УДК 539.3

ЗАМЕЧАНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. С. Кравчук

(Москва)

Дается способ упрощения и обобщения доказательства, приведенного в работе [1].

1. Пусть V — область, занятая упругим деформируемым телом, и пусть V^e — подобласти — конечные элементы; для простоты, как и в [1], положим $UV^e = V$. В каждой подобласти V^e поле перемещений $\mathbf{f}^e$ аппроксимируется по формуле [2]

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{N}^e \delta^e \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{f}^e$ — вектор перемещений точек внутри элемента с номером e, δ^e — вектор узловых перемещений, $\mathbf{N}^e$ — прямоугольная матрица, элементы которой — функции координат. Аппроксимацию поля перемещений во всей области V можно записать в виде

$$\mathbf{f}_n = \sum_s \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_{kn}^s \delta_{ks} \tag{1.2}$$

Здесь δ_{ks} — компоненты вектора перемещений k-го узла, функции $\mathbf{f}_{kn}{}^s$ являются кусочным образом определенными и отличными от нуля лишь в элементах, одна из вершин которых имеет номер k.

Система уравнений метода конечных элементов получается минимизацией функционала энергии на множестве функций вида (1.2).

Подобный способ решения задачи минимизации функционала энергии известен [3,4]; последовательность приближенных решений будет сходящейся к точному (обобщенному) решению в том случае, если выполнены условия 1) — 3) теоремы о сходимости (см. § 19 работы [3]).

2. Остановимся кратко на содержании работы [1]; в работе [5] аналогичные результаты получены для случая, когда оператор краевой задачи содержит производные произвольного порядка. Основные результаты работы [1] можно сформулировать в виде следующего утверждения: если функции $\mathbf{f}_{kn}{}^s$ содержат полиномы первой степени и, быть может, слагаемые выше первой, а максимальный диаметр области определения этих функций стремится к нулю при $n \to \infty$, то система функций $\{\mathbf{f}_{kn}{}^s\}$ полна в множестве решений краевой задачи теории упругости, обладающих непрерывными производными до второго порядка включительно. (Полнота понимается в смысле определения, данного в [3].)

Раздел V работы [1] посвящен исследованию сходимости метода; доказательство сходимости громоздкое и содержит недоказанное предположение о том, что вторые производные перемещений (решений) — непрерывные ограниченные функции в любой замкнутой подобласти V^e, если только плотность массовых сил является непрерывной по Гельдеру функцией.

3. Утверждения раздела V работы [1] можно доказать следующим способом.

Сформулированный выше основной результат раздела IV означает, что множество функций $\{\mathbf{f}_{kn}{}^s\}$ плотно в подмножестве D_A—области определения оператора A краевой задачи теории упругости гильбертова пространства, H_A—энергетического пространства этой же задачи. Учитывая, что H_A — замыкание D_A, заключаем, что условие 3) упомянутой выше теоремы С. Г. Михлина выполнено. Заметим далее, что для семейств последовательностей координатных функций $\{\mathbf{f}_{kn}{}^s\}$ выполнение условия 1) цитируемой теоремы, т. е. принадлежность энергетическому пространству H_A оператора A задачи в случае, когда $\mathbf{f}_{kn}{}^s$ представляют собой кусочно-полиномиальные функции, отличные от нуля в ограниченной области — окрестности узла с номером k, вытекает из представимости $\mathbf{f}_{kn}{}^s$ в виде пределов по норме H_A последовательностей элементов из D_A; последнее утверждение является следствием одной из теорем функционального анализа работы [6]. Выполнение условия 2) проверяется тем же способом, что и линейная независимость (или зависимость) конечной совокупности векторов.

Таким образом, сходимость метода конечных элементов для случая, когда функции $\mathbf{f}_{kn}{}^s$ удовлетворяют сформулированным в п. 2 ограничениям, установлена. Отметим, что скорость сходимости для выбранных систем координатных функций имеет порядок $\sqrt{h}$, где h — наибольший из максимальных диаметров конечных элементов; этот результат установлен в [1].

