

О ПРАВИЛЕ «ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ» ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В. М. Дворецкий, М. Я. Иванов,
Б. А. Коняев, А. Н. Крайко

(Москва)

Проводится обобщение известного правила эквивалентности или «площадей» [1, 2], доказанного ранее в случае стационарного обтекания идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом тонких остроконечных (или затупленных — при гиперзвуке) тел, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной. Согласно этому правилу, волновое сопротивление пространственного тела равно волновому сопротивлению осесимметричного тела с таким же распределением площади поперечного сечения вдоль оси. Обобщение проводится на случаи стационарного и нестационарного пространственного обтекания нетонких тел, а также внутренних течений и основывается на процедуре осреднения по угловой переменной цилиндрической системы координат. Строго говоря, такая процедура справедлива для тел, близких к осесимметричным. В то же время численное решение достаточно широкого круга внешних и внутренних задач, выполненное в работе, демонстрирует применимость обобщенного правила эквивалентности для существенно неосесимметричных конфигураций¹.

1. Целью данного исследования является обоснование правила эквивалентности для стационарных и нестационарных течений идеального газа, близких к осесимметричным. Отличие течения от осесимметричного может быть вызвано пространственностью обтекаемых поверхностей и неосесимметричностью начальных и граничных условий, а также силовых полей и внешних источников энергии и массы, если последние присутствуют в задаче. Пусть указанные причины таковы, что параметры потока почти всюду близки к параметрам некоторого «исходного» осесимметричного течения, отвечающего отсутствию подобных причин. Исключение могут составлять малые окрестности тех поверхностей разрыва, которые получаются в результате деформации исходных осесимметричных и в дальнейшем (в отличие от обычной терминологии) называются сильными. Наряду с этим в потоке могут возникать и существенно неосесимметричные разрывы малой интенсивности, в дальнейшем называемые «слабыми».

С учетом типа рассматриваемых течений исследование удобно проводить в цилиндрической системе координат $x\varphi$, ориентация оси x которой обеспечивает слабую зависимость формы обтекаемых поверхностей и других условий, определяющих течение, от угла φ .

¹ Как недавно стало известно авторам, для стационарного обтекания равномерным дозвуковым или сверхзвуковым потоком нетонких тел, близких к телам вращения, обобщенное правило эквивалентности несколько иным путем доказано в работе: Коган М. Н. О сопротивлении тел, близких к телам вращения. Инж. ж., 1961, т. 1 вып. 3, стр. 156—158.

Обозначим через u , v и w — проекции вектора скорости u на оси цилиндрической системы координат. Тогда условие непротекания на обтекаемых поверхностях записывается в форме

$$(1.1) \quad u f_x^w - v + w f_\varphi^w / y + f_t^w = 0 \quad \text{при } y = f^w(t, x, \varphi)$$

Здесь $y = f^w(t, x, \varphi)$ — уравнение обтекаемой поверхности, f^w — известная функция своих аргументов, а нижними индексами обозначены соответствующие частные производные.

Введем осесимметричные поверхности $y = F^w(t, x)$, близкие к обтекаемым пространственным поверхностям, уравнения которых запишем в виде

$$(1.2) \quad y = F^w(t, x) + \varepsilon_w \delta f^w(t, x, \varphi)$$

Функции F^w и δf^w введем равенствами

$$(1.3) \quad F^w(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^w(t, x, \varphi) d\varphi, \quad \varepsilon_w \delta f^w(t, x, \varphi) = \\ = f^w(t, x, \varphi) - F^w(t, x)$$

причем в качестве ε_w возьмем максимальное (по модулю для всех t , x и φ) значение разности, стоящей в правой части второго равенства. В силу этого $|\delta f^w| \leq 1$. Для тел, близких к осесимметричным, $\varepsilon_w \ll 1$ (здесь и далее предполагается, что все величины отнесены к характерным параметрам соответствующей задачи), и с точностью до ε_w включительно F^w , определенное по (1.3), совпадает со средним «по площади», т. е.

$$(1.4) \quad F^w(t, x) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f^w(t, x, \varphi)]^2 d\varphi \right\}^{1/2}$$

Отметим, что в общем случае малость ε_w в (1.3) недостаточна для обеспечения близости потока к осесимметричному. Дело в том, что малость ε_w еще не означает малости производной f_φ^w , входящей в условие непротекания (1.1), так как порядок f_φ^w определяется не только величиной $\varepsilon_w \delta f^w$, но и характером ее изменения по φ . Если, например, это изменение таково, что $\delta f_\varphi^w \sim 1 / \varepsilon_w$, то $f_\varphi^w \sim 1$. В случае большой закрутки потока, когда $w \sim u$ или $w \sim v$, это в силу (1.1) вызовет значительную неосесимметричность течения (по крайней мере, вблизи тела) даже при $\varepsilon_w \ll 1$ в (1.3). Поэтому при дальнейшем анализе будем предполагать, что рассматриваемые поверхности таковы, что $\delta f_\varphi^w \sim 1$.

Поверхности сильных разрывов $y = f^s(t, x, \varphi)$ по аналогии с (1.2) запишем в форме

$$(1.5) \quad y = F^s(t, x) + \varepsilon_s \delta f^s(t, x, \varphi)$$

где функции F^s , δf^s и параметр ε_s введены так же, как F^w , δf^w и ε_w в (1.2), причем в общем случае $\varepsilon_s \neq \varepsilon_w$.

Пусть ω — пространственная область течения. Введем осесимметричную область Ω , ограниченную поверхностями $y = F^w(t, x)$ с функциями F^w из (1.3) или (1.4) и состоящую из осесимметричных подобластей Ω_i , разделенных осесимметричными поверхностями сильных разрывов $y = F^s(t, x)$. Всюду вне малых окрестностей границ Ω_i поля параметров газа

в ω и Ω принимаются совпадающими, а в указанных окрестностях получаются аналитическим продолжением из ω . В силу этого можно считать, что всюду в Ω_i параметры потока удовлетворяют исходным уравнениям пространственного течения, справедливым в ω .

