Заметим, что при вычислении интегрального члена здесь удержаны лишь члены, содержащие первые гармоники. В общем случае при разложении подынтегральной функции в ряд Фурье члены, содержащие высшие гармоники, можно включить в уравнение, из которого определяется функция $u_1$. Выполняя описанную выше процедуру, получаем уравнения для определения $a$ и $\theta$, которые легко интегрируются. Дальнейшие выкладки очевидны.

Поступила 29 I 1973

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «ФАН», 1971.
2. *Митропольский Ю. А., Филатов А. Н.* Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, Укр. матем. ж., 1972, т. 24, № 1.
3. *Ильюшин А А., Мовлянкулов Х., Сунчалиев Р. М., Филатов А. Н.* О некоторых методах исследования нелинейных задач теории вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 1.
4. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. Механика полимеров, 1966, № 2.
5. *Ильющин А. А., Победря Б. К.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
6. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. Изд-во МГУ, 1971.
7. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
8. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.


---

УДК 539.3

# ЧИСТЫЙ СДВИГ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА СИСТЕМЕ ЩЕЛЕЙ

**В. Н. Беркович**

(Ростов-на-Дону)

**Рассматривается динамическая смешанная задача для упругого полупространства, ослабленного системой плоских щелей и находящегося в условиях антиплоской деформации.**

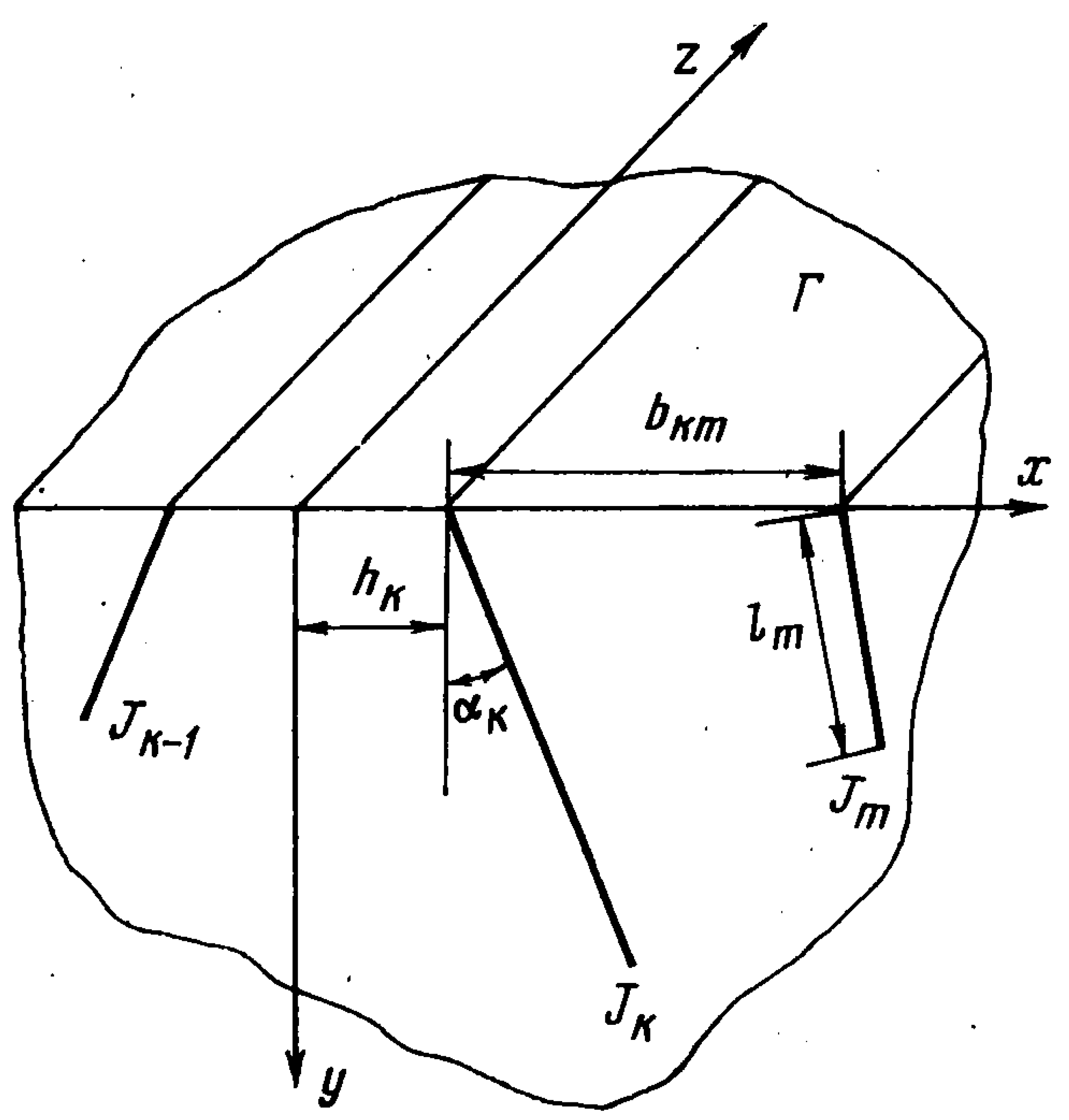
Ставится задача отыскания скачка напряжений на щелях в упругом полупространстве по заданным на них перемещениям сдвига. На основе метода, развитого в работах [1,2], система интегральных уравнений смешанной задачи приводится к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений с вполне непрерывным оператором. Изучаются вопросы разрешимости интегральных уравнений и бесконечной системы. Дается исследование решения в нулевом приближении.

