda') - \lambda^2\mu^2\Pi(\lambda^2\mu^2 - \mu - 1, \lambda')], \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$$

Здесь $K(\lambda)$ и $\Pi(\mu, \lambda)$ — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно [4].

Далее, из первых двух уравнений системы (2.3) следует, что

$$\int_f^0 |\Phi_0| ds = (q-e') \left[\int_f^0 |\Phi_0| ds / (q-s) - \ln \sigma / \sqrt{(q-f)q(q-1)} \right]$$

Сделаем замену переменной интегрирования $t = 1 - s/f$ и затем вместо ν подставим (2.6), тогда получим

$$K(\lambda) [K(\lambda') - \lambda^2\mu^2\Pi(\lambda^2\mu^2 - 1, \lambda')] = \\ = (1-\lambda^2\mu^2) K(\lambda') \left[\Pi(-\lambda^2\mu^2, \lambda) - \frac{\mu}{2} \ln \sigma / \sqrt{(1-\mu^2)(1-\lambda^2\mu^2)} \right]$$

Осталось выразить полные эллиптические интегралы Π третьего рода через неполные эллиптические интегралы первого и второго рода, а затем применить соотношение Лежандра [4]. В результате приходим к зависимости

$$(2.7) \quad \mu = \operatorname{sn}(K(\lambda) - K(\lambda') \ln \sigma / \pi), \quad \lambda_0 < \lambda < 1$$

Здесь через sn обозначен эллиптический синус по модулю λ , а λ_0 определяется из уравнения

$$(2.8) \quad \ln \sigma / \pi = K(\lambda_0) / K(\lambda_0'), \quad 0 < \lambda_0 < 1$$

Для определения параметра δ достаточно использовать (2.4), (2.5) и переписать последние из оставшихся уравнений системы (2.3) в следующем виде:

$$(2.9) \quad \ln \frac{\alpha}{\beta} = c_0(\nu-1) \sqrt{1-\lambda^2} \int_{\delta}^1 \frac{s + \mu^2/(\nu-1)}{s-\mu^2} \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-\lambda^2s)}}$$

3. Построение функций $z(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$. Здесь применяется аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений, впервые использованная при решении задач фильтрации в работе [5].

Согласно этой теории, найдутся [6] вещественные значения «аксессуарных» параметров β_0, β_1 и пара V_1, V_2 линейно-независимых решений

уравнения

$$(3.1) \quad V'' + a(\zeta)V' + b(\zeta)V = 0$$

$$a(\zeta) = \frac{-1}{\zeta - e'} + \frac{1/2}{\zeta - f} + \frac{1/2}{\zeta} + \frac{1/2}{\zeta - 1}$$

$$b(\zeta) = (\beta_0 + \beta_1\zeta) [(\zeta - e')(\zeta - f)\zeta(\zeta - 1)]^{-1}$$

с особыми точками $\zeta = e', f, 0, 1$ и ∞ , такие, что

$$(3.2) \quad w(\zeta) = V_1(\zeta) / V_2(\zeta)$$

В силу известного соотношения

$$V_1'V_2 - V_1V_2' = \exp[-\int ad\zeta] \text{const}$$

справедливого для любых двух линейно-независимых решений V_1, V_2 уравнения (3.1), последнее означает, что

$$w'V_2^2 = \text{const} (\zeta - e') [(\zeta - f)\zeta(\zeta - 1)]^{-1/2}$$

Подставляя в левую часть этого равенства выражения (2.1) и (2.2), находим сначала V_2 , а затем из (3.2) получаем V_1 . Далее, из (1.2) и (3.2) следует, что $\Omega / V_1 = Z / V_2 = f(\zeta)$ с некоторой функцией $f(\zeta)$. Последнюю можно найти, если сравнить особенности функций Ω и Z , получающиеся из краевых условий (1.1), с особенностями решений V_1, V_2 . Сравнение показывает, что произведение $f(\zeta) \sqrt{(\zeta - f)\zeta(\zeta - 1)(\zeta - d)}$ регулярно и ограничено во всей замкнутой плоскости ζ . Следовательно, оно тождественно равно постоянной, и Ω и Z найдены.

Теперь можно воспользоваться (1.2) и написать представления для искомых функций $\omega(\zeta)$ и $z(\zeta)$

$$(3.3) \quad \omega = -\rho_0 R + \varphi_1 + c_1 \int_{\infty}^{\zeta} \left[\sigma F - \frac{1}{F} \right] g d\zeta$$

$$z = -iR - i \frac{c_1}{2} \int_{\infty}^{\zeta} \left[\alpha F + \frac{\beta}{F} \right] g d\zeta$$

$$F = \exp \left[\frac{1}{2} W(\zeta) \right], \quad g = \left[\frac{\zeta - q}{(\zeta - f)\zeta(\zeta - 1)(\zeta - d)} \right]^{1/2}$$

Здесь через c_1 обозначена искомая постоянная, функция $W(\zeta)$ определена в п. 2 и ветвь g выбрана из условия $\arg g = 0$, при $\max(d, g) < \zeta = \xi < +\infty$.

