Если в разложениях по φ граничных функций ограничиться конечным числом членов, то решение задачи тоже будет представлено в виде конечных сумм, и полученные формулы могут служить в качестве расчетных.

Поступила 3 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сунчелеев Р. Я.* Решение основных краевых задач для трансверсально изотропного упругого слоя. Инж. ж. МТТ, 1966, № 5.
2. *Ларионов Г. С.* Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения. Механика полимеров, 1969, № 5.
3. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971.
4. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
5. *Гончарова Г. Н.* Распространение упругих волн в трансверсально изотропной среде. Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1974, № 1.

УДК 539.3 : 534.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

А. У. Каримов

(Ташкент)

Предлагается способ приближенного построения решений уравнений, описывающих нелинейные колебания вязкоупругих систем. В отличие от работ [1–3] дается способ непосредственного построения решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных без предварительного сведения их к уравнениям в обычных производных и последующего приведения их к стандартной форме. Как показано в работах [3–5], колебания вязкоупругих систем описываются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. В работах [1–3] для исследования таких уравнений предлагалось путем применения метода Бубнова — Галеркина или метода прямых свести рассматриваемую систему к интегро-дифференциальным уравнениям в обычных производных, полученную таким образом систему привести к стандартному виду, а затем выполнить усреднение согласно [1–3].

Ниже предлагается способ непосредственного построения асимптотического разложения решений соответствующих уравнений вязкоупругости [1].

1. Начнем с рассмотрения линейных задач динамической теории вязкоупругости. Как известно, динамические уравнения линейной теории вязкоупругости имеют вид [5,6]

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\rho F+\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-\tag{1.1}$$

$$-\varepsilon\mu^*\Delta\mathbf{u}-\varepsilon(\lambda^*+\mu^*)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u},\quad \mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$$

$$\mu^*\varphi(t,\ x)=\frac{1}{2}\int_0^t\Gamma(t-\tau)\,\varphi(\tau,\ x)\,d\tau$$

$$\lambda^*\varphi(t,\ x)=\int_0^t\Gamma_0(t-\tau)\,\varphi(\tau,\ x)\,d\tau$$

---

[1] Задача непосредственного построения решений уравнений теории вязкоупругости была поставлена А. А. Ильюшиным.

К уравнениям (1.1) следует присоединить соответствующие начальные и граничные условия.

Как показано в [3,4], для силовых конструкций из полимерных материалов параметр ε можно считать малым. По аналогии с [7,8] будем искать решение (1.1) в следующем виде:

(1.2) $$\mathbf{u}(t, x) = a(t)\,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\cos\theta(t) + \varepsilon u_1(a, \theta, \mathbf{x}) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ — вектор-функция векторного аргумента $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, а функции $a(t)$ и $\theta(t)$ определяются из уравнений

(1.3) $$a^{\cdot} = \varepsilon A_1(a) + O(\varepsilon^2), \quad \theta^{\cdot} = \omega + \varepsilon B_1(a) + O(\varepsilon^2)$$

Задача заключается в том, чтобы указать способ определения функций A_1, B_1, u_1. Предварительно выполняем следующие выкладки. Согласно (1.2) и (1.3), находим

(1.4) $$\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = -a\varphi\omega^2\cos\theta + \varepsilon\left(\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} - 2A_1\varphi\omega\sin\theta - 2B_1a\boldsymbol{\varphi}^{\cdot}\omega\cos\theta\right) + O(\varepsilon)$$

Далее, можно показать, что при достаточно общих предположениях

$$a(t-\tau) = a(t) + O(\varepsilon\tau), \qquad \theta(t-\tau) = \theta(t) - \omega(\tau) + O(\varepsilon\tau)$$

Поэтому, предполагая, что

$$\int_0^\infty \Gamma(s)\,s\,ds < \text{const}, \qquad \int_0^\infty \Gamma_0(s)\,s\,ds < \text{const}$$

$$\int_{\alpha/\varepsilon}^\infty \Gamma(s)\,ds = O(\varepsilon), \qquad \int_{\alpha/\varepsilon}^\infty \Gamma_0(s)\,ds = O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \alpha > 0$$

