Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В СЛУЧАЕ УЗКОГО ЗАЗОРА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

С. Н. Овчинникова, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Исследуется устойчивость и бифуркация течения Куэтта между вращающимися концентрическими цилиндрами в случае, когда отношения их радиусов R и угловых скоростей Ω близки к единице. Известно [1], что в линейной теории предельной при $R \to 1$ и $\Omega \to 1$ является задача об устойчивости конвекции в слое. Оказывается, что то же справедливо и для нелинейной задачи. Ниже показано, что решение задачи о свободной конвекции дает главный член в разложении вторичного течения (вихря Тейлора) по степеням малого параметра $\delta = R - 1$. Поэтому применение результатов работ [2,3] позволяет получить в данном случае строгое обоснование применения метода Ляпунова — Шмидта для расчета вихрей Тейлора. Численные результаты для критического числа Рейнольдса и амплитуды вторичного течения хорошо иллюстрируют выход на асимптотику при $\delta \to 0$.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость единичной плотности заполняет пространство между двумя бесконечными концентрическими цилиндрами радиусов R_1 и R_2, которые вращаются с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2. Устремим $R \to 1$ и $\Omega \to 1$ так, чтобы

$$(\Omega - 1) / (R - 1) = c = \mathrm{const}, \qquad R = R_2 / R_1, \ \Omega = \Omega_2 / \Omega_1$$

В качестве масштаба длины выберем $R_2 - R_1$, а $\Omega_1 (R_2 - R_1)$ примем за масштаб скорости, тогда течение Куэтта в цилиндрических координатах (r, θ, z) примет вид

$$\mathbf{v}_0 = (0, v_{0\theta}, 0), \qquad v_{0\theta} = ar + b / r \tag{1.1}$$

$$a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^2 - 1}, \quad b = -\frac{(\Omega - 1) R^2}{(R^2 - 1)\delta^2}, \quad \mathrm{Re} = \frac{\Omega_1 (R_2 - R_1)^2}{\nu} = \frac{\delta^2 \Omega_1^2 R_1^2}{\nu}$$

Здесь $\delta = R - 1$ — малый параметр при $R \to 1$.

Строго доказано [4, 5], что при достаточно больших числах Рейнольдса Re течение Куэтта неустойчиво. Значение числа Re_*, при котором происходит потеря устойчивости, называют критическим.

Будем при сверхкритических числах $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_* + \varepsilon^2$ разыскивать стационарное вращательно-симметричное решение уравнений Навье — Стокса, отличное от (1.1), в виде

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \qquad p_1 = p_0 + p \tag{1.2}$$

(p_0 — давление, соответствующее течению Куэтта).

Подставляя (1.2) в уравнения Навье — Стокса, получим для определения $\mathbf{v}$ и p

$$\nabla^2 v_r + \frac{\delta}{1+\rho\delta}\frac{\partial v_r}{\partial\rho} - \frac{\delta^2}{(1+\rho\delta)^2} v_r - \frac{\partial p}{\partial\rho} = (\mathrm{Re}_* + \varepsilon^2)\times \tag{1.3}$$

$$\times\left[(\mathbf{v},\nabla)v_r - 2\frac{\delta v_{0\theta}}{1+\rho\delta}v_\theta - \frac{\delta}{1+\rho\delta}v_\theta^2\right]$$

$$\nabla^2 v_\theta + \frac{\delta}{1+\rho\delta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho} - \frac{\delta^2}{(1+\rho\delta)^2} v_\theta = (\mathrm{Re}_* + \varepsilon^2)\times$$

$$\times\left[(\mathbf{v},\nabla)v_\theta + 2av_r + \frac{\delta}{1+\rho\delta}v_r v_\theta\right]$$

$$\nabla^2 v_z - \frac{\partial p}{\partial z} = (\mathrm{Re}_* + \varepsilon^2)(\mathbf{v},\nabla)v_z$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\delta}{1+\delta\rho}v_r = 0$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{при } \rho = 0{,}1$$

$$\rho = \frac{(r\delta - 1)}{\delta}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}, 0, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$$

Разложим функцию $v_{0\theta}(r)$ в ряд по малому параметру δ

$$v_{0\theta} = \frac{1}{\delta} + (c+1)\rho + \sum_{n=1}^{\infty} v_n\delta^n, \quad a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\delta^n, \quad b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\delta^{n-2}$$

$$v_n = a_{n+1} + \rho a_n + \sum_{m=0}^{n+1} b_{n-m+1}(-\rho)^m, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$a_0 = (c+2)/2, \quad b_0 = -c/2, \quad a_1 = -b_1 = 3c/4$$

$$a_n = -b_n = (-1)^n c/2^{n+1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

2. Асимптотика задачи устойчивости при $\delta \to 0$. Покажем, что решение системы (1.3) аналитически зависит от ε, δ в окрестности $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$.