Динамика упругого полупространства с разрезом изучалась в [3,4], где основное внимание сосредоточено на исследовании вопросов распространения трещин и проблем дифракции упругих волн на щелях.

1. Предполагается, что плоскости щелей $J_n$ имеют ширину $l_n$ ($n = 1,2,\ldots, N$), параллельны направлению пространственной координаты $z$ и неограничены в обе стороны (фигура). На каждой плоскости щели задаются гармонически меняющиеся во времени $t$ с круговой частотой $\omega$ касательные смещения

$$W_n^* (s, t) = \operatorname{Re} W_n^{\pm} (s)\, e^{-i\omega t}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant l_n$$

параллельные направлению оси $z$. Локальная координата $s$ вдоль берега разреза отсчитывается от свободной границы Г упругого полупространства. Знаки плюс и минус указывают соответственно на правый или левый берег разреза $J_n$.




В условиях установившихся колебаний требуется определить скачки напряжений на щелях

$$[\tau_n^* (s, t)] = \operatorname{Re} [\tau_n (s)] e^{-i\omega t}, \quad 0 \leqslant s \leqslant l_n$$

Сформулированная таким образом проблема сводится к следующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta w^\circ + k^2 w^\circ = 0, \quad k^2 = D\omega^2\mu^{-1} \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial w^\circ}{\partial y}\right|_\Gamma = 0, \quad w^\circ \Big|_{J_n^\pm} = W_n^\pm (s)$$

$$0 \leqslant s \leqslant l_n$$

Здесь $w^\circ$ — комплексная амплитуда смещений в упругом полупространстве, $D$ — плотность материала, $\mu$ — модуль сдвига.

Для получения интегрального уравнения смешанной задачи воспользуемся методом функции Грина [5]. Налагая на функцию Грина $G (\xi, \eta \mid x, y)$ для уравнения (1.1) дополнительное условие $(\partial G / \partial \eta) \mid_{\eta=0} = 0$, приходим к системе интегральных уравнений относительно неизвестных скачков напряжений на щелях. В безразмерной форме эта система имеет следующий вид:

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 k_{mn} (r, \rho) q_n (\rho) d\rho = f_m (r) \tag{1.2}$$

$$2\mu q_n (r) = [\tau_n (r)] l_n l_m^{-1}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

$$l_n w_n^\pm (r) = W_n^\pm (s), \quad l_n r = s$$

$$2 f_m (r) = w_m^+ (r) + w_m^- (r)$$

$$k_{mn} (r, \rho) = K_0 (\varkappa_n R_{mn}^+) + K_0 (\varkappa_n R_{mn}^-)$$

$$R_{mn}^\pm = [(r - r_{mn}^\pm)^2 + (\rho - \rho_{mn}^\pm)^2 \pm 2 (r - r_{mn}^\pm) (\rho - \rho_{mn}^\pm) \cos \psi_{mn}^\pm]^{1/2}$$

$$r_{mn}^\pm = d_{mn} \cos \alpha_n / \sin \psi_{nm}^\pm, \quad d_{mn} l_n = b_{mn} = h_m - h_n$$

$$\rho_{mn}^\pm = d_{mn} \cos \alpha_m / \sin \psi_{nm}^\pm, \quad \psi_{mn}^\pm = \alpha_n \pm \alpha_m$$

$$\varkappa_n = -i\lambda_n, \quad \lambda_n = k l_n, \quad m = 1, 2, \ldots, N$$

Здесь $K_0 (z)$ — функция Макдональда нулевого порядка.