2. Пусть $\sigma = \sigma(t, x, y, \varphi)$ — произвольный параметр потока, который теперь в соответствии с описанной выше процедурой определен не только в ω , но и в осесимметричной области Ω . Это позволяет провести осреднение по φ согласно формуле

$$\Sigma(t, x, y) \equiv \langle \sigma \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(t, x, y, \varphi) d\varphi$$

Здесь и далее большой буквой обозначена соответствующая средняя величина, а интегрирование по φ выполняется при фиксированных прочих переменных. Тогда аналогично (1.2) как в ω , так и в Ω можно написать, что

$$(2.1) \quad \sigma = \Sigma(t, x, y) + \varepsilon_\sigma \delta\sigma(t, x, y, \varphi)$$

где параметр ε_σ вводится как максимум (по всей рассматриваемой области независимых переменных) модуля разности $(\sigma - \Sigma)$, в силу чего $|\delta\sigma| \leq 1$.

В осесимметричной области Ω средние параметры, т. е. Σ , могут терпеть разрывы при переходе только через осесимметричные поверхности $y = F^s(t, x)$, введенные выше. В то же время $\delta\sigma$ могут получать скачкообразные приращения также на существенно неосесимметричных поверхностях слабых разрывов.

Функции, задающие начальные распределения параметров (при $t = 0$), их распределения в набегающем потоке (например, при $x = -\infty$), силовые и прочие поля, связанные с внешними источниками, также можно представить в форме (2.1). Пусть $\varepsilon_0, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\alpha, \dots$ — малые параметры, отвечающие соответствующим распределениям. В общем случае эти параметры независимы и даже могут различаться по порядку величин. То же самое тем более справедливо в отношении параметров ε_σ , характеризующих неосесимметричность распределений параметров потока. Тем не менее, введя $\varepsilon = \max(\varepsilon_w, \varepsilon_0, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_s, \varepsilon_\sigma)$, любое из соотношений (1.2), (1.5) и (2.1) можно записать в форме

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y &= F^w(t, x) + \varepsilon \Delta f^w(t, x, \varphi) \\ y &= F^s(t, x) + \varepsilon \Delta f^s(t, x, \varphi) \\ \sigma &= \Sigma(t, x, y) + \varepsilon \Delta \sigma(t, x, y, \varphi) \end{aligned}$$

Аналогичные представления имеют место для распределений параметров при $t = 0$ и в набегающем потоке, а также для силовых и прочих внешних полей. Согласно определению ε , для любой функции ζ имеем: $\Delta \zeta = (\varepsilon_\zeta / \varepsilon) \delta \zeta$, причем, так как $\varepsilon_\zeta \leq \varepsilon$, то максимум $|\Delta \zeta|$ заведомо не превышает единицы. Кроме того, в силу способа осреднения по φ

$$(2.3) \quad \int_0^{2\pi} \Delta \zeta d\varphi = \frac{\varepsilon_\zeta}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \delta \zeta d\varphi = 0$$

Пусть $\chi(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ — произвольная непрерывная функция параметров потока $\sigma_1, \sigma_2, \dots$. Тогда, пользуясь представлениями (2.2), разложением χ по $(\sigma_1 - \Sigma_1), \dots$ и свойством (2.3), можно показать, что

$$(2.4) \quad \langle \chi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \rangle = \chi(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots) + O(\varepsilon^2)$$

Отсюда, в частности, следует, что термодинамические связи между средними параметрами совпадают с точностью до ε включительно с аналогичными связями между истинными величинами.

3. Для любого параметра на поверхности тела, например для давления $p^w(t, x, \varphi)$, согласно определениям, введенным выше, имеем

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p^w(t, x, \varphi) &= P(t, x, f^w) + \varepsilon \Delta p(t, x, f^w, \varphi) = \\ &= P^w(t, x) + \varepsilon [(\partial P / \partial y) \Delta f^w + \Delta p]_{y=F^w} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

где $P^w(t, x) = P(t, x, F^w)$. С учетом этого разложения, первой формулы (2.2) и свойства (2.3) можно показать, что проекция на ось x сил давления, действующих в момент времени t на участок поверхности тела, заключенный между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$, равна

$$(3.2) \quad \begin{aligned} X(t, x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{2\pi} p^w(t, x, \varphi) f^w(t, x, \varphi) f_x^w(t, x, \varphi) d\varphi dx = \\ &= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} P^w(t, x) F^w(t, x) F_x^w(t, x) dx + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (3.2), X , а также, как нетрудно показать, и коэффициент волнового сопротивления с точностью до ε включительно определяется интегралом от средней (по φ) величины, который берется вдоль поверхности осесимметричной конфигурации, эквивалентной исходной пространственной в смысле распределения среднего радиуса (или с той же точностью — площади поперечного сечения) по x .

Как будет показано далее, уравнения, а также начальные и граничные условия, определяющие средние величины, суть уравнения и условия осесимметричной задачи о течении в Ω . При этом исходные пространственные конфигурации, силы и другие внешние источники, а также функции, дающие распределения параметров при $t = 0$ и на границах рассматриваемой области (если такие имеются), заменяются на осесимметричные в соответствии с процедурой осреднения по φ . Данное положение можно рассматривать как обобщение правила эквивалентности на случай произвольных течений идеального газа, близких к осесимметричным.

Наметим в общих чертах путь доказательства сформулированного правила.

