

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СЛОЯ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

С. П. Левицкий, А. Т. Листров

(Воронеж)

В рамках линейной механики жидкокристаллических сред [1] исследуется распространение волн в слое нематического жидкого кристалла (НЖК) на наклонной плоскости в магнитном поле для трех случаев ориентации оси анизотропии — ортогонально наклонной плоскости, параллельно наклонной плоскости и ортогонально плоскости течения. Такие ориентации оси анизотропии реализуются на практике при специальной обработке твердой поверхности [2]. Получены точные решения уравнений движения, описывающие стационарное течение слоя, и изучено поведение малых плоских возмущений. Показано, что в слое нематической мезофазы возможно распространение двух видов плоских волн — поверхностных и ориентационных. Для длинных поверхностных волн найдены формулы для критического числа Рейнольдса. Для волн ориентационного типа в двух случаях получен достаточный критерий устойчивости течения слоя. Исследовано влияние магнитного поля и реологических параметров НЖК на характер распространения волн первого и второго типа.

Из работ, посвященных распространению волн в НЖК, отметим [3], в которой рассмотрены продольные, сдвиговые и вращательные волны в жидкокристаллическом пространстве и найдены соответствующие дисперсионные соотношения.

**1. Уравнения движения НЖК.** Запишем в безразмерной форме уравнения движения несжимаемой нематической мезофазы для случая малых углов разворота осей нематического порядка [1]

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad \frac{d^2 L_2}{dt^2} &= -E_1 M_1 - \frac{E_1 B_5}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial L_1}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_1} \right) + \frac{E_1 B_1}{R^2} \Delta L_2 + \frac{E_1 B_4}{R^2} \frac{\partial^2 L_2}{\partial x_3^2} + \\
 &+ \frac{E_1}{2R} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{dL_2}{dt} \right) - \frac{E_1}{2R} (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{dL_2}{dt} \right) \\
 \frac{d^2 L_1}{dt^2} &= E_1 M_2 + \frac{E_1 B_5}{R^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial L_1}{\partial x_2} - \frac{\partial L_2}{\partial x_1} \right) + \frac{E_1 B_1}{R^2} \Delta L_1 + \frac{E_1 B_4}{R^2} \frac{\partial^2 L_1}{\partial x_3^2} + \\
 &+ \frac{E_1}{2R} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{dL_1}{dt} \right) - \frac{E_1}{2R} (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{dL_1}{dt} \right) \\
 \frac{d\omega}{dt} &= E_2 M_3 + \frac{E_2 \delta_9}{R} \Delta \omega + \frac{E_2 \delta_{10}}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_3^2} + \frac{E_2 \delta_5}{R} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - 2\omega \right) \\
 \frac{dv_1}{dt} &= F_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{R} \Delta v_1 + \frac{\delta_5}{R} \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \delta_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + (\delta_6 - \delta_7) \times \right. \\
 &\times \left. \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \frac{dL_1}{dt} \right] \\
 \frac{dv_2}{dt} &= F_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{R} \Delta v_2 - \frac{\delta_5}{R} \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \\
 &+ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \delta_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + (\delta_6 - \delta_7) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{1}{2} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \frac{dL_2}{dt} \right] \\
 \frac{dv_3}{dt} &= F_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\delta_2}{R} \Delta v_3 + \frac{\delta_8 - \delta_6}{R} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2R} (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \times \\
 &\times \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{dL_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{dL_2}{dt} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_j &= \eta_j / \eta_1, & E_1 &= h^2 J_{\perp}^{-1}, & E_2 &= h^2 J_{\parallel}^{-1} \\ R &= \rho v_a h \eta_1^{-1}, & B_1 &= \rho d_{1212} \eta_1^{-2}, & B_2 &= \rho d_{1221} \eta_1^{-2} \\ B_3 &= \rho d_{1122} \eta_1^{-2}, & B_4 &= \rho d_{1313} \eta_1^{-2}, & B_5 &= B_2 + B_3 \\ M_i &= m_i v_a^{-2}, & F_i &= f_i h v_a^{-2}, & \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ i &= 1, 2, 3; & j &= 2, 3, \dots, 10 \end{aligned}$$

Здесь  $x_1, x_2, x_3$  и  $t$  — безразмерные декартовы координаты и время;  $v_i$  и  $p$  — компоненты вектора скорости и давление, отнесенные соответственно к величинам  $v_a$  и  $\rho v_a^2$ ;  $L_i$  — компоненты орта оси анизотропии;  $\omega$  — средняя скорость вращения молекул вокруг своих центральных осей, параллельных  $L$ , отнесенная к  $v_a h^{-1}$ ;  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{10}$  — коэффициенты вязкости;  $J_{\perp}$  и  $J_{\parallel}$  — константы, характеризующие локальный момент инерции среды;  $d_{1212}, d_{1221}, d_{1122}, d_{1313}$  — модули упругости;  $\rho$  — плотность;  $v_a$  — характерная скорость;  $h$  — характерный размер;  $f_i$  и  $m_i$  — компоненты вектора объемной силы и объемного момента соответственно.

Уравнения линейной механики НЖК, приведенные выше, записаны в системе координат, ось  $x_3$  которой направлена вдоль оси  $L$  в недеформированном состоянии [1]. Поэтому во всех рассмотренных ниже случаях однородное магнитное поле напряженностью  $H$ , поддерживающее ориентацию оси  $L$ , считается направленным вдоль оси  $x_3$ .