Характерными размерами линзы являются (фиг. 1): l , ширина дрены $2h$, ширина линзы $2L$, максимальная высота T кривой депрессии и наибольшее H и наименьшее R расстояния границы раздела от уровня заложения дрен. Для перечисленных величин из (2.3) находятся следующие выражения:

$$(3.4) \quad L = \frac{c_1}{2\sqrt{\sigma}} (\sigma\beta + \alpha) \int_{-\infty}^f \cos[f_4(\xi)] |g(\xi)| d\xi$$

$$T = \frac{c_1}{2} (\alpha - \beta) \int_0^1 \cos[f_2(\xi)] |g(\xi)| d\xi$$

$$\begin{aligned}
 H &= -T + \frac{c_1}{2} \int_f^0 \{ \alpha \exp[-f_3(\xi)] + \beta \exp[f_3(\xi)] \} |g(\xi)| d\xi \\
 R &= H - \frac{c_1}{2\sqrt{\sigma}} (\sigma\beta - \alpha) \int_{-\infty}^f \sin[f_4(\xi)] |g(\xi)| d\xi \\
 l &= L - \frac{c_1}{2} (\alpha + \beta) \int_0^1 \sin[f_2(\xi)] |g(\xi)| d\xi \\
 h &= l + \frac{c_1}{2} \int_1^c \{ \alpha \exp[-f_1(\xi)] - \beta \exp[f_1(\xi)] \} |g(\xi)| d\xi
 \end{aligned}$$

Здесь $g(\zeta)$ берется из (3.3), а функции $f_1(\xi), \dots, f_4(\xi)$, которые определены с помощью (2.2), на отрезках $(1, c)$, $(0, 1)$, $(f, 0)$ и $(-\infty, f)$ соответственно, даются формулами

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad f_1(\xi) &= \frac{c_0}{2} \int_1^\xi |\Phi| ds, & f_2(\xi) &= \frac{c_0}{2} \int_\xi^1 |\Phi| ds \\
 f_3(\xi) &= \frac{c_0}{2} \int_\xi^0 |\Phi| ds, & f_4(\xi) &= \frac{c_0}{2} \int_{-\infty}^\xi \frac{e' - s}{q - s} |\Phi_0| ds
 \end{aligned}$$

В п. 2 было показано, что по заданному значению параметра f однозначно находятся q, e', c и c_0 . Поэтому для определения характерных размеров линзы в (3.4) достаточно задать лишь значения параметров f, d и $c_1 > 0$. (Для постоянной Φ_1 , входящей в краевые условия (1.1), можно получить выражение типа (3.4)).

В этих обозначениях граница раздела EF (фиг. 1), соответствующая вещественной полуоси $\xi < f$ плоскости ζ , принимает вид

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad x = x_2(\xi) &\equiv \frac{c_1}{2\sqrt{\sigma}} (\sigma\beta + \alpha) \int_{-\infty}^\xi \cos[f_4(s)] |g(s)| ds \\
 y = y_2(\xi) &\equiv -R - \frac{c_1}{2\sqrt{\sigma}} (\sigma\beta - \alpha) \int_{-\infty}^\xi \sin[f_4(s)] |g(s)| ds
 \end{aligned}$$

Как следует из (2.2) и (2.3), функция $f_4(\xi)$ монотонно возрастает от нуля до $\pi\theta/2 < \pi/2$ (фиг. 4) при изменении ξ от $-\infty$ до e' , а затем монотонно убывает до нуля, когда ξ приближается к f . В силу (3.6) это означает, что $x_2'(\xi) > 0, y_2'(\xi) < 0$; поэтому граница раздела может быть задана уравнением $y = y_2(x)$, где $y_2(x)$ монотонно убывает от $y_2(0) = -R$ до $y_2(L) = -H$, причем dy_2/dx обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = L$. Кривая депрессии AB (фиг. 1) является образом отрезка $0 < \xi < 1$ вещественной оси плоскости ζ при отображении $z(\zeta)$ и задается выражением

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad x = x_1(\xi) &\equiv l + \frac{c_1}{2} (\alpha + \beta) \int_\xi^1 \sin[f_2(s)] |g(s)| ds \\
 y = y_1(\xi) &\equiv \frac{c_1}{2} (\alpha - \beta) \int_\xi^1 \cos[f_2(s)] |g(s)| ds
 \end{aligned}$$

Из рассмотрений п. 2 следует, что $f_2(\xi)$ монотонно убывает от нуля до $\pi/2$, когда ξ изменяется от нуля до единицы. Последнее влечет $x_1'(\xi) < 0$, $y_1'(\xi) < 0$, поэтому вместо (3.7) можно использовать уравнение $y = y_1(x)$, где $y_1(x)$ монотонно возрастает от $y_1(0) = l$ до $y_1(L) = T$; при этом $y_1'(l) = +\infty$, а $y_1'(L) = 0$.