Любое из уравнений течения, т. е. уравнение неразрывности, три уравнения импульса и уравнение энергии можно записать в форме

$$(3.3) \quad \frac{\partial ya}{\partial t} + \frac{\partial yb}{\partial x} + \frac{\partial yc}{\partial y} + \frac{\partial de}{\partial \varphi} + g = 0$$

Здесь a, b, c и e — известные функции параметров потока, а g — возможно, и независимых переменных (например, при наличии внешних

сил — заданных функций времени и координат). Уравнения (3.3) выполняются в подобластях непрерывности параметров осесимметричных областей Ω_i . Внутри Ω_i могут располагаться существенно неосесимметричные поверхности слабых разрывов (в смысле, определенном выше). Если $\varphi = \Phi(t, x, y)$ — уравнение такой поверхности, а $[a], [b], \dots$ — разности значений параметров a, b, \dots на разрыве, то соответствующий закон сохранения имеет вид

$$(3.4) \quad y(\Phi_t [a] + \Phi_x [b] + \Phi_y [c]) - [e] = 0 \quad \text{при } \varphi = \Phi(t, x, y)$$

Интегрируя (3.3) по φ при фиксированных t, x и y по каждому из интервалов непрерывности параметров из $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, складывая получающиеся уравнения и учитывая (3.4), после некоторых преобразований приходим к уравнению

$$(3.5) \quad \frac{\partial y \langle a \rangle}{\partial t} + \frac{\partial y \langle b \rangle}{\partial x} + \frac{\partial y \langle c \rangle}{\partial y} + \langle g \rangle = 0$$

справедливому в каждой осесимметричной подобласти Ω_i . Наконец, замена в соответствии с (2.4) средних $\langle a \rangle, \dots$ соответствующими функциями средних параметров (например, $\langle \rho u \rangle$ — на $R U$), которые в данном случае обозначим через A, \dots , приводит к уравнению

$$(3.6) \quad \frac{\partial y A}{\partial t} + \frac{\partial y B}{\partial x} + \frac{\partial y C}{\partial y} + G = 0$$

Данное уравнение в отличие от (3.5), которое является точным, выполняется с точностью до ε включительно.

Соотношения на осесимметричных поверхностях сильных разрывов получаются в результате линеаризации соответствующих законов сохранения, выполняющихся на исходных неосесимметричных поверхностях, снесения всех параметров на осесимметричные поверхности $y = F^s(t, x)$ при помощи формул типа (3.1) и последующего интегрирования по φ от 0 до 2π . Получающееся в результате соотношение, дополняющее (3.6) на поверхностях разрыва, с точностью до ε включительно имеет вид

$$(3.7) \quad F_t^s [A] + F_x^s [B] - [C] = 0 \quad \text{при } y = F^s(t, x)$$

Поступая аналогичным образом с условием непротекания (1.1), с той же точностью получим

$$(3.8) \quad U F_x^w - V + F_t^w = 0 \quad \text{при } y = F^w(t, x)$$

Наконец, начальные условия и условия в набегающем потоке (и на других границах Ω , отличных от поверхностей тел, если такие имеются) для P, U, \dots , согласно определению средних, получаются осреднением по φ заданных начальных и граничных распределений p, u, \dots . Указанные условия вместе с уравнениями (3.6), соотношениями на сильных разрывах (3.7) и условием непротекания (3.8) формулируют некоторую задачу об осесимметричном течении в Ω . Решение этой задачи дает, в частности, распределение P^w на обтекаемых поверхностях и, согласно (3.2), — интеграл сил давления X .

Поскольку в правых частях используемых при решении уравнений опущены члены порядка ε^2 , то естественно ожидать, что ошибка в определении P^w , а следовательно, и X будет того же порядка. В действительности, однако, поведение указанной ошибки в некоторых случаях может зависеть не только от величины отброшенных членов, но и от размера D той части области Ω , течение в которой определяет P^w на рассматриваемом участке тела. Так, например, для стационарных сверхзвуковых течений дополнительно требуется, чтобы $D \sim 1$. В то же время, если $D \sim 1/\varepsilon$, то ошибка в определении P^w в указанном случае может стать величиной порядка ε .

4. Процедура, использованная выше, напоминает процедуру осреднения по площади, в результате которой получаются уравнения одномерного течения в каналах. Та же процедура, являясь достаточно простой и общей, может быть применена для обоснования правила эквивалентности в случае более сложных течений (например, неравновесных). В то же время возможны различные модификации данного подхода, которые в некоторых случаях могут оказаться предпочтительными. Опишем одну из таких модификаций, причем для простоты ограничимся случаем отсутствия в потоке существенно неосесимметричных поверхностей слабых разрывов (в принятом выше смысле).

Пусть малые параметры ε_k , где $k = 1, \dots, n$, характеризуют различные причины, обуславливающие пространственность течения, т. е. отличие формы тел, начальных и граничных распределений, а также сил и других внешних источников от осесимметричных. Допустим, что для любого параметра течения справедливы разложения по целым степеням ε_k

$$(4.1) \quad \sigma = \sigma_0(t, x, y) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \sigma_k(t, x, y, \varphi) + \dots$$

где σ_0 — решение некоторой осесимметричной задачи, а многоточием обозначены следующие члены разложения.

Чтобы получить условия, определяющие σ_k , решение осесимметричной задачи аналитически продолжается в окрестности границ областей ω_i , и при помощи формул типа (3.1) условие непротекания и соотношения на сильных разрывах сносятся на соответствующие осесимметричные поверхности. Подставляя в полученные условия разложения (4.1) и учитывая, что функции σ_0 дают решение осесимметричной задачи, обычным путем приходим к линейным соотношениям, связывающим σ_k одно с другим, а в условии непротекания и с функцией, определяющей отличие тела от осесимметричного. Так, если уравнение поверхности тела записать в виде

$$y = f_0^w(t, x) + \varepsilon_1 f_1^w(t, x, \varphi)$$

то условие непротекания (1.1) приведет к n связям типа ($k = 1, \dots, n$)

$$(4.2) \quad v_k = u_k f_{0x}^w + (f_{1t}^w + u_0 f_{1x}^w + w_0 f_{1\varphi}^w / f_0^w) \delta_{1k} \quad \text{при } y = f_0^w(t, x)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Аналогичный вид имеют линеаризованные соотношения на сильных разрывах, а также начальные и граничные условия, отличные от (4.2).

Аналогичным образом у результате линеаризации исходной нелинейной системы получается n линейных систем для σ_k , различающихся только правыми частями. Любая из указанных систем имеет вид

$$(4.3) \quad L(\sigma_k) = g_k$$

Здесь $L(z)$ — линейный дифференциальный оператор, действующий на вектор-столбец z ; σ_k — вектор-столбец с компонентами u_k, v_k, \dots , а g_k — вектор-столбец, компоненты (или одна из компонент) которого отличны от нуля в случае неосесимметричности внешних сил или источников массы и энергии. Коэффициенты оператора

$L(z)$ выражаются через параметры осесимметричного решения и их частные производные и, следовательно, как и коэффициенты (4.2), не зависят от φ . В систему (4.3) удобно включать также получающиеся в результате линеаризации уравнения состояния конечные линейные связи между возмущениями термодинамических параметров.