**2. Ось анизотропии ортогональна наклонной плоскости.** Рассмотрим слой нематической мезофазы толщиной  $h$ , стекающий по наклонной плоскости под действием сил тяжести. Примем, что вблизи твердой поверхности длинные оси молекул НЖК ориентированы по нормали к ней. Введем правую декартову систему координат  $x_1, x_2, x_3$  с началом на поверхности слоя. Ось  $x_2$  направим по линии наибольшего ската, ось  $x_3$  — внутрь жидкости. Тогда уравнения движения (1.1) допускают следующее точное решение, описывающее стационарное течение слоя:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} v_2^{\circ} &= {}^{3/2} (1 - x_3^2), & p^{\circ} &= 3\delta_3 R^{-1} x_3 \operatorname{ctg} \gamma + p_a (\rho v_a^2)^{-1} \\ L_2^{\circ} &= {}^{3/2} \kappa^{-1} R (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) [(m \operatorname{ch} m)^{-1} (m - \operatorname{sh} m) \operatorname{ch} m x_3 + \\ &+ m^{-1} \operatorname{sh} m x_3 - x_3] \\ \omega^{\circ} &= 0, & \kappa &= \Delta \chi \eta_1^{-2} H^2 \rho h^2, & \Delta \chi &= \chi_{\parallel} - \chi_{\perp} \\ m &= h H (\Delta \chi d_{1313}^{-1})^{1/2}, & v_a &= {}^{1/3} \rho g \eta_3^{-1} h^2 \sin \gamma \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma$  — угол наклона плоскости к горизонту,  $p_a$  — атмосферное давление,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\Delta \chi$  — анизотропия магнитной восприимчивости. Решение (2.1) найдено при граничных условиях прилипания на твердой плоскости и отсутствия моментных и касательных напряжений на свободной поверхности.

Исследуем устойчивость стационарного течения относительно малых периодических возмущений.

Отметим, что в рассматриваемом случае ориентации оси анизотропии справедлива теорема Сквайра [4]. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно записать линеаризованные обычным образом [5] уравнения движения и граничные условия для слоя НЖК в системе координат, полученной из исходной поворотом вокруг оси  $x_3$  таким образом, чтобы ось  $x_2'$  новой системы была ортогональна фронту распространения трехмерной

волны. При этом оказывается, что уравнения, управляющие устойчивостью, соответствуют плоскому течению слоя с профилем скорости  $v_2^\circ \cos \beta$ , где  $\beta$  — угол между осями  $x_2$  и  $x_2'$ . Поэтому при исследовании устойчивости можно ограничиться рассмотрением плоских возмущений.

Обозначим через  $\omega'$ ,  $L_1'$ ,  $L_2'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  возмущения соответственно собственной угловой скорости вращения молекул и проекций орта оси анизотропии и вектора скорости на координатные оси  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ . Нетрудно убедиться в том, что в случае плоских возмущений линеаризованные уравнения движения и граничные условия формально разделяются на две независимые группы, определяющие поведение возмущений  $v'$ ,  $w'$ ,  $L_2'$  и  $u'$ ,  $L_1'$ ,  $\omega'$  соответственно. С физической точки зрения это означает, что в слое нематической мезофазы возможно распространение двух видов плоских волн, не связанных между собой. Положим