находим

(1.5) $$\varepsilon\mu^*\Delta\mathbf{u} = \frac{\varepsilon}{2}a\Delta\boldsymbol{\varphi}(M\cos\theta + N\sin\theta) + O(\varepsilon)$$

$$\varepsilon(\lambda^* + \mu^*)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} = \varepsilon a\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\varphi}\left[\left(P + \frac{M}{2}\right)\cos\theta + \left(Q + \frac{N}{2}\right)\sin\theta\right] + O(\varepsilon)$$

$$M = \int_0^\infty \Gamma(s)\cos\omega s\,ds, \qquad N = \int_0^\infty \Gamma(s)\sin\omega s\,ds$$

$$P = \int_0^\infty \Gamma_0(s)\cos\omega s\,ds, \qquad Q = \int_0^\infty \Gamma_0(s)\sin\omega s\,ds$$

Подставляя теперь (1.2) в (1.1) и учитывая (1.4), (1.5), находим с точностью до величин порядка ε

(1.6) $$-\rho a\boldsymbol{\varphi}\omega^2\cos\theta + \varepsilon\left(\rho\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} - 2\rho A_1\varphi\omega\sin\theta - 2\rho B_1 a\varphi\omega\cos\theta\right) =$$
$$= [\mu\Delta\varphi + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\varphi]\,a\cos\theta + \varepsilon[\mu\Delta u_1 + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,u_1] -$$
$$- \frac{\varepsilon}{2}a\Delta\boldsymbol{\varphi}(M\cos\theta + N\sin\theta) - \varepsilon a\,\mathrm{grad\,div}\left[\left(P + \frac{M}{2}\right)\cos\theta + \left(Q + \frac{N}{2}\right)\sin\theta\right]$$

В общем случае определение функций A_1, B_1, u_1 из уравнения (1.6) требует громоздкой процедуры. Поэтому опишем здесь лишь один из возможных путей решения этой задачи. Например, если функцию $\varphi(x)$ определить как решение уравнения

(1.7) $$\mu\Delta\boldsymbol{\varphi} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{\varphi} + \rho a\omega^2\boldsymbol{\varphi} = 0$$

то для определения функций A_1 и B_1 можно поступить так. Умножить (1.6) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\sin\theta$ и проинтегрировать по $\mathbf{x}$ по поверхности s, а по θ в пределах от 0 до 2π. Затем умножить (1.6) на $\varphi(\mathbf{x})\cos\theta$ и проделать ту же процедуру. Для определения u_1 можно воспользоваться также уравнением

$$\rho\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\theta^2} = \mu\Delta u_1 + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,u_1$$

Приведем пример.

Рассмотрим продольные колебания вязкоупругого стержня длины l

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - p^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \varepsilon \int_0^t \Gamma(t-\tau) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} d\tau \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = f_1(x, \varepsilon), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x, \varepsilon)$$

В этом случае уравнения (1.6) и (1.7) примут вид

$$\varphi''(x) + p^2\omega^2\varphi = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - p^2\omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2p^2\omega A_1 \varphi \sin\theta + 2p^2\omega a B_1 \varphi \cos\theta = a\varphi''(M\cos\theta + N\sin\theta)$$

Из первого уравнения (1.9) находим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(p\omega_n x), \quad \varphi(0) = \varphi'(l) = 0$$

$$p\omega_n = \frac{(2n-1)}{2l}\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Функции A_1, B_1, a, θ также снабдим индексом n. Умножая теперь второе уравнение (1.9) сначала на $\varphi\cos\theta_n$, а затем на $\varphi\sin\theta_n$ и интегрируя по x и θ_n в пределах $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi$, находим

$$A_{1n} = {}^1/_2 N\omega_n a_n, \quad B_{1n} = {}^1/_2 M_n \omega_n$$

$$M_n = \int_0^\infty \Gamma(s)\cos\omega_n s ds, \quad N_n = \int_0^\infty \Gamma(s)\sin\omega_n s ds$$

Интегрируя теперь уравнения (1.3), получаем a_n и θ_n

$$a_n = a_{0n} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} N_n \omega_n t\right), \quad \theta_n = \omega_n\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} M_n\right)t + \theta_{0n}$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} N_n\omega_n t\right) \cos\left[\omega_n\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} M_n\right)t + \theta_{0n}\right] \sin\omega_n x$$

(параметры β_n и θ_{0n} находятся из начальных условий).