При выполнении разложений (4.1) имеем

$$(4.4) \quad X(t, x_1, x_2) = X_0(t, x_1, x_2) + 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \varepsilon_1 p_0 (f_0^w \langle f_{1x}^w \rangle + f_{0x}^w \langle f_1^w \rangle) + \right. \\ \left. + f_0^w f_{0x}^w \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \langle p_k \rangle \right\} dx + \dots$$

Здесь X_0 — интеграл сил, действующих на осесимметричное тело, $\langle z \rangle$ — среднее по φ , подынтегральное выражение вычисляется при $y = f_0^w$ и многоточием обозначены члены более высокого порядка.

Уравнения и условия, определяющие $\langle \sigma_k \rangle$, а следовательно, и $\langle p_k \rangle$ при $y = f_0^w$, входящее в (4.4), получаются интегрированием по φ от 0 до 2π системы (4.3), условий (4.2) и прочих линеаризованных начальных и граничных условий. Если, пользуясь произволом в выборе осесимметричной поверхности $y = f_0^w$, а также осесимметричных распределений сил, начальных параметров и т. д., взять $f_0^w = F^w$ и так же, как и прежде, определить прочие из указанных функций, т. е. как средние по φ , то величины $\langle f_1^w \rangle$, $\langle f_{1x}^w \rangle$, $\langle g_k \rangle$, ... обратятся в нули. Кроме того, в осредненные уравнения и условия не войдут средние от производных по φ , поскольку при отсутствии слабых разрывов $\langle z_\varphi \rangle = 0$. В результате система уравнений и условий для определения средних от всех добавок станет не только линейной, но и однородной. При выполнении условий, оговоренных в конце п. 3, тривиальное решение, которое удовлетворяет всем уравнениям и условиям получившейся линейной задачи, дают коэффициенты первых членов разложения (4.1) с погрешностью порядка $O(\varepsilon_k)$. В таких случаях $X(t, x_1, x_2) = X_0(t, x_1, x_2)$ с точностью до $O(\varepsilon_k)$ включительно.

Описанный подход использовался, например, в [3,4] для получения уравнений, определяющих некоторые интегральные характеристики тонких пространственных конфигураций (тел с протоком и крыльев) в сверхзвуковом потоке¹, и отличается от развитого в п. 1—3 тем, что процедуре осреднения по φ предшествует линеаризация не только условия непротекания и соотношений на сильных разрывах, но и дифференциальных уравнений течения. На первый взгляд оба подхода представляются эквивалентными. Для многих течений это, по-видимому, на самом деле так, однако указанная эквивалентность имеет место далеко не всегда. В ряде важных случаев (например, при трансзвуковых скоростях) несправедливы разложения типа (4.1) с коэффициентами, определяемыми системой (4.3), на линейности которой основывается выполненный выше анализ. В таких случаях соответствующая система оказывается нелинейной и не может быть исследована столь простым образом, как выше. В то же время при первом подходе важна только малость отклонений параметров от некоторых средних (по φ) значений независимо от того, какими уравнениями эти отклонения описываются. В связи с этим подчеркнем, что параметр ε , введенный в (2.2), совпадает (по порядку величины) с $\max \varepsilon_k$ только в тех случаях, когда справедливы разложения (4.1).

5. Примеры, которые приводятся ниже, иллюстрируют применимость правила эквивалентности в случае стационарных течений. Рассмотренные примеры включают внешние и внутренние задачи о трансзвуковых и сверхзвуковых течениях совершенного газа с отношением теплоемкостей $\kappa = 1.4$.

Первые примеры относятся к обтеканию конусов, имеющих поперечные сечения различной формы. Расчеты проводились с использованием процесса установления по радиальной переменной сферической системы координат, как это описано в [5], причем

¹ Тем же путем М. Н. Коган (см. сноску на стр. 1004) доказал обобщенное правило эквивалентности для нетонких тел, близких к телам вращения.

численное интегрирование уравнений пространственного течения осуществлялось по разностной схеме, предложенной в [6, 7].

Все исследованные случаи отвечают обтеканию тел под нулевым углом атаки. При этом, наряду с круговыми и эллиптическими конусами, рассматривались конусы, поперечные сечения которых близки к квадрату и равнобедренному треугольнику. Такие конусы (а также сопла с аналогичной формой поперечных сечений) в дальнейшем будут называться «квадратными» и «треугольными». Граница поперечного сечения треугольного конуса состояла из трех прямолинейных отрезков, плавно сопрягавшихся дугами окружности. Если длина прямолинейного отрезка при любом x равна l^0x , то радиус соответствующей окружности брался равным $l^0x / 2\sqrt{3}$. Аналогичным образом строилось поперечное сечение квадратного конуса. Здесь соответствующие величины бралась равными l^0x и $l^0x / 2$. Коэффициенты l^0 при этом находились из условия равенства (при одинаковых x) площадей поперечных сечений исследуемых тел и кругового конуса с полууглом при вершине θ_k . Для эллиптических конусов с фиксированным отношением длин полуосей a/b эллипса, образующего поперечное сечение, из того же условия находилась величина $a^0 = a/x$.