Теперь можно определить расстояние от дрены до первоначального (горизонтального) зеркала грунтовых вод $y = -H_1$ (фиг. 1). Для этого обозначим через $(x_0, -H_1)$ точку пересечения границы раздела $y = y_2(x)$ с прямой $y = -H_1$. Если S_1 — площадь, заключенная между кривыми $y = y_2(x)$, $y = -H_1$ при $0 < x < x_0$, а S_2 — аналогичная площадь для $x_0 < x < L$, то должно выполняться равенство $S_1 = S_2$. Отсюда следует искомое выражение

$$(3.8) \quad H_1 = - \int_0^L \frac{y_2(x) dx}{L}$$

4. Параметры отображения, предельные случаи. В прямой постановке параметры отображения f , d и c_1 являются искомыми. Для их определения достаточно задать какие-нибудь три характерных размера линзы. В качестве последних здесь выбираются ширина линзы $2L$, ширина дрены $2h$ и расстояние от дрены до невозмущенного уровня грунтовых вод H_1 . Тогда при заданных f и d первое выражение из (3.3) очевидным образом определит величину $c_1 > 0$. Последняя играет роль коэффициента растяжения и может быть исключена, если все размеры линзы относить к половине ее ширины, т. е.

$$l^\circ = \frac{l}{L}, \quad h^\circ = \frac{h}{L}, \quad T^\circ = \frac{T}{L}, \quad R^\circ = \frac{R}{L}, \quad H^\circ = \frac{H}{L}, \quad H_1^\circ = \frac{H_1}{L}$$

В дальнейшем используются параметры (2.4) и d заменяется на

$$\tau^2 = \frac{1-f}{d-f}, \quad 0 < \tau^2 < \delta$$

В результате, выражения (2.4)—(2.9), (3.4), (3.8) и (3.6) приводят к системе уравнений $H_1^\circ = H_1^\circ(\lambda, \tau)$, $h^\circ = h^\circ(\lambda, \tau)$, из которой предстоит определить λ и τ .

Трудность аналитического исследования этой системы связана не только со сложностью зависимостей $H_1^\circ(\lambda, \tau)$, $h^\circ(\lambda, \tau)$, но и с необходимостью рассматривать ограничения, определяющие в плоскости переменных H_1° , h° область применимости принятой схемы течения. Первое из этих ограничений является следствием симметрии движения относительно оси y и выражается неравенством $l > 0$. Второе требует, чтобы максимальная высота T кривой депрессии не превосходила расстояния от поверхности земли до плоскости заложения дрен. Третье ограничение менее очевидно, и о нем будет сказано ниже.

Параметры отображения λ и τ в дальнейшем определялись численно. Для этого задавались ϵ_0 , ρ_0 и из (2.8) находился параметр λ_0 . Затем фиксировалось λ из интервала $(\lambda_0, 1)$ и с помощью (2.5) — (2.7) и (2.9) вычислялись μ , ν , c_0 и δ соответственно. Последние подставлялись в (3.4) и

(3.8), выбиралось разбиение интервала $(0, \delta, (\lambda))$ и для каждого значения τ^2 из этого разбиения вычислялись характерные размеры линзы. Подобная процедура проводилась при разных значениях λ . Расчеты показали, что величина $H_1^\circ(\lambda, \tau)$ с ростом τ монотонно возрастает. Это позволило определить обратную функцию $\tau = \tau(\lambda, H_1^\circ)$ и исследовать зависимость $h^\circ(\lambda; H_1^\circ) = h^\circ(\lambda, \tau(\lambda, H_1^\circ))$. Последняя оказалась монотонно возрастающей по λ и дала возможность по заданным h° и H_1° определить λ .