4. Утверждения раздела VI статьи [1] могут быть получены повторением приведенных выше рассуждений и IV раздела работы [1], если учесть, что для стержней и пластин структура элементов N_{ij} матрицы $\mathbf{N}^e$, соответствующих обобщенным перемещениям — углам поворота, такова

$$N_{ij}(x_1, x_2, \ldots) = l^e \psi_{ij}(x_1 / l^e, x_2 / l^e, \ldots)$$

обобщенным перемещениям — кривизнам

$$N_{ij}(x_1, x_2, \ldots) = (l^e)^2 \chi_{ij}(x_1 / l^e, x_2 / l^e, \ldots)$$

Здесь l^e — максимальный диаметр конечного элемента; функции ψ_{ij} и χ_{ij}, не зависящие от абсолютных размеров элемента, остаются ограниченными при неограниченном измельчении элементов.

В доказательство вместо касательного поля [1] следует рассматривать разложение функций перемещений, содержащих квадратичные по координатам слагаемые, а на координатные функции необходимо наложить требование, чтобы они содержали полиномы второй степени. Теоремы вложения С. Л. Соболева [6] позволяют утверждать, что для случая стержней и пластин сходимость по энергии, представляющая собой среднеквадратичную сходимость вторых производных, влечет за собой равномерную сходимость самих перемещений.

5. В работах [5,7,8] и др., как и в статье [1], сходимость метода фактически доказывается в норме $\mathrm{L}_2(V)$ в предположении о принадлежности решения пространству $\mathrm{C}(V)$, поэтому все сделанные выше замечания относительно статьи [1] переносятся и на [5,7,8]. Более общие и сильные результаты получаются при использовании аналогии между методом конечных элементов и вариационно-разностным методом [3,9]. С позиций вариационно-разностного метода метод конечных элементов есть способ перенумерации узлов сетки и неизвестных, после которого матрица разрешающей системы становится двумерной и приобретает ленточную структуру.

Из теории вариационно-разностного метода переносятся без изменения на метод конечных элементов результаты Ю. К. Демьяновича, Л. А. Оганесяна, С. А. Гусмана (см. [3]), С. Г. Михлина [10] и других по сходимости метода. Важным для метода конечных элементов является полученное в [9,11,12] ограничение на углы при вершинах конечных элементов, вытекающее из требования хорошей обусловленности разрешающей системы.

В заключение отметим, что близким по идеям к методу конечных элементов является метод сплайн-функций [13, 14], многие оценки и теоремы которого могут быть перенесены на метод конечных элементов. Аналогия между методом конечных элементов, вариационно-разностным и методом сплайн-функций отмечена и использована в [15].

Поступила 5 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oliveira E. R. A. E.* Completeness and convergence in the finite element method. Técnica, 1970, 33, № 403.
2. *Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.* The finite element method in structural and continuum mechanics. London, McCraw-Hill, 1967.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
4. *Courant R.* Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 49, No. 1, p. 1—23.
5. *Oliveira E. R. A. E.* Theoretical foundations of the finite element method. Internat. J. Solids Struct., 1968, vol. 4, No. 10.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
7. *Tong Pin, Pian T. H. H.* The convergence of finite element method in solving linear elastic problem. Internat. J. Solids Struct., 1967, vol. 3, No. 5.
8. *Linn P. P., Dhillon B. S.* Convergence of eigenvalue solutions in conforming plate bending finite elements. Internat. J. Numer. Methods in Engng, 1972, vol. 4, No. 2.
9. *Корнеев В. Г.* О методике конечных элементов для решения задач упругого равновесия. В сб.: Строительная механика сооружений. Тр. Ленинградск. политехн. ин-та, 1971.
10. *Михлин С. Г.* О координатных системах вариационно-разностного метода. Докл. АН СССР, 1971, т, 200, № 3.
11. *Оганесян Л. А.* Сходимость вариационно-разностных схем при улучшенной аппроксимации границы. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 1.
12. *Демьянович В. К., Демьянович Ю. К.* О скорости сходимости проекционных методов для параболических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 2.
13. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.
14. *Aubin J. P.* Interpolation et approximation optimales et spline functions. J. Math. Analysis. and Applic., 1968, vol. 24, No. 1.
15. *Fix G., Strang G.* Fourier analysis of the finite element method in Ritz—Galerkin theorie. Studies in Appl. Math., 1969, vol. 48, No. 3.

Технический редактор *Э. Ф. Бунеева*

Сдано в набор 25/VII-1974 г. Т-16721 Подписано к печати 23/IX-1974 г. Тираж 2860 экз.
Зак. 922 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 16,2

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10