Относительно введенных безразмерных параметров примем следующие предположения:

1) размеры щелей достаточно велики по сравнению с длиной волны сдвига, т. е. $\lambda_n \gg 1$;

2) взаимная удаленность щелей на свободной поверхности Г по сравнению с их размерами также достаточно велика, т. е. $d_{mn} \gg 1$;

3) $| r_{um}^\pm | \gg 1, \quad | \rho_{mn}^\pm | \gg 1$

Одним из достаточных условий выполнения 3) является требование

(1.3) $$d \geqslant 2\operatorname{tg}\alpha^* \cos\alpha_*$$

$$\alpha_* = \min_n |\alpha_n|, \quad \alpha^* = \max_n |\alpha_n|, \quad d = \min_{m,n} d_{mn}$$

В силу предположения 2) из условия (1.3) следует

(1.4) $$\alpha_0 \leqslant \alpha^* < \pi / 2, \qquad 1 < 2\alpha_0 < \pi$$

В случае $d \gg 1$ величина $\alpha_0$ оказывается близка к $\pi / 2$, и неравенство (1.4) обеспечивает достаточно широкий диапазон изменения углов $\alpha_n$, что в какой-то мере оправдывает некоторую искусственность введенного условия 3).

2. Предполагая, что правая часть интегрального уравнения (1.2) представима интегралом Конторовича — Лебедева, ограничимся рассмотрением случая [1]

(2.1) $$f_m(r) = I_\eta(\varkappa_m r) I_\eta^{-1}(\varkappa_m)$$

Функции $k_{mn}(r, \rho)$ с учетом соотношений 3), теорем сложения для бесселевых функций и формул Крама [6] преобразуются соответственно к виду (первый из выписанных интегралов понимается в смысле главного значения)

(2.2) $$k_{mm}(r, \rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-i\tau}(\varkappa_m \rho) I_{-i\tau}(\varkappa_m r) T_m(\tau)\, d\tau$$

$$k_{mn}(r, \rho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu E_{\nu mn}(\varkappa_n \rho) I_\nu(\varkappa_n r)$$

$$E_{\nu mn}(u) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{-i\tau}(u) K_{-i\tau+\nu}(\beta_{mn}) \varphi_{mn}(\tau, i\nu)\, d\tau$$

$$T_m(\tau) = 2 \operatorname{ch} A_m\tau \operatorname{ch} B_m\tau / \operatorname{sh}\pi\tau$$

$$\varphi_{mn}(\zeta, z) = \begin{cases} \exp A_n z \operatorname{ch} A_m\zeta, & n \leqslant m - 1 \\ \exp B_m\zeta \operatorname{ch} B_n z, & n \geqslant m + 1 \end{cases}$$

$$A_n = \pi / 2 - \alpha_n, \qquad B_n = \pi / 2 + \alpha_n$$

$$\beta_{mn} = \varkappa_n \alpha_{mn}, \qquad \varepsilon_\nu = 1 + \operatorname{sgn}(\nu - 1)$$

Здесь $I_p(z)$, $K_p(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Используя методы теории вычетов, функцию $k_{mm}(r, \rho)$ можно представить в форме следующего ряда:

(2.3) $$k_{mm}(r, \rho) = \sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu \begin{pmatrix} K_\nu(\varkappa_m r) I_\nu(\varkappa_m \rho), & \rho < r \\ I_\nu(\varkappa_m r) K_\nu(\varkappa_m \rho), & \rho > r \end{pmatrix}$$

$$s_\nu = {}^1/_2\, \varepsilon_\nu \operatorname{res} T_m(\tau)|_{\tau=-\zeta_\nu}$$