Рассмотрим встречающуюся здесь ситуацию в более общей форме. Пусть в гильбертовом пространстве H задано операторное уравнение

$$A_0\mathbf{u} + A_1\mathbf{u} - \lambda K\mathbf{u} = \lambda L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{2.1}$$

Здесь A_0 — самосопряженный положительно-определенный линейный оператор, A_1, K — линейные, а L — билинейный операторы. Вообще говоря, A_0, A_1, K, L неограничены. Пусть $A_0^{-1}A_1$, $A_0^{-1}K$ вполне непрерывны на H_1, и $A_0^{-1}L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ вполне непрерывен на $H_1 \oplus H_1$. Здесь H_1 — энергетическое пространство оператора A_0, т. е. замыкание области определения оператора A_0 в метрике $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (A_0\mathbf{u}, \mathbf{v})_H$. Пусть λ_* — простое собственное число, φ — соответствующий собственный вектор линейной задачи

$$A_0\varphi + A_1\varphi - \lambda_* K\varphi = 0 \tag{2.2}$$

а ψ — собственный вектор сопряженной задачи.

В силу простоты λ_* можно считать $(\varphi, \psi)_H = 1$. Положив $\lambda = \lambda_* + \varepsilon^2$ и обратив оператор A_0, приведем (2.1) к виду

$$\mathbf{u} + A_0^{-1}A_1\mathbf{u} - \lambda_* A_0^{-1}K\mathbf{u} = \varepsilon^2 A_0^{-1}K\mathbf{u} + (\lambda_* + \varepsilon^2)A_0^{-1}L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{2.3}$$

В уравнении (2.3) все операторы вполне непрерывны.

Лемма. Пусть выполнены следующие условия:

1) операторы A_1, K, L аналитически зависят от малого параметра δ в области $|\delta| < \delta_0$, A_0 не зависит от δ.

2) при любом δ собственное число $\lambda_*(\delta)$ простое и

$$(L(\varphi, \varphi), \psi)_H = 0$$

3) $C_{20} > 0$ при $\delta = 0$, C_{20} — постоянная, определенная соотношением (2.10). Тогда при малых δ существует ровно два малых решения (таких, что они стремятся к нулю, если $\varepsilon \to 0$) задачи (2.3). Оба аналитически зависят от ε, δ в окрестности точки $(0, 0)$.

Доказательство. Будем разыскивать решение уравнения (2.3) в виде

$$\mathbf{u} = \gamma\varphi + \mathbf{v}, \qquad (\mathbf{v}, \psi)_H = 0$$

Из (2.3) получим

$$(I + A_0^{-1}A_1 - \lambda_* A_0^{-1}K)\,\mathbf{v} = \varepsilon^2 A_0^{-1}K\mathbf{v} + \varepsilon^2\gamma A_0^{-1}K\varphi + (\lambda_* + \varepsilon^2)\,A_0^{-1}L(\mathbf{v} + \gamma\varphi, \mathbf{v} + \gamma\varphi) \equiv \mathbf{f} \tag{2.4}$$

Введем пространство H_0 векторов $\mathbf{u} \in \mathrm{H}$, для которых $(\mathbf{u}, \psi)_H = 0$. Заметим, что оператор $(I + A_0^{-1}A_1 - \lambda_* A_0^{-1}K)$ действует из H в H_0.

Для любого $\mathbf{f} \in H_0$ уравнение (2.4) разрешимо, т. е. существует такой оператор N, что

$$\mathbf{v} = N\mathbf{f}, \qquad (\mathbf{f}, \psi)_H = 0 \tag{2.5}$$

Оператор N (см. [6], гл. VII § 6) аналитически зависит от δ. Подставляя в (2.5) выражение для $\mathbf{f}$, получим систему уравнений для определения $\mathbf{v}$ и γ, эквивалентную уравнению (2.4)

$$\mathbf{v} = N(\varepsilon^2 A_0^{-1}K\mathbf{v} + \varepsilon^2\gamma A_0^{-1}K\varphi + (\lambda_* + \varepsilon^2)\,A_0^{-1}L(\mathbf{v} + \gamma\varphi, \mathbf{v} + \gamma\varphi)) \equiv T\mathbf{v} \tag{2.6}$$

$$(\varepsilon^2 A_0^{-1}K\mathbf{v} + \varepsilon^2\gamma A_0^{-1}K\varphi + (\lambda_* + \varepsilon^2)\,A_0^{-1}L(\mathbf{v} + \gamma\varphi, \mathbf{v} + \gamma\varphi), \psi)_H = 0 \tag{2.7}$$