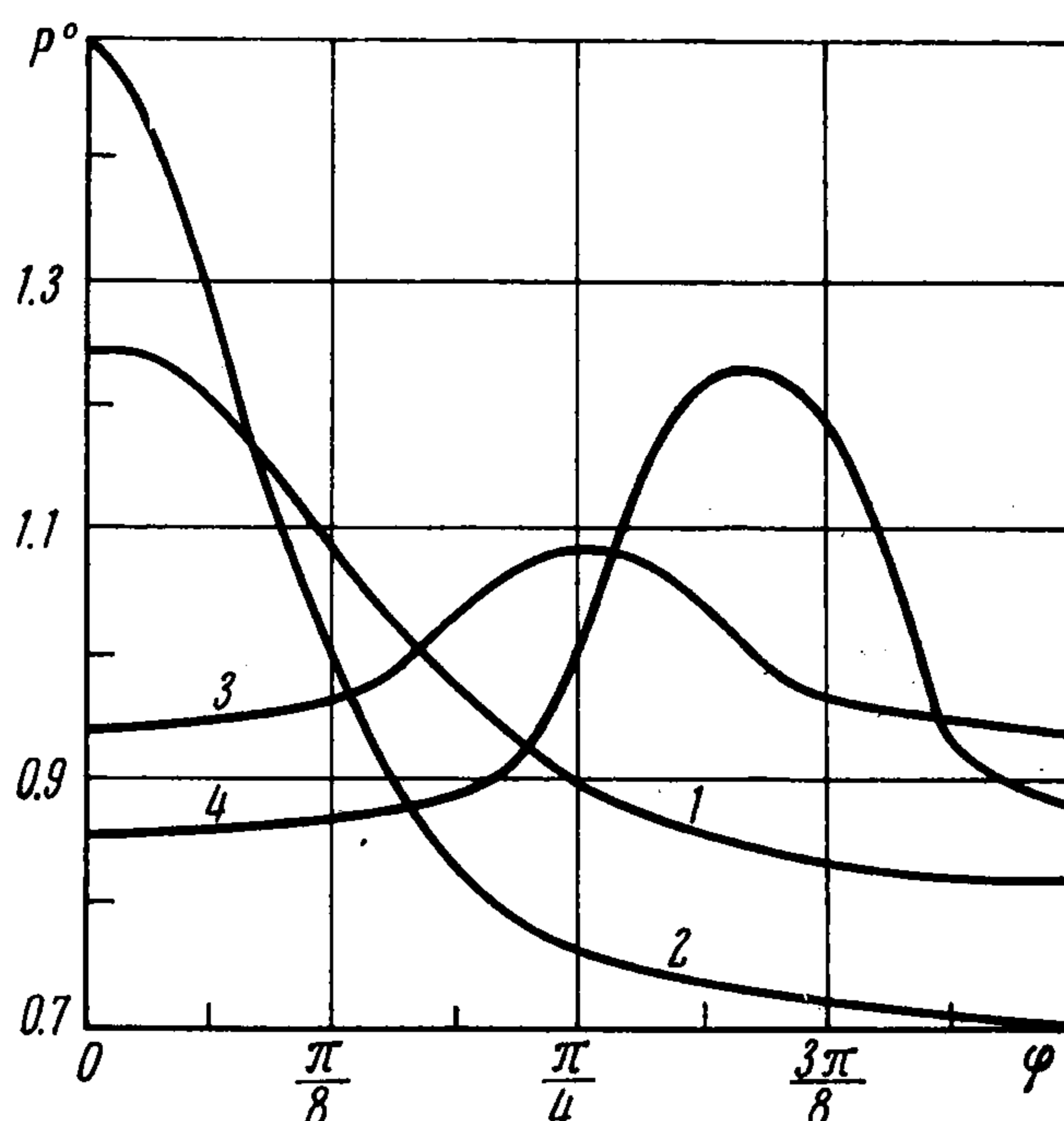
Результаты расчетов обтекания сверхзвуковым потоком с $M_\infty = 5$ квадратного, треугольного и эллиптических конусов, эквивалентных по площади поперечного сечения круговому конусу с $\theta_k = 20^\circ$, приведены на фиг. 1, на которой p^0 — отношение давления на поверхности к соответствующей величине для кругового конуса. Кривые 1 — 4 отвечают эллиптическим с $a/b = 1.5$ и 2.0 , квадратному и треугольному конусам. При рассмотрении фиг. 1 следует иметь в виду наличие двух, четырех и трех плоскостей симметрии соответственно для эллиптических, квадратного и треугольного конусов и то, что максимумы p^0 располагаются в точках контура, максимально удаленных от оси x — линий пересечения плоскостей симметрии. Как видно из фигуры, отличие p^0 от единицы в данных случаях весьма значительно. В то же время величины, полученные осреднением указанных распределений по φ , и, согласно (3.1), совпадающие с p^0 , для тех же случаев оказались равными 0.96, 0.87, 1.01 и 0.93. Существенно меньшее отличие p^0 от единицы подтверждает общий вывод обобщенного правила эквивалентности, в силу которого отличие средних и осесимметричных величин есть $O(\varepsilon^2)$ при отличии локальных и средних параметров порядка ε .

Для тех же конусов вычислялись коэффициенты волнового сопротивления

$$c_x = 2(X - p_\infty S) / S \rho_\infty q_\infty^2$$

Здесь ρ — плотность, q — модуль скорости, индекс ∞ приписан параметрам набегающего потока, S — площадь поперечного сечения, причем для конических тел X и S — линейные функции x^2 , а c_x от x не зависит. Величины c_x для рассмотренных конических тел оказались равными 0.260, 0.256, 0.255 и 0.251 при 0.261 — в случае эквивалентного (по площади) кругового конуса, что соответствует максимальному отклонению в 4%.