где $\zeta_\nu$ — полюса функции $T_m(\tau)$ в верхней полуплоскости. Пусть $z_l$ — ее нули в той же полуплоскости. Пользуясь методикой работ [1,2], сведем систему интегральных уравнений (1.2) с правой частью (2.1) к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Для этого неизвестные функции $q_n(r)$ будем отыскивать в виде ($x_l$ — подлежащие определению постоянные)

(2.4) $$rq_n(r) = x_0(n) \frac{I_\eta(\varkappa_n r)}{I_\eta(\varkappa_n)} + \sum_{l=1}^{\infty} x_l(n) \frac{I_{-iz_l}(\varkappa_n r)}{I_{-iz_l}(\varkappa_n)}$$

Внесем выражения (2.2) — (2.4) в левую часть (1.2) и произведем интегрирование. В результате интегрирования получаются ряды типа Дирихле по функциям $I_\nu(\varkappa_m r)$ ($\nu = 1,2,\ldots$). Требуя, чтобы эти ряды давали правую часть уравнения (2.1), приходим к следующей системе матричных уравнений (штрих у знака суммы означает, что при суммировании удаляется член, для которого $n = m$):

$$A(m)X(m) + \sum_{n=1}^{N}{}' D(m, n)X(n) = B(m) \tag{2.5}$$

$$A(m) = \{a_{rl}(m)\} = \frac{iW[I_{-iz_l}(\varkappa_m), K_{-i\zeta_r}(\varkappa_m)]}{(\zeta_r^2 - z_l^2)I_{-iz_l}(\varkappa_m)K_{-i\zeta_r}(\varkappa_m)}$$

$$D(m, n) = \{d_{rl}(m, n)\} = \frac{K_{i(z_l-\zeta_r)}(\beta_{mn})\varphi_{mn}(\zeta_r, z_l)}{\sigma_{rm}z_l I_{-iz_l}(\varkappa_n)K_{-i\zeta_r}(\varkappa_m)}$$

$$B(m) = \{b_r(m)\} = x_0(m)\frac{iW[I_\eta(\varkappa_m), K_{-i\zeta_r}(\varkappa_m)]}{(\zeta_r^2 + \eta^2)I_\eta(\varkappa_m)K_{-i\zeta_r}(\varkappa_m)} -$$

$$-\sigma_{rm}^{-1}\sum_{n=1}^{N}{}' x_0(n)\frac{K_{\eta+i\zeta_r}(\beta_{mn}')\varphi_{mn}(\zeta_r, \eta)}{\eta I_\eta(\varkappa_n)K_{-i\zeta_r}(\varkappa_m)}$$

$$X(n) = \{x_l(n)\}, \qquad W[x, y] = x'y - xy'$$

$$\sigma_{rm} = \pi^{-1}\varepsilon_r\varkappa_m(1 + \operatorname{ch}2\alpha_m\zeta_r / \operatorname{ch}\pi\zeta_r)$$

$$x_0(n) = T_n^{-1}(i\eta), \qquad m = 1, 2, \ldots, N$$

Равенства (2.5) оказываются необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (1.2) с правой частью (2.1) в классе решений, представленных в форме (2.4), в силу минимальности системы функций $\{I_\nu(\varkappa_m r)\}$ ($\nu = 1,2,\ldots$) на отрезке $0 \leqslant r \leqslant 1$ [1]. Последнее обстоятельство доказывает эквивалентность бесконечной системы интегральному уравнению в том смысле, что они одновременно разрешимы (или неразрешимы) и число их решений заведомо совпадает.

3. Используя равномерные асимптотические оценки поведения модифицированных функций Бесселя, нетрудно установить, что при $\lambda_n \gg 1$, $d_{mn} \gg 1$ элементы матриц $A(m)$ оказываются достаточно близкими к элементам матрицы $A = \{(\zeta_r - z_l)^{-1}\}$, а элементы матриц $D(m, n)$ оказываются малыми порядка

$$O[\exp(-|\zeta_r - z_l|\delta_{mn})], \qquad \delta_{mn} = \ln d_{mn}$$

Бесконечная система с матрицей, главная часть которой совпадает с матрицей $A(m)$, рассмотрена в работе [1], где установлено, что уравнение типа (2.5) может быть приведено к эквивалентному уравнению второго рода

$$X(m) = A^{-1}[A - A(m)]X(m) + A^{-1}B(m) - \tag{3.1}$$
$$- \sum_{n=1}^{N}{}' A^{-1}D(m, n)X(n), \quad m = 1, 2, \ldots, N$$

Отметим, что в данном случае в процессе нахождения матрицы $A^{-1}$ необходимо производить факторизацию функции $T_m(z)z^{-1}$ (имеющей двукратный полюс на вещественной оси) относительно действительной оси в комплексной плоскости $z$.