При достаточно малых ε и γ оператор T является оператором сжатия в любом шаре пространства H_1 с центром в нуле и достаточно малого радиуса. Согласно теореме о неявной функции [7], решение $\mathbf{v}$ уравнения (2.6) можно искать в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathbf{v}_{kl}\varepsilon^k\gamma^l, \qquad \mathbf{v}_{00} = 0 \tag{2.8}$$

Из (2.6) и (2.7) определяются коэффициенты $\mathbf{v}_{kl}$; так, например

$$\mathbf{v}_{k0} = 0,\ \mathbf{v}_{01} = 0,\ \mathbf{v}_{02} = \lambda_* N A_0^{-1}L(\varphi, \varphi),\ \mathbf{v}_{11} = 0, \ldots$$

Подставив (2.8) в (2.7), получим

$$\begin{gathered} \gamma^2 + \zeta^2 = 0 \\ \zeta = (C_{20}\,\varepsilon^2 + C_{03}\,\gamma^3 + C_{12}\gamma\varepsilon^2 + O(\gamma^i\varepsilon^j))^{1/2},\ i + j = 4 \end{gathered} \tag{2.9}$$

Постоянные C_{ij} выражаются через φ, ψ и $\mathbf{v}_{kl}$, например

$$C_{20} = \frac{(A_0^{-1}K\varphi, \psi)_H}{\lambda_*(A_0^{-1}L(\mathbf{v}_{02}, \varphi) + A_0^{-1}L(\varphi, \mathbf{v}_{02}), \psi)_H} \tag{2.10}$$

Решение (2.9) сводится к решению следующих уравнений:

$$\Phi_1(\mathbf{v}, \gamma, \varepsilon, \delta) \equiv \gamma + \zeta = 0 \tag{2.11}$$

$$\Phi_2(\mathbf{v}, \gamma, \varepsilon, \delta) \equiv \gamma - \zeta = 0 \tag{2.12}$$

Систему уравнений (2.6) и (2.11) для определения $\mathbf{v}$, γ запишем в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}, \varepsilon, \delta) = 0 \tag{2.13}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{v}, \gamma) \in H_1 \oplus R, \qquad \mathbf{F} = (I - T,\ \Phi_1)$$

При $\delta = 0$, согласно условию $C_{20} > 0$, существует решение $\mathbf{z}(\varepsilon, 0) = (\mathbf{v}(\varepsilon), \gamma(\varepsilon))$ уравнения (2.13), аналитически зависящее от ε, причем $\mathbf{z}(0, 0) = 0$. При $\varepsilon = 0$ и любом δ получаем, что $\mathbf{z}(0, \delta) = 0$ будет решением уравнения (2.13). Собственное число $\lambda_*(\delta)$ и соответствующие ему собственные векторы φ и ψ аналитически зависят от δ в силу простоты $\lambda_*(\delta)$ [6].

Таким образом, $\mathbf{F}$ аналитически зависит от ε, δ в окрестности $\mathbf{z} = 0$, $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, причем $\mathbf{F}(0, 0, 0) = 0$ и

$$\mathbf{F}_{\mathbf{z}}'(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} (\mathbf{v} - T\mathbf{v})_{\mathbf{v}}' & (\mathbf{v} - T\mathbf{v})_{\gamma}' \\ \Phi_{1\mathbf{v}}' & \Phi_{1\gamma}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

По теореме о неявной функции [7] получаем, что существует единственное решение уравнения (2.13), аналитически зависящее от ε, δ в окрестности $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$. Второе решение находим аналогично из системы уравнений (2.6), (2.12). Лемма доказана.

Систему (1.3) можно записать в виде (2.1), если положить

$$A_0 = \Pi\nabla^2, \quad A_1 = \Pi\left(\frac{\delta}{1+\rho\delta}G_1\right), \quad K = 2\Pi G_2$$

$$L(\mathbf{v},\ \mathbf{v}) = \Pi\left((\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} + \frac{\delta}{1+\rho\delta}G_3\mathbf{v}\right)$$

$$G_1\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial\rho} - \frac{\delta}{1+\rho\delta}v_r,\ \frac{\partial v_\theta}{\partial\rho} - \frac{\delta}{1+\rho\delta}v_\theta,\ 0\right)$$

$$G_2\mathbf{v} = \left(-\frac{\delta v_{0\theta}}{1+\rho\delta}v_\theta,\ av_r, 0\right), \quad G_3\mathbf{v} = (-v_\theta^2,\ v_r v_\theta,\ 0)$$

Здесь Π — оператор ортогонального проектирования на подпространство в $W_2^{(2)}$ соленоидальных векторов с равной нулю на границе нормальной компонентой. Область определения операторов A_0, A_1, L, K — множество соленоидальных, исчезающих на границе векторов из $W_2^{(2)}$.

