

**О НЕСТАЦИОНАРНОМ МАССООБМЕНЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ
СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

А. Б. Гольдберг, Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Исследуется процесс установления стационарного режима массообмена движущейся реагирующей частицы. Получено справедливое при больших временах аналитическое выражение для нестационарного распределения концентраций вещества в установившемся потоке вязкой жидкости, обтекающей сферическую частицу, в случае, когда в некоторый момент времени на поверхности сферы начинается химическая реакция первого порядка. Задача решена при малых конечных числах Рейнольдса и Пекле. Решение соответствующей стационарной задачи получено ранее [1].

В работе [2] рассматривался нестационарный теплообмен жидкой сферической капли в невязком потоке при скачкообразном изменении начальной температуры потока для больших чисел Пекле. В работе [3] содержится анализ задачи о нестационарном теплообмене твердой сферической частицы для малых чисел Рейнольдса и Пекле при скачкообразном изменении температуры поверхности частицы. Полученные в [3] результаты могут быть использованы для описания массообмена движущейся реагирующей частицы лишь в случае диффузионного режима протекания химической реакции.

1. Постановка задачи. Рассматривается процесс диффузии к непроницаемой сферической частице радиуса a , обтекаемой стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Скорость набегающего потока и концентрация диффундирующего вещества на большом расстоянии от частицы постоянны и равны U, c_0 . Предполагается, что на поверхности частицы в начальный момент времени начинается химическая реакция первого порядка (например, в результате разогрева частицы до некоторой критической температуры). Выбрав сферическую систему координат $r\theta$, в которой координата r отсчитывается от центра частицы, а угол θ от направления скорости потока на бесконечности, представим уравнения и граничные условия для концентрации в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{1}{P} \Delta \xi, \quad P = \frac{Ua}{D}$$

$$r = \frac{r'}{a}, \quad \xi = \frac{c_0 - c}{c_0}, \quad r = \frac{r'}{a}, \quad \tau = \frac{U}{a} t$$

$$(1.2) \quad \tau = 0, \quad r \geq 1, \quad \xi = 0$$

$$(1.3) \quad \tau > 0, \quad r = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = k(\xi - 1), \quad k = k_* a / D$$

$$(1.4) \quad r \rightarrow \infty, \quad \xi \rightarrow 0$$

Здесь v_r, v_θ — компоненты скорости, D — коэффициент диффузии, k_* — скорость химической реакции, штрихом обозначены размерные величины.

Заметим, что соотношения (1.1) — (1.4) описывают также процесс теплопередачи и при $k = \infty$ соответствуют режиму, при котором температура поверхности поддерживается постоянной. В задаче о теплообмене следует положить

$$\xi = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad P = \frac{Ua}{\chi}$$

(T_0 — температура набегающего потока, T_1 — температура поверхности, χ — коэффициент температуропроводности среды).

Задача решается для малых конечных чисел Пекле и Рейнольдса. Распределение скорости в потоке принимается заданным выражениями, полученными в [4]. Вводя число Шмидта $S = P / R$, запишем формулы [4] для функции тока в виде:

для внутренней области

$$\psi = \psi_* = \frac{1}{4} (r - 1)^2 (1 - \mu^2) \left[\left(1 + \frac{3}{8S} P + \frac{9}{40S^2} P^2 \ln P \right) \left(2 + \frac{1}{r} \right) - \frac{3}{8S} P \left(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \mu \right]$$

для внешней области

$$\psi = \frac{\psi^*}{P^2}, \quad \psi^* = \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \mu^2) - \frac{3}{2} SP (1 + \mu) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(-\frac{\rho}{S} \frac{1 - \mu}{2} \right) \right] \quad \mu = \cos \theta, \quad \rho = rP$$

Неучтенные слагаемые имеют порядок P^2 . Число Шмидта предполагается большим или равным $O(1)$ (случай $S \ll 1$ практически мало интересен) и считается постоянным в процессе решения задачи.

2. Метод решения. Введем преобразование Лапласа от искомой концентрации

$$\zeta = \int_0^\infty e^{-Ps\tau} \xi(r, \mu, \tau) d\tau$$

Так как ξ ограничена при $\tau \rightarrow \infty$, то ζ аналитична при $\operatorname{Re} s > 0$.