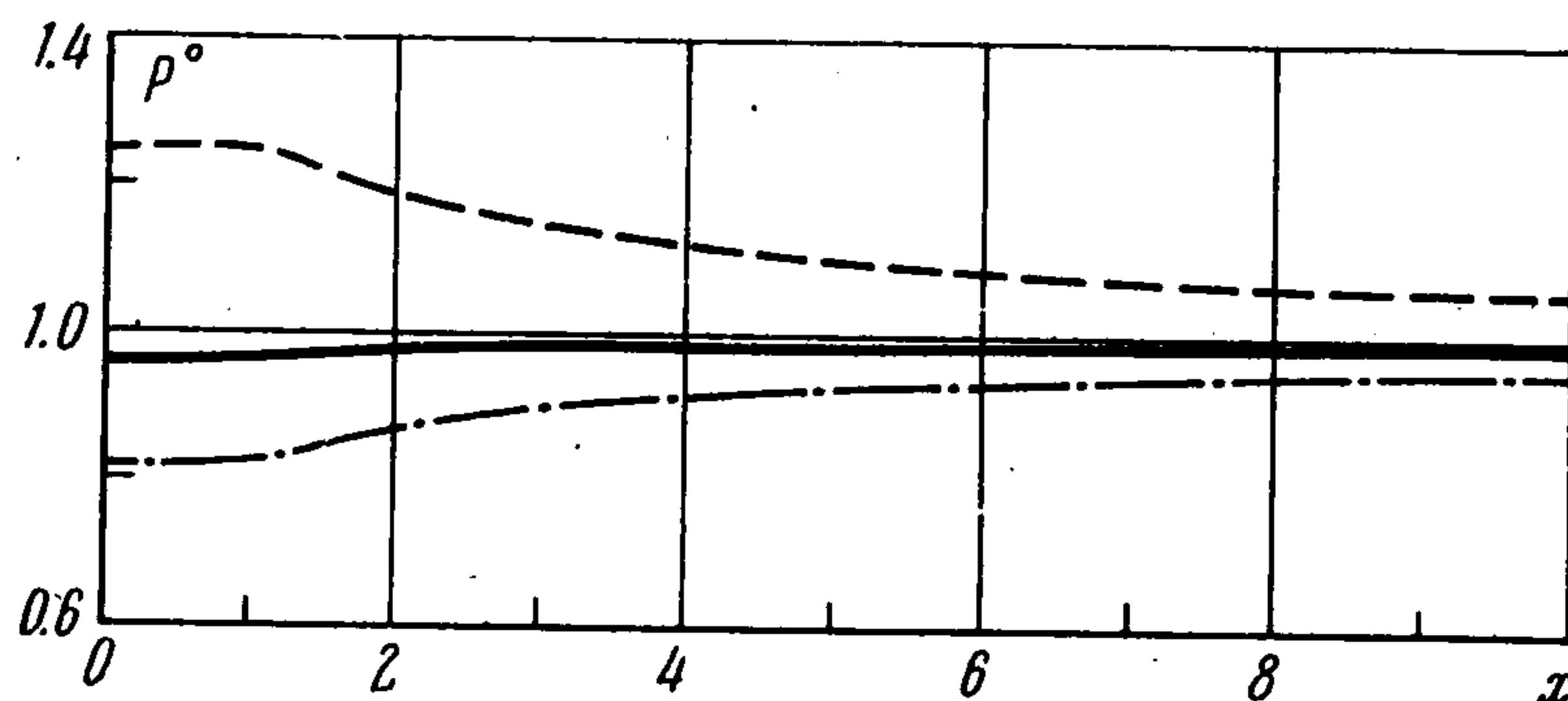
Представление о погрешностях правила эквивалентности при условиях, отличных от рассмотренных (по M_∞ и θ_k), дают приведенные ниже результаты для эллиптического конуса с $a/b = 2.0$. В случае $M_\infty = 5$ коэффициенты волнового сопротивления трех эллиптических конусов, эквивалентных круговым конусам с $\theta_k = 10, 20$ и 25° , оказались равными 0.076, 0.26 и 0.38. Для круговых конусов $c_x = 0.075, 0.26$ и



Фиг. 1

0.37, что отвечает максимальному отличию, не превышающему 3%. Для эллиптического конуса, эквивалентного круговому с $\theta_k = 20^\circ$, $c_x = 0.29$, 0.26 и 0.24 при $M_\infty = 3.0$, 5.0 и 10 соответственно. Для кругового конуса в тех же случаях $c_x = 0.28$, 0.26 и 0.25, т. е. и здесь отличие лежит в тех же пределах.

Наряду с обтеканием конусов рассчитывалось обтекание при $M_\infty = 5.0$ четырех пространственных остроконечных тел. Каждое тело имело поперечное сечение фиксированной формы и состояло из конической головной части, эквивалентной круговому



Фиг. 2

конусу с $\theta_k = 20^\circ$, и плавно примыкающего к ней параболического оживала. В качестве головных брались все рассмотренные выше (для $M_\infty = 5.0$ и $\theta_k = 20^\circ$) конусы, полная длина тел, отнесенная, как и координаты x и y , к длине головной части, равнялась десяти. Исследованные конфигурации были эквивалентны телу вращения с уравнением параболической образующей $y = \sqrt{\alpha + \beta x}$, плавно сопрягающейся при $x = 1$ с конической головной частью и обеспечивающей двадцатикратное увеличение площади поперечного сечения от $x = 1$ до $x = 10$.