$$(2.2) \quad \begin{aligned} v' &= \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad w' = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \psi = \varphi(x_3) e^{i\alpha(x_2 - c_1 t)} \\ L_2' &= L_2^*(x_3) e^{i\alpha(x_2 - c_1 t)}, \quad L_1' = L_1^*(x_3) e^{i\alpha(x_2 - c_2 t)} \\ u' &= u^*(x_3) e^{i\alpha(x_2 - c_2 t)}, \quad \omega' = \omega^*(x_3) e^{i\alpha(x_2 - c_2 t)} \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi$ ,  $L_2^*$ ,  $L_1^*$ ,  $u^*$ ,  $\omega^*$  — комплексные амплитуды возмущений,  $\psi$  — функция тока,  $\alpha$  — безразмерное волновое число,  $c_1$  и  $c_2$  — комплексные скорости распространения волн первого и второго вида. Тогда будем иметь следующие две краевые задачи для комплексных волновых амплитуд:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{d^4 \varphi}{dx_3^4} - \delta_3^{-1} (1 - 2\delta_6 + \delta_7 + \delta_8) \alpha^2 \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} + \delta_2 \delta_3^{-1} \alpha^4 \varphi = \\ = i\alpha \delta_3^{-1} R \left[ (v_2^\circ - c_1) \left( \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} - \alpha^2 \varphi \right) - \varphi \frac{d^2 v_2^\circ}{dx_3^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} i\alpha \delta_3^{-1} \left\{ (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \left[ \frac{d^2 L_2^*}{dx_3^2} (v_2^\circ - c_1) + 2 \frac{dL_2^*}{dx_3} \frac{dv_2^\circ}{dx_3} + \right. \right. \\ \left. \left. + L_2^* \frac{d^2 v_2^\circ}{dx_3^2} - \left( \varphi \frac{d^3 L_2^\circ}{dx_3^3} + 2 \frac{d\varphi}{dx_3} \frac{d^2 L_2^\circ}{dx_3^2} + \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} \frac{dL_2^\circ}{dx_3} \right) \right] + \right. \\ \left. + \alpha^2 (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \left[ \varphi \frac{dL_2^\circ}{dx_3} - L_2^* (v_2^\circ - c_1) \right] \right\} \\ L_2^* [\kappa + \alpha^2 B_1 + i\alpha R \delta_4 (v_2^\circ - c_1)] - B_4 \frac{d^2 L_2^*}{dx_3^2} - i\alpha R \delta_4 \varphi \frac{dL_2^\circ}{dx_3} - \\ - \frac{1}{2} R (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} + \frac{1}{2} \alpha^2 R (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \varphi = 0 \\ \varphi(1) = \frac{d\varphi(1)}{dx_3} = L_2^*(1) = 0, \quad \frac{d^2 L_2^\circ(0)}{dx_3^2} \frac{\varphi(0)}{c_1 - v_2^\circ(0)} + \frac{dL_2^*(0)}{dx_3} = 0 \\ 2\delta_3 \left( \frac{d^2 \varphi(0)}{dx_3^2} + \frac{d^2 v_2^\circ(0)}{dx_3^2} \frac{\varphi(0)}{c_1 - v_2^\circ(0)} \right) + \alpha^2 (\delta_2 + \delta_3 - \delta_4) \varphi(0) + \\ + i\alpha (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) (c_1 - v_2^\circ(0)) L_2^*(0) = 0 \\ \alpha (3\delta_3 \operatorname{ctg} \gamma + \alpha^2 S') \frac{\varphi(0)}{c_1 - v_2^\circ(0)} + \alpha R \left[ \varphi(0) \frac{dv_2^\circ(0)}{dx_3} - (v_2^\circ(0) - c_1) \frac{d\varphi(0)}{dx_3} \right] + \\ + \frac{1}{2} i\alpha^2 (2 + \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 - 4\delta_6 + 2\delta_7 + 2\delta_8) \frac{d\varphi(0)}{dx_3} - i\delta_3 \frac{d^3 \varphi(0)}{dx_3^3} - \\ - \frac{1}{2} \alpha (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \left[ \frac{dL_2^*(0)}{dx_3} (v_2^\circ(0) - c_1) + L_2^*(0) \frac{dv_2^\circ(0)}{dx_3} - \right. \\ \left. - \left( \varphi(0) \frac{d^2 L_2^\circ(0)}{dx_3^2} + \frac{d\varphi(0)}{dx_3} \frac{dL_2^\circ(0)}{dx_3} \right) \right] = 0, \quad S' = RS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad & i\alpha u^* (v_2^\circ - c_2) = R^{-1} \left( \delta_3 \frac{d^2 u^*}{dx_3^2} - \alpha^2 u^* \right) + i\alpha \delta_5 R^{-1} \omega^* - \\
& - \frac{1}{2} i\alpha R^{-1} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \left[ \frac{dL_1^*}{dx_3} (v_2^\circ - c_2) + L_1^* \frac{dv_2^\circ}{dx_3} \right] \\
& L_1^* [\kappa + \alpha^2 (B_1 + B_5) + i\alpha R \delta_4 (v_2^\circ - c_2)] - B_4 \frac{d^2 L_1^*}{dx_3^2} - \\
& - \frac{1}{2} R (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \frac{du^*}{dx_3} = 0 \\
& \delta_{10} \frac{d^2 \omega^*}{dx_3^2} - \alpha^2 \delta_9 \omega^* - \delta_5 (i\alpha u^* + 2\omega^*) = 0 \\
& u^*(1) = L_1^*(1) = \omega^*(1) = \frac{dL_1^*(0)}{dx_3} = \frac{d\omega^*(0)}{dx_3} = 0 \\
& 2\delta_3 \frac{du^*(0)}{dx_3} + i\alpha (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) (c_2 - v_2^\circ(0)) L_1^*(0) = 0
\end{aligned}$$

Здесь  $S$  — коэффициент поверхностного натяжения, отнесенный к  $\rho v_a^2 h$ . При получении уравнений (2.3), (2.4) было принято  $J_\perp = J_\parallel = 0$ , что физически оправдано [1] для НЖК сред в силу малости локального момента инерции.

Уравнения (2.3) соответствуют волне возмущений  $v'$ ,  $w'$ ,  $L_2'$ , которая по своей природе аналогична волне поверхностных возмущений в обычной вязкой жидкости. Напротив, волна возмущений  $u'$ ,  $L_1'$ ,  $\omega'$  не связана с искажением свободной поверхности и имеет преимущественно ориентационный характер. В волне этого типа колебательные смещения молекул в направлении  $x_1$  периодически изменяются по координате  $x_2$  и времени, при этом молекулы совершают вращательные движения как вокруг своих длинных осей инерции, так и вокруг направления  $x_2$ . Возможность распространения таких волн существенно обусловлена наличием вращательных степеней свободы у жидкого кристалла и анизотропной структурой НЖК сред.

Рассмотрим поведение длинноволновых поверхностных возмущений, при этом решение краевой задачи (2.3) будем искать методом последовательных приближений [6,7]. Ограничиваясь в дальнейшем двумя приближениями, запишем  $\varphi$ ,  $L_2^*$  и  $c_1$  в виде

$$(2.5) \quad \varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1, \quad L_2^* = l_0 + \alpha l_1, \quad c_1 = c_1^\circ + \alpha c_1':$$

Подставляя (2.5) в (2.3), находим для нулевого приближения

$$\begin{aligned}
(2.6) \quad & \varphi_0 = (x_3 - 1)^2, \quad l_0 = R (\kappa \operatorname{ch} m)^{-1} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \times \\
& \times \{[(m - \operatorname{sh} m)\operatorname{th} m - 1]\operatorname{ch} mx_3 - (m - \operatorname{sh} m)\operatorname{sh} mx_3 + \operatorname{ch} m\} \\
& c_1^\circ = 3
\end{aligned}$$

Следующее приближение дает выражение для  $c_1'$ :