Уравнение для ζ , полученное из (1.1) с учетом (1.2), для внутренней области имеет вид

$$(2.1) \quad \zeta = \zeta_*, \quad P_s^2 \zeta_* + \frac{P}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_*}{\partial r} \frac{\partial \zeta_*}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi_*}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta_*}{\partial r} \right) = \Delta \zeta_*$$

Для внешней области

$$(2.2) \quad \zeta = \zeta^*, \quad s \zeta^* + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \rho} \frac{\partial \zeta^*}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta^*}{\partial \rho} \right) = \Delta^* \zeta^*$$

Здесь Δ^* — оператор Лапласа в переменных ρ, μ .

Граничные условия (1.3), (1.4) дают

$$(2.3) \quad r = 1, \quad \frac{\partial \zeta_*}{\partial r} = k \zeta_* - \frac{k}{sP}$$

$$(2.4) \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \zeta^* \rightarrow 0$$

Задача решается методом сращиваемых асимптотических разложений по числу Пекле. Основные особенности метода рассмотрены в работе [4]. Ищем ζ в виде

$$(2.5) \quad \zeta_* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(P) \zeta_n(r, \mu) \text{ во внутренней области}$$

$$(2.6) \quad \zeta^* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{(n)}(P) \zeta^{(n)}(\rho, \mu) \text{ во внешней области}$$

При этом требуется, чтобы

$$\frac{\alpha_{n+1}(P)}{\alpha_n(P)} \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha^{(n+1)}(P)}{\alpha^{(n)}(P)} \rightarrow 0, \quad P \rightarrow 0$$

3. Построение решения. Нулевые приближения. Нулевое приближение внешнего разложения имеет вид $\zeta^{(0)}(\rho, \mu) = 0$. Для внутреннего разложения получаем уравнение Лапласа $\Delta \zeta_0 = 0$, при этом следует положить $\alpha_0(P) = 1/P$. При таком выборе α_0 решение $\alpha_0 \zeta_0$, удовлетворяющее условию (2.3), является лапласовским образом нулевого приближения, приведенного в работе [1]

$$(3.1) \quad \zeta_0 = \frac{q}{sr}, \quad q = \frac{k}{k+1}$$

Первые приближения. Из (3.1) следует, что $\alpha^{(1)}(P) = 1$. Уравнение для $\zeta^{(1)}(\rho, \mu)$ имеет вид

$$(3.2) \quad (\Lambda - s) \zeta^{(1)} = 0, \quad \Lambda = \Delta^* - \mu \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1-\mu^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mu}$$

Решение уравнения (3.2), затухающее на бесконечности

$$\zeta^{(1)} = \exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right) \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{1+4s}\right) P_n(\mu)$$

Здесь $K_{n+1/2}(x)$ — функция Макдональда, $P_n(\mu)$ — полином Лежандра, всюду берется та ветвь функции $\sqrt{1+4s}$, которая на действительной полуоси $0 \leq s < \infty$ дает арифметическое значение корня. Коэффициенты A_n определяются из условий сращивания с (3.1). В результате имеем

$$(3.3) \quad \zeta^{(1)} = \frac{q}{sr} \exp\left[\frac{\rho}{2}(\mu - \sqrt{1+4s})\right]$$

Отсюда следует, что $\alpha_1(P) = 1$, и уравнение для ζ_1 имеет вид

$$\Delta \zeta_1 = -\frac{q}{sr^2} \left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right) \mu$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию, вытекающему из (2.3), и условию сращивания с (3.3)

$$(3.4) \quad \zeta_1 = \frac{q \sqrt{1+4s}}{2s} \left(\frac{q}{r} - 1\right) + \frac{q}{s} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{3(3-2q)}{8(2-q)} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{8r^3}\right] \mu$$

Вторые приближения. Во втором приближении $\alpha^{(2)}(P) = P$. Имеем уравнение

$$(3.5) \quad (\Lambda - s) \zeta^{(2)} = \exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right) L(\rho, \mu)$$

$$L(\rho, \mu) = \frac{3}{4} \frac{qS}{s\rho^3} \left(\frac{\sqrt{1+4s}-1}{2S} \rho + \sqrt{1+4s} + \frac{1}{S} + \frac{2}{\rho} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1+4s}-1}{2S} \mu - \frac{S-1}{S} \mu \right) \exp\left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\mu-1}{S} - \sqrt{1+4s} \right)\right] - \\ - \frac{3}{4} \frac{qS}{s\rho^3} \left(\sqrt{1+4s} + \frac{2}{\rho} - \mu \right) \exp\left(-\frac{\rho}{2} \sqrt{1+4s}\right)$$

Решение, затухающее на бесконечности

$$(3.6) \quad \zeta^{(2)}(\rho, \mu) = q\rho^{-1/2} \exp\left(\frac{\rho\mu}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(\rho) P_n(\mu)$$

$$\eta_n = K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{1+4s}\right) \int_{\rho}^{C_n} I_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{1+4s}\right) L_n(\rho) d\rho - \\ - I_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{1+4s}\right) \int_{\rho}^{\infty} K_{n+1/2}\left(\frac{\rho}{2} \sqrt{1+4s}\right) L_n(\rho) d\rho$$

Здесь функции $L_n(\rho)$ представляют собой коэффициенты разложения $q^{-1}\rho^{3/2}L(\rho)$ в ряд по полиномам Лежандра.