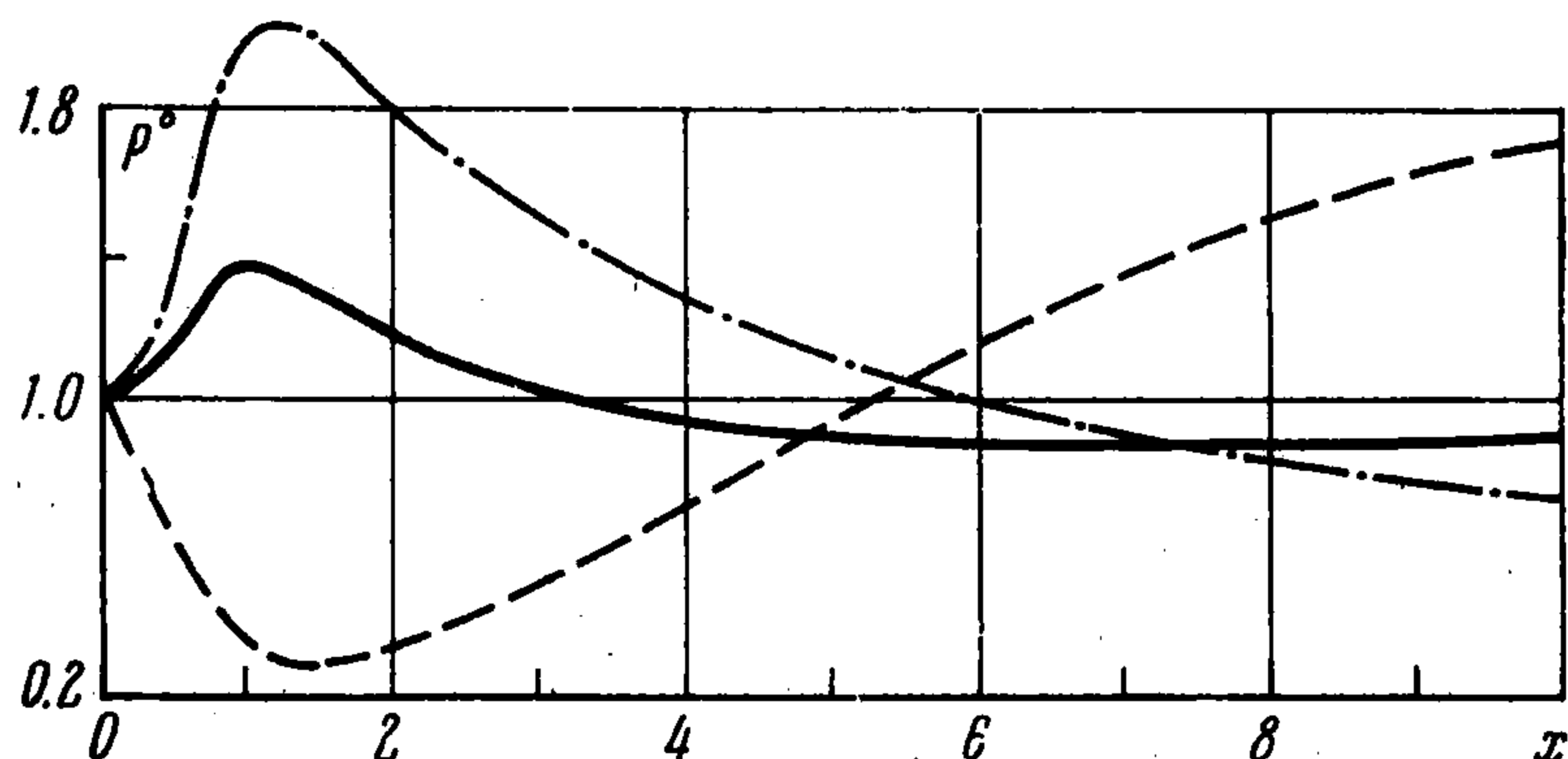
Неравномерность в распределении давления на поверхности тела с эллиптическим ($a/b = 2.0$) поперечным сечением (в этом случае неравномерность максимальна) показана на фиг. 2, на которой штриховой и штрихпунктирной линиями нанесены распределения p^0 по образующим, лежащим в плоскостях симметрии, которые проходят через большую и малую оси поперечного сечения. Сплошной кривой дано распределение по x соответствующей осредненной (по φ) величины. Коэффициенты волнового сопротивления c_x рассчитанных пространственных тел с эллиптическим ($a/b = 1.5$ и 2.0), квадратным и треугольным сечениями оказались равными в пределах точности счета (1–2%) c_x эквивалентного тела вращения.

Следующие примеры относятся к течению в сверхзвуковых частях трех пространственных сопел, эквивалентных осесимметричному, контур которого состоит из плавно сопрягающихся дуги окружности радиуса $r = 2$ с центром на оси y и участка параболы $y = \sqrt{\alpha + \beta x}$, где все размеры отнесены к y_0 — радиусу начального сечения. Коэффициенты α и β в приведенной формуле обеспечивали плавное сопряжение окружности и параболы и четырехкратное расширение исследованных сопел по y от $x = 0$ до $x = 10$, т. е. $y(10) = 4$. Поперечные сечения пространственных сопел были такими же, как поперечные сечения эллиптического (с $a/b = 2.0$), квадратного и треугольного конусов, рассмотренных выше. В начальных сечениях всех сопел (при $x = 0$) поток был сверхзвуковым и равномерным с $u_0 \equiv 1.1$, где скорость отнесена к своей критической величине q_* . Расчет велся в цилиндрических координатах по разностной схеме [6, 7].

Фиг. 3, построенная для эллиптического сопла по тому же принципу, что и фиг. 2, характеризует отличие распределений давления на стенке вдоль линий ее пересечения плоскостями симметрии. При этом точкам большой (малой) оси поперечного сечения отвечает штриховая (штрихпунктирная) кривая. Сплошной линией дано распределение осредненного по φ давления на стенке. Во всех случаях давление, как и ранее, отнесено к давлению на стенке эквивалентного осесимметричного сопла (при том же x).

Как видно из фиг. 3, неравномерность в распределении давления по φ в рассмотренном примере существенно больше, чем во внешних задачах. То же самое можно

сказать об отношении средних величин к соответствующим осесимметричным значениям, хотя оно заметно ближе к единице. Еще лучше правило эквивалентности выполняется по интегралам сил давления, которые для $x_1 = 0$ и $x_2 = 10$, т. е. для сопел с шестнадцатикратным расширением по площади, оказались равными: 1.618, 1.619 и 1.616 для эллиптического, квадратного и треугольного сопел, при $X = 1.634$ — для осесимметричного сопла (X , а также импульс потока I отнесены к $\rho_* g_*^2 y_0^2$, где ρ_* — критическая плотность потока). Значения импульсов в выходных сечениях тех же сопел