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad & c_1' = i \{ \delta_3^{-1} R [^{9/8} (\kappa \operatorname{ch} m)^{-1} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2)^2 \Phi(m) + ^{6/5}] - \operatorname{ctg} \gamma \} \\
& \Phi(m) = ^{1/3} m^3 D_4 + m^2 D_3 - m \operatorname{sh} m (D_1 + D_3 + D_5) + m D_2 - \\
& - (\operatorname{ch} m + ^{1/2} m^2 - 1) (D_1 - D_5) - m \operatorname{ch} m (D_3 + D_4) + D_4 \operatorname{sh} m \\
& D_1 = m^{-2} [(m - \operatorname{sh} m)\operatorname{th} m + \operatorname{ch} m - 1] \\
& D_2 = -4m^{-3} [(m - \operatorname{sh} m) (\operatorname{th} m + ^{1/2} m) + \operatorname{ch} m - 1] \\
& D_3 = -2m^{-2} \operatorname{ch} m, \quad D_4 = 4m^{-3} \operatorname{ch} m \\
& D_5 = (6 + m^2)m^{-4} [(m - \operatorname{sh} m)\operatorname{th} m + \operatorname{ch} m - 1] + \\
& + 4m^{-3} (m - \operatorname{sh} m)
\end{aligned}$$

Отсюда сразу следует формула для критического числа Рейнольдса

$$(2.8) \quad R_1^* = \delta_3 [1 + {}^{15}/_{16}(B_4 m^2 \operatorname{ch} m)^{-1} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2)^2 \Phi(m)]^{-1} R_0^*$$

где  $R_0^* = {}^5/_6 \operatorname{ctg} \gamma$  — критическое число  $R$  для слоя изотропной ньютоновской жидкости [6].

Оценим порядок величин, входящих в соотношение (2.8). Как отмечается в [1], для реализации случая малых углов разворота осей нематического порядка необходимо достаточно большое магнитное поле. Так как для НЖК сред  $\Delta\chi \sim 10^{-6} \text{ см}^3 / \text{г}$ ,  $d_{1313} \sim 10^{-6} \text{ дин}$ , то  $m \sim H$  и, следовательно, также должно быть большим. Нетрудно показать, что при возрастании  $m$  выражение  $(m^2 \operatorname{ch} m)^{-1} \Phi(m) \rightarrow -0$  как величина порядка  $m^{-2}$ . Поэтому, принимая для вязкости  $\eta_1$  оценку  $\eta_1 \sim 10^{-2} \text{ пуаз}$ , получим  $B_4 \sim 10^{-2}$  и, значит, уже при магнитном поле в несколько сотен эрстед  $|(B_4 m^2 \operatorname{ch} m)^{-1} \Phi(m)| < 1$ . Так как  $\delta_3 > 1$  в силу характера анизотропии вязкости НЖК [1, 2], то коэффициент при  $R_0^*$  в формуле (2.8) всегда больше единицы. Это означает, что течение слоя НЖК при рассматриваемой ориентации оси анизотропии всегда более устойчиво по отношению к поверхностным возмущениям, чем течение слоя ньютоновской жидкости. Увеличение напряженности магнитного поля уменьшает значение  $R_1^*$ . При этом  $\lim_{H \rightarrow \infty} R_1^* = \delta_3 R_0^*$ , что соответствует результату, полученному в [8]: при  $H \rightarrow \infty$  нематическая среда течет как обычная ньютоновская жидкость с вязкостью  $\eta_3$ .

Дестабилизирующее влияние, оказываемое магнитным полем на поведение поверхностных возмущений, может быть объяснено следующим образом. Гидродинамический поток, оказывающий существенное ориентирующее влияние на структуру НЖК, формирует неоднородную ориентацию молекул по толщине слоя. В случае малых углов разворота осей нематического порядка, рассмотренном выше, отклонение ориентации молекул жидкого кристалла в стационарном течении от направления, возникающего вблизи твердой поверхности, определяется величиной  $L_2^\circ$ . Магнитное поле, действующее параллельно направлению оси анизотропии вблизи стенки, напротив, стремится создать однородную ориентацию молекул по всему сечению потока и, таким образом, оказывает конкурирующее влияние. Это и приводит к понижению гидродинамической устойчивости течения по отношению к поверхностным возмущениям.

Как следует из формулы (2.8), при увеличении модуля упругости  $d_{1313}$  величина  $R_1^*$  уменьшается. Следовательно, упругость НЖК влияет на устойчивость течения так же, как и магнитное поле. Напротив, увеличение коэффициента вязкости  $\eta_3$  оказывает стабилизирующее влияние на течение.

Обратимся к краевой задаче (2.4) для амплитуд возмущений ориентационного типа. Формальное применение алгоритма асимптотических разложений [6, 7] по волновому числу  $\alpha$  к системе уравнений (2.4) не приводит к цели, так как нулевое, первое и все последующие приближения для амплитуд возмущений тождественно равны нулю. Однако, используя подход, аналогичный методу Сайнджа в теории гидродинамической устой-

чивости вязкой жидкости [4], можно получить условие, достаточное для устойчивости течения слоя НЖК относительно ориентационных волн. Умножим второе уравнение из (2.4) на величину  $\bar{L}_1^*$ , комплексно сопряженную  $L_1^*$ , и проинтегрируем результат по  $x_3$  от нуля до единицы. Отделяя действительную часть полученного соотношения, находим

$$(2.9) \quad \delta_4 I_1 c_2^i = \alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{4} (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) \int_0^1 \left( \frac{du^*}{dx_3} \bar{L}_1^* + \frac{d\bar{u}^*}{dx_3} L_1^* \right) dx_3 - \right. \\ \left. - R^{-1} [\kappa I_1 + \alpha^2 (B_1 + B_5) I_1 + B_4 I_2] \right\} \\ I_1 = \int_0^1 |L_1^*|^2 dx_3, \quad I_2 = \int_0^1 \left| \frac{dL_1^*}{dx_3} \right|^2 dx_3$$