После громоздких вычислений получим в результате срачивания $\zeta^{*(2)}(\rho, \mu)$ с $\zeta_{*1}(r, \mu)$.

$$(3.7) \quad \zeta^{(2)}(\rho, \mu) = \frac{q}{2s\rho} \left(q \sqrt{1+4s} - \frac{3}{2} \mu \right) - \frac{q}{2s} \ln \rho + \frac{q}{s} Z(s, q, S) + \\ + \frac{q}{4s} \left(q \sqrt{1+4s} + \frac{3}{4S} \right) \mu - \frac{5q}{24s} \left(1 + \frac{3}{10S} \right) \frac{3\mu^2-1}{2} + O(\rho \ln \rho)$$

$$Z(s, q, S) = -\frac{1+4s}{4} S^2 + \frac{\sqrt{1+4s}}{8} S + \frac{25}{24} - \frac{1+4s}{4} q - \frac{\gamma}{2} - \\ - \frac{1}{4} \ln(1+4s) + \frac{1}{4} (S \sqrt{1+4s} + 1)^2 (S \sqrt{1+4s} - 2) \times \\ \times \ln\left(1 + \frac{1}{S \sqrt{1+4s}}\right)$$

Для второго приближения внутреннего разложения, как видно из (3.7), $\alpha_2(P) = P \ln P$. Для ζ_2 имеем уравнение Лапласа, решение которого, удовлетворяющее условию (2.3) и условию срачивания с (3.7)

$$(3.8) \quad \zeta_2 = \frac{q}{2s} \left(\frac{q}{r} - 1 \right)$$

Третьи приближения. В связи с появлением логарифмической особенности во втором приближении внешнего разложения третье приближение внутреннего разложения также определяется срачиванием с $\zeta^{(2)}$. Имеем $\alpha_3(P) = P$, и для ζ_3 получим после всех вычислений

$$(3.9) \quad \zeta_3 = \frac{q}{s} \sum_{n=0}^{\infty} [\xi_{3,n}(r) + a_n r^n + b_n r^{-n-1}] P_n(\mu) + \\ + q \frac{r}{2} + q^2 \frac{\sqrt{1+4s}-1}{4s} \left(1 - \frac{3}{2r} - \frac{1}{4r^3} \right) \mu$$

$$a_0 = Z(s, q, S), \quad a_1 = -\frac{\sqrt{1+4s}}{4}, \quad a_n = 0, \quad n \geq 2$$

$$b_0 = -qZ(s, q, S) - \frac{239}{960} - \frac{79}{240} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{32} \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{k-1}{k+1} \frac{s}{2}$$

$$b_1 = \left[\frac{7}{16} - \frac{3}{4} \frac{1}{k+2} - \frac{3}{8} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] \sqrt{1+4s} + \frac{9}{64S} \left(1 + \frac{1}{k+2} \right)$$

$$b_2 = \frac{235}{1344} - \frac{1}{64S} \left(1 + \frac{13}{5} \frac{1}{k+3} \right) + \frac{3}{14} \frac{1}{k+3} + \frac{3}{16} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$b_n = 0, \quad n \geq 3$$

Наконец, получим третье приближение внешнего разложения. Из (3.8) и (3.9) следует, что $\alpha^{(3)}(P) = P^2 \ln P$, поэтому уравнение для $\zeta^{(3)}$ совпадает с (3.2). После срачивания получим

$$(3.10) \quad \zeta^{(3)} = \frac{q^2}{2sP} \exp \left[\frac{P}{2} (\mu - \sqrt{1+4s}) \right]$$