Из леммы следует, что решение системы (1.3) аналитически зависит от δ, ε в окрестности $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$. Это решение удобно искать в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{u}_n\delta^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty}p_n\delta^n \tag{2.14}$$

$$\mathbf{u}_n = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{u}_{nk}\varepsilon^k, \quad p_n = \sum_{k=0}^{\infty}p_{nk}\varepsilon^k \tag{2.15}$$

Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_* + \varepsilon^2$ тоже представим в виде ряда

$$\mathrm{Re} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}_{*n}\delta^n + \varepsilon^2 \tag{2.16}$$

Введем функцию тока ψ_0 и функцию τ_0 следующим образом:

$$u_{0r} = \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial z}, \quad u_{0z} = -\frac{1}{\mathrm{Re}_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial\rho}, \quad u_{0\theta} = 2a_0\tau_0$$

Тогда для ψ_0 и τ_0 из (1.3), (2.14) и (2.16) получим

$$(2.17)\qquad \begin{aligned} &\nabla^4\psi_0 = -4(\mathrm{Re}_0)^2 a_0 \frac{\partial\tau_0}{\partial z} + [\psi_0, \nabla^2\psi_0] \\ &\nabla^2\tau_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial z} + [\psi_0, \tau_0] \\ &\frac{\partial\psi_0}{\partial z} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\rho} = \tau_0 = 0 \quad \text{при } \rho = 0{,}1 \\ &[f, \varphi] = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}$$

Система (2.17) совпадает с нелинейной задачей для возмущений в случае конвективного движения в слое жидкости, подогреваемой снизу, если $-4(\mathrm{Re}_0)^2 a_0$ принять за число Релея, а число Прандтля положить равным единице. Таким образом, с точностью до бесконечно малых порядка δ, решение системы (1.3) совпадает с решением нелинейной задачи устойчивости конвекции в слое.

Исследованию системы (2.17) и расчету конвективного движения жидкости посвящено много работ (библиографию см., например, в [8], гл. I, § 29).

В силу аналитичности получаем

$$(2.18)\qquad C_{20} = g_* + \delta g_{*1} + \delta^2 g_{*2} + \dots$$

Константа g_* соответствует задаче конвекции и строго доказано [2], что $g_* > 0$. Из (2.18) следует, что $C_{20} > 0$ при достаточно малых δ. Используя результаты работ [2, 3], приходим к следующему утверждению.

Теорема. Если зазор между вращающимися цилиндрами достаточно мал и их угловые скорости достаточно близки, то течение Куэтта теряет устойчивость при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. При этом возникает новое стационарное, единственное с точностью до сдвига вдоль оси цилиндров течение, устойчивое при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_*$ и аналитически зависящее от малого параметра $\varepsilon = (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_*)^{1/2}$.

3. Численные расчеты. Для конечного δ разыскивалось вторичное $2\pi / \alpha$ периодическое по z решение в виде рядов Ляпунова — Шмидта

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{v}_k, \qquad \mathbf{v}_1 = \beta_1 \boldsymbol{\varphi}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — собственный вектор линеаризованной задачи, соответствующей (1.3). Вектор $\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\pi/2\alpha}^{\pi/2\alpha} \int_1^R \varphi_r(r, z)\, r\, dr\, dz = \frac{2}{\alpha}$$

Для расчета амплитуды β_1 и Re_* использовалась методика, изложенная в [3].

Асимптотические значения β_1 и Re_* при $\delta \to 0$ получены с помощью результатов расчета конвективного течения жидкости в слое.

Все вычисления проводились при $\alpha = 3.115$, $\Omega = 1 / R^2 - 0.05\delta$. Результаты расчета приводятся ниже:

$R =$	1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.5
$\mathrm{Re}_* =$	130.68	126.95	126.05	125.29	124.66	124.14	123.18
$\beta_1 \cdot 10^3 =$	0.0217	0.0226	0.0555	0.1118	0.1990	0.3248	1.0175

При $\delta \to 0$ значения β_1 и Re_* стремятся к их предельным значениям

Авторы благодарят И. В. Булаеву и Г. К. Тер-Григорьянца, предоставивших им свои расчеты.

Поступила 18 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jeffreys H.* Some cases of instability in fluid motion. Proc. Roy. Soc., A., 1928, vol. 118, No 779, p. 195—208.
2. *Юдович В. И.* Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
3. *Овчинникова С. Н.*, *Юдович В. И.* Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
4. *Крылов А. Л.* Доказательство неустойчивости одного течения вязкой несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4.
5. *Юдович В. И.* Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
6. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Вайнберг М. М.*, *Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
8. *Монин А. С.*, *Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. I. М., «Наука», 1965.