Здесь  $c_2^i$  — мнимая часть комплексной волновой скорости  $c_2$ . Используя оценку

$$\left| \int_0^1 \left( \frac{du^*}{dx_3} \bar{L}_1^* + \frac{d\bar{u}^*}{dx_3} L_1^* \right) dx_3 \right| \leq 2I_3, \quad I_3 = \int_0^1 \left| \frac{du^*}{dx_3} \right| |L_1^*| dx_3$$

получим из (2.9) условие затухания ориентационных волн

$$(2.10) \quad R < \min \left\{ \frac{2[\kappa + \alpha^2 (B_1 + B_5)] I_1 + 2B_4 I_2}{(\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) I_3} \right\}$$

Таким образом, если число Рейнольдса течения достаточно мало, возмущения ориентационного типа затухают. При этом, как видно из (2.9), магнитное поле и упругость жидкого кристалла являются стабилизирующими факторами. Следовательно, магнитное поле, так же как и упругость НЖК, оказывает противоположное влияние на развитие возмущений соответственно поверхностного и ориентационного типа.

**3. Ось анизотропии параллельна наклонной плоскости.** Рассмотрим случай, когда ось анизотропии НЖК расположена в плоскости течения и вблизи твердой поверхности ориентирована параллельно ей. Направим ось  $x_3$  по линии наибольшего ската, ось  $x_1$  — по нормали к твердой поверхности внутрь жидкости. В этой системе координат стационарное течение слоя описывается следующим решением уравнений движения (1.1):

$$(3.1) \quad v_3^\circ = 3/2 (1 - x_1^2), \quad p^\circ = 3\delta_2 R^{-1} x_1 \operatorname{ctg} \gamma + p_a (\rho v_a^2)^{-1} \\ L_1^\circ = 3/2 \kappa^{-1} R (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) [m_1 (\operatorname{ch} m_1)^{-1} (\operatorname{sh} m_1 - m_1) \operatorname{ch} m_1 x_1 - \\ - m_1^{-1} \operatorname{sh} m_1 x_1 + x_1] \\ \omega^\circ = 0, \quad m_1 = hH (\Delta \chi d_{1212}^{-1})^{1/2}, \quad v_a = 1/3 \rho g \eta_2^{-1} h^2 \sin \gamma$$

Изучим поведение малых возмущений, не зависящих от координаты  $x_2$ . Так же, как и в рассмотренном выше случае ортогональной к наклонной плоскости ориентации оси анизотропии, линеаризованные уравнения движения и граничные условия для возмущений разделяются на две независимые группы, соответствующие поверхностным и ориентационным

волнам. Сохраняя прежние обозначения для возмущений, положим

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, & w' &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \psi &= \varphi(x_1) e^{i\alpha(x_3 - c_1 t)} \\ L_1' &= L_1^*(x_1) e^{i\alpha(x_3 - c_1 t)}, & L_2' &= L_2^*(x_1) e^{i\alpha(x_3 - c_2 t)} \\ v' &= v^*(x_1) e^{i\alpha(x_3 - c_2 t)}, & \omega' &= \omega^*(x_1) e^{i\alpha(x_3 - c_2 t)} \end{aligned}$$

Тогда опять построим две краевых задачи: краевую задачу, соответствующую волне поверхностных возмущений  $u'$ ,  $w'$ ,  $L_1'$ , и краевую задачу, соответствующую волне ориентационных возмущений  $v'$ ,  $L_2'$ ,  $\omega'$ . Если в уравнениях краевой задачи для амплитуд поверхностных возмущений поменять местами параметры среды  $d_{1212}$ ,  $\eta_2$  и  $d_{1313}$ ,  $\eta_3$  соответственно, то полученные уравнения совпадут с краевой задачей (2.3). Поэтому, используя результаты п. 2, будем иметь для критического числа Рейнольдса течения в рассматриваемом случае

$$(3.3) \quad R_2^* = \delta_2 [1 + {}^{15}/_{16} (B_1 m_1^2 \operatorname{ch} m_1)^{-1} (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3)^2 \Phi(m_1)]^{-1} R_0^*$$

Влияние магнитного поля и модуля упругости в этом соотношении обсуждалось выше. Заметим лишь, что  $\lim_{H \rightarrow \infty} R_2^* = \delta_2 R_0^*$ , что также соответствует результату работы [8].

Краевая задача для амплитуд ориентационных возмущений не сводится к уравнениям (2.4) и должна быть рассмотрена отдельно. Она имеет вид

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (B_5 + B_1) \frac{d^2 L_2^*}{dx_1^2} - [\kappa + \alpha^2 B_4 + i\alpha R \delta_4 (v_3^\circ - c_2)] L_2^* + \\ + \frac{1}{2} i\alpha R (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) v^* = 0 \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \delta_9 \frac{d^2 \omega^*}{dx_1^2} - (\alpha^2 \delta_{10} + 2\delta_5) \omega^* + \delta_5 \frac{dv^*}{dx_1} = 0$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 v^*}{dx_1^2} - [\alpha^2 \delta_3 + i\alpha R (v_3^\circ - c_2)] v^* - \delta_5 \frac{d\omega^*}{dx_1} + \\ + \frac{1}{2} \alpha^2 (\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) (v_3^\circ - c_2) L_2^* = 0 \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} L_2^*(1) = v^*(1) = \omega^*(1) = \frac{d\omega^*(0)}{dx_1} = \frac{dL_2^*(0)}{dx_1} = 0 \\ dv^*(0)/dx_1 - \delta_5 \omega^*(0) = 0 \end{aligned}$$