2. Перейдем к уравнениям нелинейной вязкоупругости, полученным в работе [3]. Предполагая, что функции R_{*1} и R_{*2} в этих уравнениях не зависят от z, а интегральные члены пропорциональны малому параметру, можно описанную выше методику построения решений распространить на уравнения такого вида.

Проиллюстрируем эту методику на задаче (1.8), в которой правая часть дополнена нелинейным членом

$$I = \varepsilon \int_0^t G(t-\tau) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} d\tau$$

Выкладки здесь аналогичны предыдущим, поэтому приведем лишь преобразования нелинейного члена I. Используя разложение (1.3) и (1.4), как и выше, находим с точностью до членов порядка ε

$$I = \varepsilon \int_0^t G(t-\tau) a^3\varphi'^2\varphi'' \cos^3\theta d\tau + O(\varepsilon) \approx$$

$$\approx \frac{3}{4}\varepsilon a^3\varphi'^2\varphi''(C\cos\theta + D\sin\theta) + O(\varepsilon)$$

$$C = \int_0^\infty G(s)\cos\omega s ds, \quad D = \int_0^\infty G(s)\sin\omega s ds$$

Заметим, что при вычислении интегрального члена здесь удержаны лишь члены, содержащие первые гармоники. В общем случае при разложении подынтегральной функции в ряд Фурье члены, содержащие высшие гармоники, можно включить в уравнение, из которого определяется функция u_1. Выполняя описанную выше процедуру, получаем уравнения для определения a и θ, которые легко интегрируются. Дальнейшие выкладки очевидны.

Поступила 29 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «ФАН», 1971.
2. *Митропольский Ю. А., Филатов А. Н.* Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, Укр. матем. ж., 1972, т. 24, № 1.
3. *Ильюшин А А., Мовлянкулов Х., Сунчалиев Р. М., Филатов А. Н.* О некоторых методах исследования нелинейных задач теории вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 1.
4. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра. Механика полимеров, 1966, № 2.
5. *Ильющин А. А., Победря Б. К.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
6. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. Изд-во МГУ, 1971.
7. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
8. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.

УДК 539.3

ЧИСТЫЙ СДВИГ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА НА СИСТЕМЕ ЩЕЛЕЙ

В. Н. Беркович

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается динамическая смешанная задача для упругого полупространства, ослабленного системой плоских щелей и находящегося в условиях антиплоской деформации.

Ставится задача отыскания скачка напряжений на щелях в упругом полупространстве по заданным на них перемещениям сдвига. На основе метода, развитого в работах [1,2], система интегральных уравнений смешанной задачи приводится к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений с вполне непрерывным оператором. Изучаются вопросы разрешимости интегральных уравнений и бесконечной системы. Дается исследование решения в нулевом приближении.

Динамика упругого полупространства с разрезом изучалась в [3,4], где основное внимание сосредоточено на исследовании вопросов распространения трещин и проблем дифракции упругих волн на щелях.

1. Предполагается, что плоскости щелей J_n имеют ширину l_n ($n = 1,2,\ldots, N$), параллельны направлению пространственной координаты z и неограничены в обе стороны (фигура). На каждой плоскости щели задаются гармонически меняющиеся во времени t с круговой частотой ω касательные смещения

$$W_n^* (s, t) = \operatorname{Re} W_n^{\pm} (s)\, e^{-i\omega t}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant l_n$$