Нетрудно проверить, что матрицы в правой части системы (3.1) порождают вполне непрерывные операторы в пространстве последовательностей $s(\sigma)$, $0 < \sigma < 1/2$ с метрикой

$$\|X\|_{s(\sigma)} = \sup_l |x_l l^\sigma| < \infty, \qquad \lim_l |x_l l^\sigma| = 0 \quad (l \to \infty)$$

Полная непрерывность операторов системы (3.1) позволяет сделать известные из этой теории заключения относительно разрешимости самой бесконечной системы и соответствующего ей интегрального уравнения (1.2).

В случае $d \gg 1$, $\lambda \gg 1$ ($\lambda = \min_n \lambda_n$) операторы правой части (3.1) становятся сжимающими, а бесконечная система однозначно разрешимой, единственное решение которой можно находить по методу последовательных приближений.

4. Исследуем решение задачи в нулевом приближении. В качестве решения системы (3.1) в нулевом приближении выберем матрицы

$$X^\circ(m) = A^{-1} B(m), \qquad m = 1,2,\ldots, N$$

в силу пренебрежимой малости остальных членов системы в норме $s(\sigma)$, $0 < \sigma < 1/2$. Внося выражения для $x_l^\circ(m)$ в правую часть (2.4) и суммируя полученный ряд при помощи контурного интегрирования, приходим окончательно к следующему асимптотическому выражению для неизвестных функций ($T_+(z, m)$ — результат факторизации $T_m(z)\ z^{-1}$):

$$q_m(r) \sim (\ln r)^{-1/2} v_m(r, \eta)\,[1 + O(\sqrt{\ln r})], \qquad r \to 1 \tag{4.1}$$

$$v_m(r,\eta) = \frac{1}{2\eta\sqrt{\pi}}\left[\frac{V(\varkappa_m) + \eta}{T_+(i\eta, m)} - \frac{V(\varkappa_m) - \eta}{T_+(-i\eta, m)} + \Delta(\eta, m)\right]\ [1 - 2\theta(\alpha_m)\ln r]$$

$$\Delta(\eta, m) = i\sqrt{\pi}\,[\varkappa_m I_\eta(\varkappa_m)]^{-1} \sum_{n=1}^{N}{}' \varphi_{mn}(0, -\eta)\, x_0(n)\, d_{mn}^{-\eta}$$

$$V(\varkappa) = I_\eta'(\varkappa)\, I_\eta^{-1}(\varkappa), \qquad \theta(\alpha) = 1/12 + [1/4 - (\alpha/\pi)^2]^{-1}$$

$$q_m(r) \sim Q(\eta, m)\,(kr/2)^{\eta-1}\,[1 + o(r)] \qquad r \to 0 \tag{4.2}$$

$$0 < \operatorname{Re}\eta < 1, \qquad m = 1, 2, \ldots, N$$

Выражения (4.1), (4.2) показывают, что при ограничениях $d \gg 1$, $\lambda \gg 1$ наклон щелей к свободной границе полупространства практически не влияет на распределение контактных напряжений вблизи концов, а влияние на $m$-ю щель всех остальных оказывается весьма незначительным и характеризуется величиной

$$\Delta(\eta, m) = O(\lambda^{-1/2} d^{-\eta})$$

Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

Поступила 7 VI 1973

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А., Беркович В. Н.* К теории смешанных задач для пространственного клина. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
2. *Бабешко В. А.* Уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
3. *Sih I. C.* Some elastodynamic problems of cracks. Internat. J. Fracture Mech., 1968, vol. 4, No. 1.
4. *Jahanhahi A.* A diffraction problem and crack propagation. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 3. (Рус. перев.: Дифракция и распространение трещины. Прикл. механ. Тр. америк. о-ва инж.-механ. Серия Е, 1967, т. 34, № 3.)
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., Физматгиз, 1966.