Применяя к уравнению (3.4) прием, описанный в п. 2, получим следующий достаточный критерий устойчивости течения относительно ориентационных волн:

$$(3.8) \quad \alpha R < \min \left\{ \frac{2[(B_5 + B_1) I_4 + (\kappa + \alpha^2 B_4) I_5]}{(\delta_3 + \delta_4 - \delta_2) I_6} \right\}$$

$$I_4 = \int_0^1 \left| \frac{dL_2^*}{dx_1} \right|^2 dx_1, \quad I_5 = \int_0^1 |L_2^*|^2 dx_1, \quad I_6 = \int_0^1 |v^*| |L_2^*| dx_1$$

Из (3.8) следует, что всегда существует некоторый интервал изменения величин  $\alpha$  и  $R$ , для которого возмущения ориентационного типа затухают. Размеры этого интервала возрастают при увеличении модулей упругости НЖК и напряженности магнитного поля.

Рассмотрим поведение длинных ориентационных волн в случае, когда коэффициент вращательной вязкости  $\delta_5$  пренебрежимо мал [1]. Умножая (3.6) на  $\bar{v}^*$  и интегрируя с учетом граничных условий по  $x_1$  от нуля до единицы, находим, пренебрегая членами, содержащими  $\alpha^2$

$$(3.9) \quad \alpha R I_8 c_2^i = -I_7 - i\alpha R \int_0^1 (v_3^\circ - c_2^r) |v^*|^2 dx_1$$

$$I_7 = \int_0^1 \left| \frac{dv^*}{dx_1} \right|^2 dx_1, \quad I_8 = \int_0^1 |v^*|^2 dx_1$$

Здесь  $c_2^r$  — действительная часть волновой скорости  $c_2$ . Мнимая часть соотношения (3.9) дает

$$\alpha R \int_0^1 (v_3^\circ - c_2^r) |v^*|^2 dx_1 = 0$$

откуда следует, что внутри интервала  $(0, 1)$  разность  $v_3^\circ - c_2^r$  меняет знак. Следовательно, скорость распространения волны ориентационного типа в этом случае удовлетворяет неравенству  $0 < c_2^r < 3/2$ .

Отделяя действительную часть (3.9), находим

$$c_2^i = -I_7 (\alpha R I_8)^{-1} < 0$$

Таким образом, в отсутствие вращательной вязкости длинные волны ориентационного типа всегда затухают. Отметим также, что при  $\delta_5 = 0$  из уравнения (3.5) и граничных условий (3.7) следует  $\omega^* = 0$ , т. е. в этом случае ориентационные волны не вызывают вращательных колебаний молекул.

4. Ось анизотропии ортогональна плоскости течения. Стационарное течение слоя описывается соотношениями

$$(4.1) \quad v_1^\circ = K \{1 - x_2^2 + \delta_5 n^{-2} [(\operatorname{ch} n)^{-1} (n - \operatorname{sh} n) \operatorname{sh} nx_2 + \operatorname{ch} nx_2] - \delta_5 (n^2 \operatorname{ch} n)^{-1} (n \operatorname{sh} n + 1)\}$$

$$\omega^\circ = K [x_2 - (n \operatorname{ch} n)^{-1} (n - \operatorname{sh} n) \operatorname{ch} nx_2 - n^{-1} \operatorname{sh} nx_2]$$

$$p^\circ = (2 - \delta_5) R^{-1} K x_2 \operatorname{ctg} \gamma + p_a (\rho v_a^2)^{-1}$$

$$K = [2/3 + \delta_5 n^{-2} (1 - 2(\operatorname{ch} n)^{-1} + (n \operatorname{ch} n)^{-1} \operatorname{sh} n (1 - n^2))]^{-1}$$

$$n = [\delta_5 \delta_9^{-1} (2 - \delta_5)]^{1/2}, \quad v_a = [\eta_1 K (2 - \delta_5)]^{-1} \rho g h^2 \sin \gamma$$

Решение (4.1) записано в системе координат, ось  $x_1$  которой направлена по линии наибольшего ската, ось  $x_2$  — внутрь слоя. Принимая малые возмущения не зависящими от координаты  $x_3$ , проведем линеаризацию уравнений движения и граничных условий для слоя. Полагая

$$(4.2) \quad u' = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \psi = \varphi(x_2) e^{i\alpha(x_1 - c_1 t)}$$

$$\omega' = f(x_2) e^{i\alpha(x_1 - c_1 t)}, \quad w' = w^*(x_2) e^{i\alpha(x_1 - c_1 t)}$$

$$L_1' = L_1^*(x_2) e^{i\alpha(x_1 - c_1 t)}, \quad L_2' = L_2^*(x_2) e^{i\alpha(x_1 - c_1 t)}$$