4. Поле концентрации. Поток вещества на поверхность частицы. Для определения поля концентрации вблизи частицы найдем оригинал функции

$$\zeta_* = \frac{1}{P} \zeta_0 + \zeta_1 + P \ln P \zeta_2 + P \zeta_3$$

используя результаты, полученные в п. 3. Следуя обычному методу, для области $\tau \sim 1$ и $\tau \gg 1$ получим поле концентрации в виде

$$(4.1) \quad \xi_*(r, \mu, \tau) = P^2 q \left[\Delta_0(r) + \Delta_1(r) \mu + \Delta_2(r) \frac{3\mu^2 - 1}{2} + \Delta(r, \mu) g(\tau) - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{r} - 1 \right) G(\tau) \right]$$

Здесь

$$G(\tau) = \frac{1}{2} \text{Ei} \left(-\frac{1}{4} P \tau \right) - f(\tau) - \frac{3}{2} S \int_0^\tau f'(\tau - x) g(x) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} S^3 \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau f'(\tau - x) \left[\frac{4}{P} g(x) + \int_0^x g(y) dy \right] dx$$

$$\Delta_0(r) = \frac{r}{6} - \frac{\ln r}{2} + \left[\frac{25}{24} - \frac{q}{4} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\ln P}{2} - \frac{S^2}{4} -$$

$$- \frac{1}{2} \ln(1 + S^{-1}) \right] \left(1 - \frac{q}{r} \right) + \left\{ \frac{24}{P^2} + \frac{1}{2-q} \left[\frac{15q-27}{k+1} +$$

$$+ \frac{q(314q-553)}{40} \right\} \frac{1}{r} + \frac{23-16q}{4(2-q)} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r^3} - \frac{3(3-2q)}{8(2-q)} \frac{1}{r^4} + \frac{1}{10r^5}$$

$$\Delta_1(r) = \frac{1}{2P} + \frac{3}{16S} - \left(\frac{3}{4P} + \frac{9}{32S} \right) \frac{1}{r} +$$

$$+ \frac{3-2q}{2-q} \left(\frac{3}{8P} + \frac{9}{64S} \right) \frac{1}{r^2} - \left(\frac{1}{8P} + \frac{3}{64S} \right) \frac{1}{r^3}$$

$$\Delta_2(r) = \frac{1}{12} \left\{ r - \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4S} \right) + \left[\frac{36 - 21q}{4(2-q)} + \frac{9}{8S} \right] \frac{1}{r} - \right. \\ \left. - \left[\frac{175 - 110q}{16(2-q)} + \frac{9}{16S} \right] \frac{1}{r^2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{20S} \right) \frac{\ln r}{r^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{k+3} \left[\frac{73 + 79k}{56} - \frac{84 + 15k}{80S} + \frac{278 - 184q + k(49 - 38q)}{16(2-q)} \right] \frac{1}{r^3} - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \left(\frac{3-2q}{2-q} - \frac{1}{S} \right) \frac{1}{r^4} + \frac{5}{56r^5} \right\}$$

$$\Delta(r, \mu) = \left(\frac{S}{8} - \frac{1}{2P} \right) \left(1 - \frac{q}{r} \right) + \left[-\frac{r}{4} + \frac{q}{4} - \frac{3q}{8r} + \right. \\ \left. + \frac{4(k-1) + 3q(k+3)}{16(k+2)} \frac{1}{r^2} - \frac{q}{16r^3} \right] \mu$$

$$g(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi P \tau}} \exp\left(-\frac{P}{4} \tau\right) + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{P \tau}}{2}$$