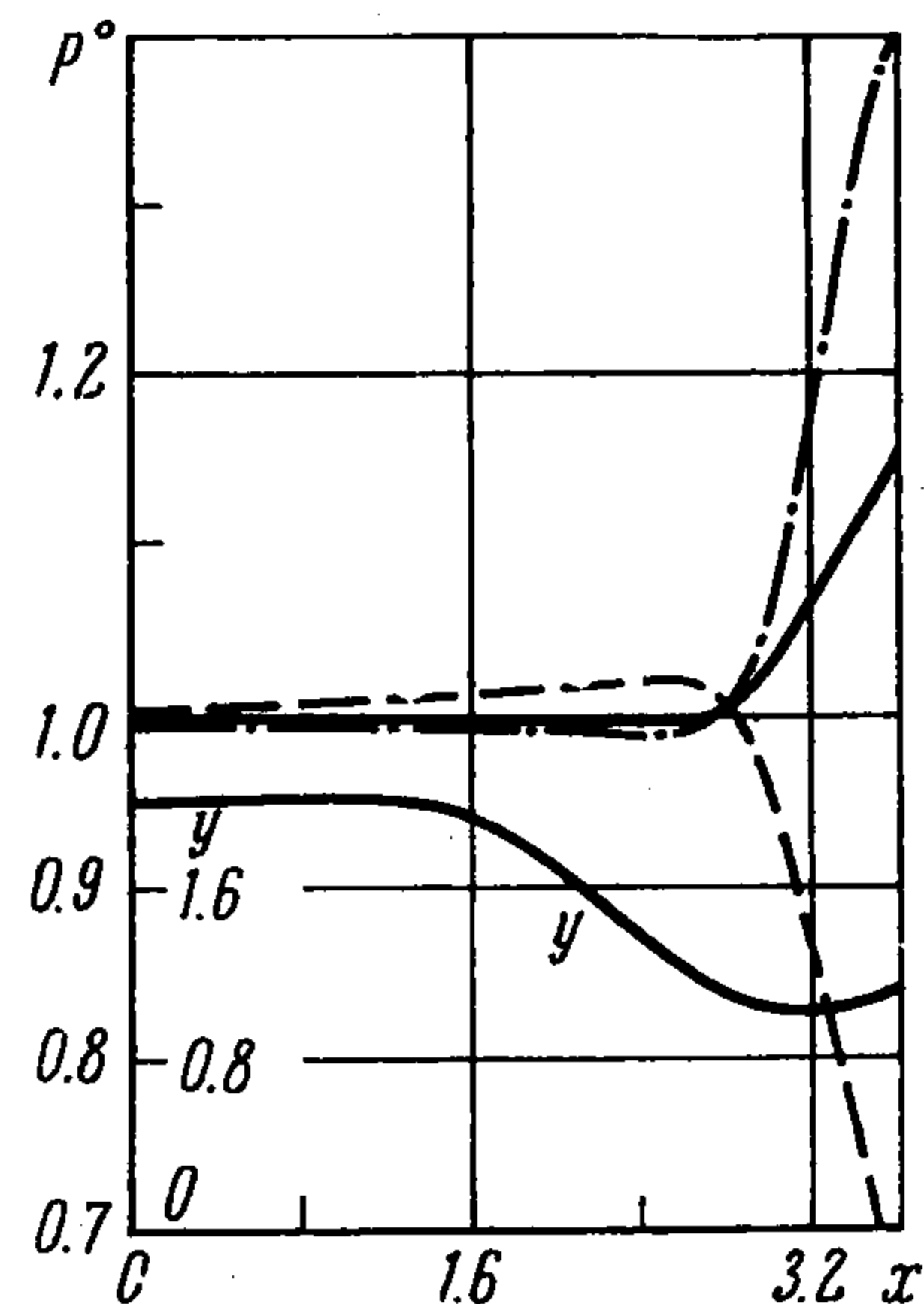


Фиг. 3

равны 6.964, 6.965, 6.962 и 6.980, что дает максимальное отличие в 0.25%. Такого же порядка отличие по импульсу (не более 0.5%) имеет место для всех сечений от $x = 0$ до $x = 10$.

Кроме того, был выполнен расчет двух примеров трансзвукового течения в сопле и около кормовой части полубесконечного цилиндра, поперечные сечения которых имели форму эллипса с $a/b = 2.0$. В обоих случаях стационарные распределения параметров вырабатывались в процессе установления по времени, как это описано в [8-10].

Пространственное сопло Лаваля было эквивалентно по площади осесимметричному, меридиональное сечение которого изображено в нижней части фиг. 4. На верхней части фиг. 4, аналогичной фиг. 3, приведены распределения давления по двум образующим стенки, а также изменение соответствующей средней величины. Отличие импульсов пространственного и осесимметричного сопел (порядка 0.4%) лежит в пределах точности вычислений. Аналогичная ситуация была обнаружена при расчете обтекания с $M_\infty = 0.9$ кормовой части, которая была эквивалентна кормовой части, рассмотренной в [10]. Последняя при $x = 0$ плавно примыкала к полубесконечному цилиндру, радиус которого был взят за характерный линейный размер. В точке $x = 2.5$ указанная кормовая часть, образованная окружностью радиуса $r = 9.68$, примыкала к другому полубесконечному цилиндру ($y \equiv 0.67$).



Фиг. 4

Представленные выше результаты расчетов свидетельствуют о справедливости обобщенного правила эквивалентности далеко вне использованных при его обосновании ограничений. Отметим, что в случае гиперзвукового обтекания тонких затупленных конусов экспериментальная проверка правила площадей была выполнена в [11].

В заключение авторы благодарят А. Б. Ватажина и Г. Г. Черного за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oswatitsch K.* The area rule. Appl. Mech. Rev., 1957, vol. 10, No. 12.
 2. *Ладыженский М. Д.* Пространственные гиперзвуковые течения газа. М., Машиностроение, 1968.
 3. *Коган М. Н.* Некоторые интегральные свойства сверхзвуковых течений. Тр. ЦАГИ, № 687, 1955.
 4. *Коган М. Н.* Некоторые вопросы пространственных сверхзвуковых течений. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
 5. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* К расчету сверхзвукового обтекания конических тел. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 6.
 6. *Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В.* Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2.
 7. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. II. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 3.
 8. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
 9. *Иванов М. Я., Крайко А. Н.* Расчет смешанного течения газа в соплах. В сб.: Труды секции по численным методам в газовой динамике второго международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, т. 2, М., ВЦ АН СССР, 1971.
 10. *Тагиров Р. К.* Расчет обтекания кормовых частей тел вращения дозвуковым или трансзвуковым потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
 11. *Красовский В. М.* Экспериментальное исследование обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком гелия. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.
-