получим следующие уравнения для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad & \frac{d^4\varphi}{dx_2^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\varphi}{dx_2^2} + \alpha^4\varphi = i\alpha R \left[ (v_1^\circ - c_1) \left( \frac{d^2\varphi}{dx_2^2} - \alpha^2\varphi \right) - \right. \\
& \left. - \varphi \frac{d^2v_1^\circ}{dx_2^2} \right] + \delta_5 \left( \alpha^2 f - \frac{d^2f}{dx_2^2} \right) \\
& \delta_9 \left( \frac{d^2f}{dx_2^2} - \alpha^2 f \right) + \delta_5 \left( \alpha^2\varphi - \frac{d^2\varphi}{dx_2^2} - 2f \right) = 0 \\
& \varphi(1) = \frac{d\varphi(1)}{dx_2} = f(1) = 0 \\
& \left( \frac{d^2v_1^\circ(0)}{dx_2^2} + \delta_5 \frac{d\omega^\circ(0)}{dx_2} \right) \frac{\varphi(0)}{c_1 - v_1^\circ(0)} + \\
& + \frac{d^2\varphi(0)}{dx_2^2} + \alpha^2(1 - \delta_5)\varphi(0) + \delta_5 f(0) = 0 \\
& [K(2 - \delta_5) \operatorname{ctg} \gamma + \alpha^2 S'] \frac{\varphi(0)}{c_1 - v_1^\circ(0)} + R\varphi(0) \frac{dv_1^\circ(0)}{dx_2} - \\
& - R(v_1^\circ(0) - c_1) \frac{d\varphi(0)}{dx_2} - i\alpha^{-1} \frac{d^3\varphi(0)}{dx_2^3} - i\delta_5 \alpha^{-1} \frac{df(0)}{dx_2} + \\
& + i\alpha(3 - \delta_5) \frac{d\varphi(0)}{dx_2} = 0, \quad \frac{d^2\omega^\circ(0)}{dx_2^2} \frac{\varphi(0)}{c_1 - v_1^\circ(0)} + \frac{df(0)}{dx_2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.4) \quad & \frac{d^2w^*}{dx_2^2} - \alpha^2 w^* - i\alpha R \delta_2^{-1} (v_1^\circ - c_2) w^* + \frac{1}{2} \delta_2^{-1} (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \times \\
& \times \left[ \left( i\alpha \frac{dL_2^*}{dx_2} - \alpha^2 L_1^* \right) (v_1^\circ - c_2) + i\alpha L_2^* \frac{dv_1^\circ}{dx_2} \right] = 0 \\
& L_2^* [\kappa + \alpha^2 (B_5 + B_1) + i\alpha R \delta_4 (v_1^\circ - c_2)] + i\alpha B_5 \frac{dL_1^*}{dx_2} - \\
& - B_1 \frac{d^2L_2^*}{dx_2^2} + \frac{1}{2} R (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) \frac{dw^*}{dx_2} = 0 \\
& L_1^* [\kappa + \alpha^2 B_1 + i\alpha R \delta_4 (v_1^\circ - c_2)] + i\alpha B_5 \frac{dL_2^*}{dx_2} - \\
& - (B_1 + B_5) \frac{d^2L_1^*}{dx_2^2} + \frac{1}{2} i\alpha R (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) w^* = 0 \\
& L_1^*(1) = L_2^*(1) = w^*(1) = 0, \quad B_1 \frac{dL_2^*(0)}{dx_2} - i\alpha B_2 L_1^*(0) = 0 \\
& 2\delta_2 \frac{dw^*(0)}{dx_2} + i\alpha (\delta_2 + \delta_4 - \delta_3) (v_1^\circ(0) - c_2) L_2^*(0) = 0 \\
& (B_1 + B_5) \frac{dL_1^*(0)}{dx_2} - i\alpha B_3 L_2^*(0) = 0
\end{aligned}$$

Система уравнений (4.3) описывает поведение поверхностных возмущений, система (4.4) — поведение возмущений ориентационного типа. Отметим, что при  $\delta_5 = 0$  первое уравнение из (4.3) переходит в известное уравнение Орра — Зоммерфельда, а граничные условия для  $\varphi$  принимают такой же вид, как и в задаче об устойчивости течения слоя вязкой ньютоновской жидкости [6].