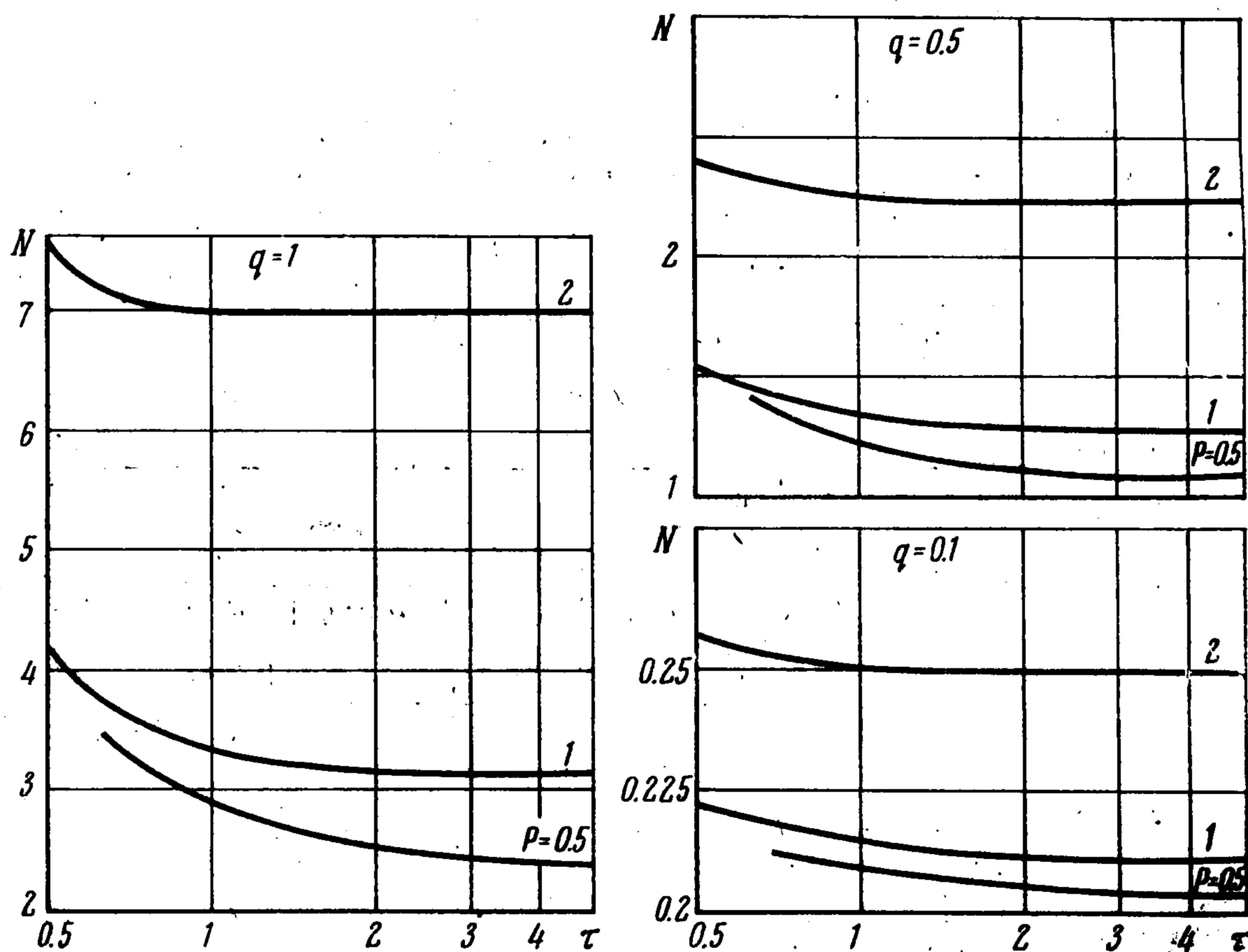
$$f(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{P}{4} \tau\right) + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{P}{4} \tau x\right) \operatorname{arctg}(S \sqrt{x-1}) dx$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du, \quad \operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du$$

Вычисление полного потока вещества на поверхность частицы при помощи (4.1) дает следующую зависимость для числа Нуссельта:

$$(4.2) \quad N(\tau) = 2q + Pq^2 g(\tau) + q^2 P^2 \ln P + q^2 P^2 \left[\frac{q}{2} - \frac{25}{12} + \tau - \right. \\ \left. - \frac{286q - 527}{480(2-q)} + \ln(1 + S^{-1}) - \frac{S}{4} g(\tau) - G(\tau) \right]$$

Таким образом, переход к стационарному режиму описывается сложной функцией времени. В пределе при $\tau \rightarrow \infty$ формулы (4.1) и (4.2) дают



результаты, полученные в работе [1] для стационарного режима. В частном случае бесконечно большой скорости реакции ($q = 1$) они переходят в зависимости, полученные в работе [3].

На фигуре представлены графики функции $N(\tau)$ при разных значениях числа Пекле и разных скоростях реакции.

Видно, что скорость приближения к стационарному режиму растет приблизительно обратно пропорционально числу Пекле. Процесс массообмена практически выходит на стационарный режим при $\tau > 2/P$, т. е. $t > 2D/U^2$, что дает оценку пределов применимости результатов работы [1].

Поступила 19 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О массо- и теплообмене сферической частицы в ламинарном потоке вязкой жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. Чао Б. Т. Нестационарный тепло- и массообмен при поступательном движении капли. Теплопередача. Тр. америк. об-ва инж.-механ., 1969, № 2, стр. 77—86.
3. Choudhury P. N., Drake D. G. Unsteady heat transfer from a sphere in a low Reynolds number flow. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1971, vol. 24, pt. 1, p. 23—36.
4. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansion at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, p. 3, p. 237—269.