Характер изменения размеров линзы в зависимости от ширины дрены иллюстрируется следующим примером. Пусть $\rho_0 = 0.01$, $\varepsilon_0 = 0.1$, $H_1^\circ = 1$ и h° пробегает последовательно значения 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. В результате вычислений было получено: $T_0 = 0.0427, 0.0312, 0.0204, 0.0101$; $R^\circ = 0.7034, 0.8737, 0.9497, 0.9868$; $H^\circ = 1.1408, 1.0912, 1.0522, 1.0134$ и $l^\circ = 0.5969, 0.6946, 0.7995, 0.8997$ соответственно. Видно, что с ростом h° параметр T° уменьшается, а R° сближается с H° и приближается к H_1° (аналогичное поведение наблюдается и при других значениях параметров ρ_0, ε_0 и H_1°). Аналитическое исследование случая $\lambda \rightarrow 1$ показало, что при этом $\mu \rightarrow 1, \nu \rightarrow 2, \delta \rightarrow 1, h^\circ \rightarrow 1, T^\circ \rightarrow 0$, а граница раздела переходит в прямую $y = y_2(x) = -H_1 = -LK(\tau)/K(\tau')$. Таким образом, этот предел характеризуется смыканием соседних дрен, что приводит к исчезновению бугра грунтовых вод. Лежащая ниже часть линзы теперь полностью изолируется от инфильтрации, движение внутри нее прекращается, а линия раздела выполаживается и возвращается к своему первоначальному положению.

Значению $h^\circ = 0.6$ в приведенном выше примере соответствует значение λ , близкое к λ_0 из (2.8).

Для случая $\lambda \rightarrow \lambda_0$ можно показать, что при этом $\mu \rightarrow 0, \nu \rightarrow 1, \delta$ стремится к вполне определенному значению $\delta(\lambda_0)$ и в плоскости W (фиг. 4) длина разреза $EE'F$ стремится к π . В пределе точка перегиба E' (фиг. 1) сливается с точкой E , которая становится точкой заострения, а в плоскости годографа «выпадает» полукруг $|\bar{w} - \rho_0/2| < \rho_0/2$. При этом h° стремится к некоторому значению h_1° , являющемуся минимально допустимым для рассматриваемой схемы течения; в этом заключается третье ограничение, о котором упоминалось ранее. С физической точки зрения величину h_1° можно рассматривать как критическую ширину дрены при заданных ρ_0, ε_0 и H_1° : если $h^\circ < h_1^\circ$, то дрена не будет справляться с отводом инфильтрационных вод. Случай $h^\circ = h_1^\circ$ соответствует наиболее напряженному во всем диапазоне $h_1^\circ < h^\circ < 1$ режиму фильтрации: фильтрационный расход $Q = \varepsilon_0(1 - l^\circ)kL$ здесь максимален, а ширина дрены минимальна. Расчеты показывают, что h_1° убывает с ростом H_1° ; например, при $\rho_0 = 0.01, \varepsilon_0 = 0.1$ и $H_1^\circ = 1.4$ критическая ширина h_1° , уже близка к 0.39.

Можно показать, что при $\lambda = \lambda_0$ и $\tau \rightarrow 0$ точка заострения E выходит на дрину: $R^\circ \rightarrow 0$. При этом уравнения границы раздела и кривой депрессии соответственно принимают вид

$$y = -H \sqrt{1 - (1 - x/L)^2}, \quad 0 < x < L$$

$$y = T \sqrt{1 - (1 - x/L)^2 / (1 - l/L)^2}, \quad l < x < L$$

Этот предельный случай был рассмотрен ранее в работе [7].

Из результатов вычислений вытекает еще одно характерное свойство, связанное с величиной разности $h^\circ - l^\circ$: при фиксированных ρ_0, H_1° и h°

она растет с ростом ε_0 . Так, например, при $\rho_0 = 0.01$, $H_1^\circ = 1$ и $h^\circ = 0.8$ значениям $\varepsilon_0 = 0.1, 0.5, 0.7$ соответствуют значения $h^\circ - l^\circ = 0.0005, 0.0318, 0.081$. Подобное поведение совершенно естественно с физической точки зрения.

Укажем еще на один предельный случай рассматриваемой задачи: $\rho_0 \rightarrow \infty$. Из (2.1), (3.4) и (3.7) следует, что при этом $R^\circ - H^\circ \rightarrow 0$ и граница раздела переходит в прямую $y = y_2(x) = -H$, т. е. заменяется непроницаемым основанием.

В заключение автор благодарит Н. Н. Веригина за постановку задачи и В. Н. Эмиха за полезные замечания, сделанные им в процессе решения.

Поступила 22 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Левин Я. К. Использование фильтрационных вод в зоне оросительных каналов для водоснабжения. Гидротехника и мелиорация, 1962, вып. 1.
3. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Гостехиздат, 1953.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье), М., «Наука», 1967.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения воды. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1938, № 3.
6. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений, М., Изд-во иностр. лит., 1963.
7. Полубаринова-Кочина П. Я. О линзе пресной воды над соленой водой. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.