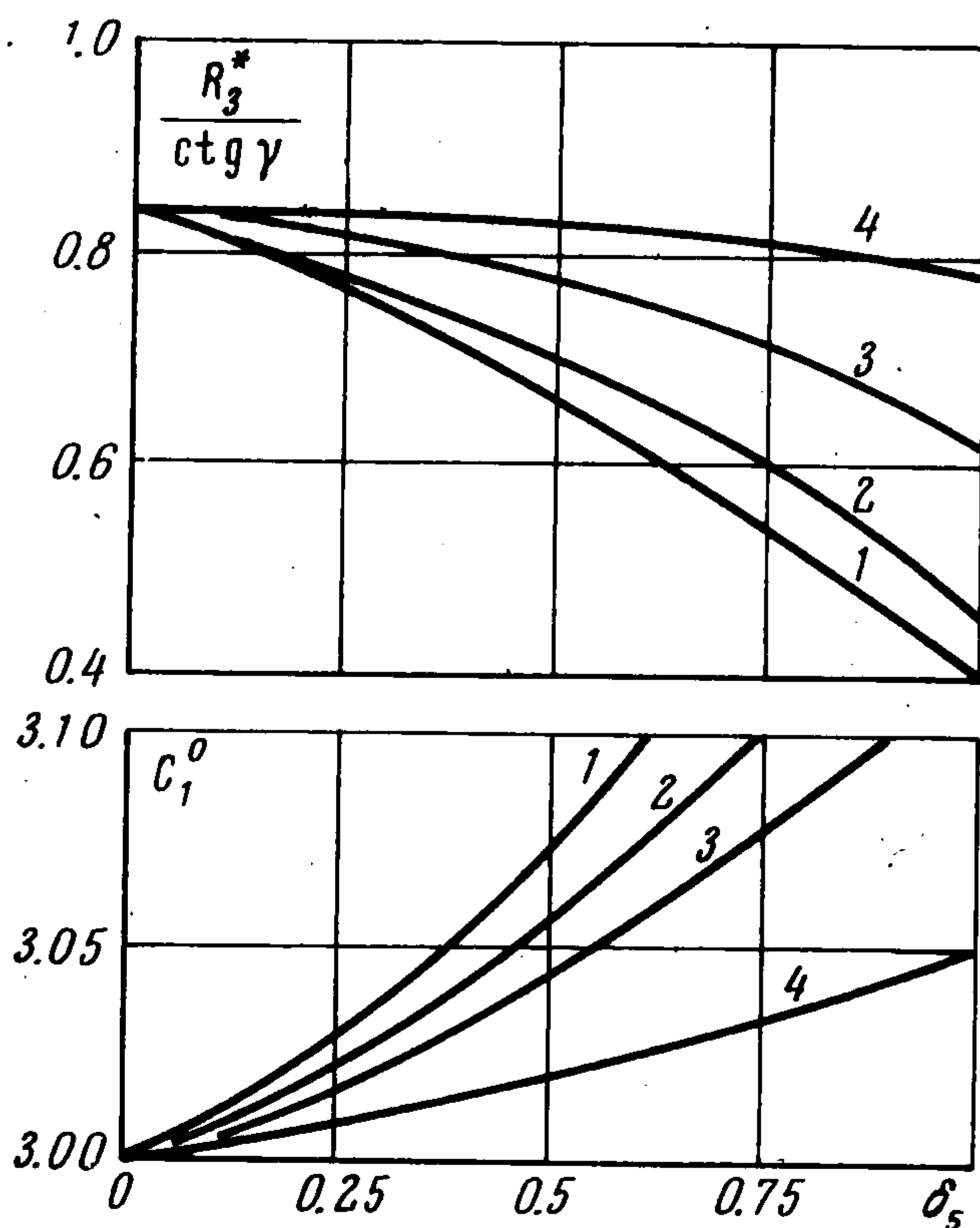
Решение краевой задачи (4.3) построим для случая длинных волн. Представляя  $\varphi$ ,  $f$  и  $c_1$  в виде рядов по степеням  $\alpha$ , в нулевом приближении находим выражение для скорости распространения поверхностных возмущений

$$\begin{aligned}
c_1^\circ = & v_1^\circ(0) + K (\operatorname{ch} n)^{-1} [\operatorname{ch} n + \delta_5 n^{-2} (\operatorname{ch} n - 1) - \\
& - \delta_5 n^{-1} \operatorname{sh} n] - K \delta_5 (n \operatorname{ch} n)^{-2} (n - \operatorname{sh} n)^2
\end{aligned}$$

Следующее приближение позволяет определить величину критического числа Рейнольдса

$$R_3^* = G(\delta_5, \delta_9) \operatorname{ctg} \gamma$$

Здесь  $G(\delta_5, \delta_9)$  — некоторая функция параметров  $\delta_5, \delta_9$ . Таким образом, критическое число Рейнольдса течения для поверхностных волн зависит лишь от вращательного и моментного коэффициентов вязкости



$\delta_5, \delta_9$  и не зависит от напряженности магнитного поля. Это связано с тем, что при рассматриваемой ориентации оси анизотропии, как следует из (4.3), волна поверхностных возмущений не сопровождается искажением ориентационной структуры слоя.

С целью выяснения влияния параметров  $\delta_5$  и  $\delta_9$  на величину  $R_3^*$  и  $c_1^0$  были проведены численные расчеты на БЭСМ-4. Полученные результаты представлены на фигуре. Кривые 1—4 соответствуют значениям  $\delta_9 = 0.01, 0.1, 1, 10$ . Из графиков следует, что вращательная вязкость оказывает дестабилизирующее, а моментная вязкость — стабилизирующее влия-

ние на течение. При  $\delta_5 = 0$  имеем  $R_3^* = \frac{5}{6} \operatorname{ctg} \gamma$ , что соответствует величине критического числа  $R$  для слоя ньютоновской жидкости. Скорость распространения поверхностной волны  $c_1^0$  возрастает с увеличением  $\delta_5$  и уменьшается при увеличении  $\delta_9$ . При этом для  $\delta_5 \neq 0$  всегда  $c_1^0 > 3$ .

В заключение отметим, что применение метода длинноволновых приближений [6, 7] к системе уравнений (4.4), так же как и к системам (2.4) и (3.4) — (3.7), не приводит к цели. Кроме того, в данном случае ориентации оси анизотропии не удастся получить и достаточный критерий устойчивости для ориентационных волн типа (2.10), (3.8). В связи с этим краевая задача (4.4) требует дополнительного исследования.

Поступила 29 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аэро Э. Л., Бульгин А. Н. Линейная механика жидкокристаллических сред. Физика твердого тела, 1971, т. 13, вып. 6.
2. Чистяков И. Г. Жидкие кристаллы. М., «Наука», 1966.
3. Lee J. D., Eringen A. C. Wave propagation in nematic liquid crystals. J. Chem. Phys., 1971, vol. 54, No. 12.
4. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностранной лит., 1958.
5. Листров А. Т. Об устойчивости течения слоя жидкости модели Грэда по наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Chia-Shun Yih. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (Русск. перев.: Механика. Сб. перев., 1963, № 5).
7. Иванюков Ю. П. Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном. ПММ, 1960, т. 14, вып. 2.
8. Аэро Э. Л., Бульгин А. Н. Уравнения движения нематических жидкокристаллических сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.