УДК 539.3

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Г. Н. Гончарова, Р. Я. Сунчелеев

(Ташкент)

Решается задача Коши для вязкоупругой трансверсально изотропной среды. Обобщается метод разделения переменных для некоторых классов статических задач, разработанный в [1], при помощи которого система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений по временной координате. Решением последней методом усреднения [2,3] получены явные формулы, характеризующие распространение волн в вязкоупругой трансверсально изотропной среде.

Используя связь между напряжением и деформацией для указанной среды [4] и выделяя регулярную часть ядер релаксации, систему уравнений вязкоупругой трансверсально изотропной среды в цилиндрических координатах запишем так:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & (c_{66}-c_{66}^*)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\pm\frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}-\frac{1}{r^2}\right)W_{1,2}+\\
&+(c_{55}-c_{55}^*)\frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial z^2}+\left(\frac{c_{11}+c_{12}}{4}-\frac{c_{11}^*+c_{12}^*}{4}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\pm\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\times\\
&\times\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\right)W_1+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\right)W_2\right]+\\
&+[(c_{13}+c_{55})-(c_{13}^*+c_{55}^*)]\left(\frac{\partial}{\partial r}\pm\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial W_3}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 W_{1,2}}{\partial t^2}\\
& (c_{55}-c_{55}^*)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)W_3+(c_{33}-c_{33}^*)\frac{\partial^2 W_3}{\partial z^2}+\\
&+\left(\frac{c_{13}+c_{55}}{2}-\frac{c_{13}^*+c_{55}^*}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\right)W_1+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}\right)W_2\right]=\rho\frac{\partial^2 W_3}{\partial t^2}\\
& (W_{1,2}=u_r\pm iu_\varphi,\quad W_3=u_z)
\end{aligned}
$$

$$
c_{12}^*\varphi(t)=\int_0^t\Gamma_1\varphi(\tau)\,d\tau,\qquad c_{66}^*\varphi(t)=\int_0^t\Gamma_2\varphi(\tau)\,d\tau
$$

$$
c_{13}^*\varphi(t)=\int_0^t\Gamma_3\varphi(\tau)\,d\tau,\qquad c_{33}^*\varphi(t)=\int_0^t\Gamma_4\varphi(\tau)\,d\tau
$$

$$
c_{55}^*\varphi(t)=\int_0^t\Gamma_5\varphi(\tau)\,d\tau,\qquad c_{11}^*\varphi(t)=\int_0^t(\Gamma_1+2\Gamma_2)\,\varphi(\tau)\,d\tau
$$

Здесь c_{ij} — упругие характеристики данной среды, c_{ij}^* — операторы, определяемые приведенными выше формулами, $\Gamma_i=\Gamma_i(t-\tau)$ — регулярные части ядер релаксации (здесь и в дальнейшем для краткости опускаем аргумент $t-\tau$).

Известно [4], что для силовых конструкций из полимерных материалов с применением армирования регулярные части ядер релаксации пропорциональны некоторым малым параметрам, поэтому в системе (1) вместо c_{ij}^* можно писать εc_{ij}^* ($\varepsilon>0$ — малый параметр). Применяемый для решения задачи метод усреднения предполагает существование малого параметра ε. В окончательных результатах можно полагать $\varepsilon=1$.

Решение системы (1) ищем в виде

$$W_l = J_\nu(\alpha r) e^{i(k\varphi+\beta z)}\, T_l(t), \qquad l = 1,2,3, \quad \nu = k \pm 1, \ k \tag{2}$$

где $J_\nu(\alpha r)$ — функции Бесселя первого рода.

После подстановки (2) в (1) получаем систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений по временной координате

$$\rho T''_{1,2} + \left(\frac{c_{11}+c_{66}}{2}\alpha^2 + c_{55}\beta^2\right) T_{1,2} - \frac{c_{11}+c_{12}}{4}\alpha^2 T_{2,1} \pm \tag{3}$$

$$\pm (c_{13}+c_{55})\, i\beta\alpha T_3 = \varepsilon \int_0^t \left[\left(\frac{\Gamma_1+3\Gamma_2}{2}\alpha^2 + \Gamma_5\beta^2\right) T_{1,2}(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\alpha^2 T_{2,1}(\tau) \pm (\Gamma_3+\Gamma_5)\, i\beta\alpha T_3(\tau)\right] d\tau$$

$$\rho T_3'' + (c_{55}\alpha^2 + c_{33}\beta^2) T_3 - \frac{c_{13}+c_{55}}{2} i\beta\alpha (T_1 - T_2) =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \left\{(\Gamma_5\alpha^2 + \Gamma_4\beta^2) T_3(\tau) - \frac{\Gamma_3+\Gamma_5}{2} i\beta\alpha [T_1(\tau) - T_2(\tau)]\right\} d\tau$$

Решение системы (3) без учета вязкости (интегрального слагаемого) имеет вид

$$T_{1,2}(t) = C_1 \cos\lambda_1 t + C_2 \sin\lambda_1 t \pm C_3 \cos\lambda_2 t \pm C_4 \sin\lambda_2 t \pm \tag{4}$$

$$\pm C_5 \cos\lambda_3 t \pm C_6 \sin\lambda_3 t$$

$$T_3(t) = a_2 (C_3 \cos\lambda_2 t + C_4 \sin\lambda_2 t) + a_3 (C_5 \cos\lambda_3 t + C_6 \sin\lambda_3 t)$$

$$a_l = \frac{-\rho\lambda_l^2 + c_{11}\alpha^2 + c_{55}\beta^2}{(c_{13}+c_{55})\, i\beta\alpha}, \qquad \lambda_1 = \left[\frac{1}{\rho}(c_{66}\alpha^2 + c_{55}\beta^2)\right]^{1/2}$$

$$\lambda_{2,3} = \left\{\frac{1}{2\rho}\left[(c_{55}\alpha^2 + c_{33}\beta^2) + (c_{11}\alpha^2 + c_{55}\beta^2) \mp R\right]\right\}^{1/2}$$

$$R = \{[(c_{55}\alpha^2 + c_{33}\beta^2) - (c_{11}\alpha^2 + c_{55}\beta^2)]^2 + 4(c_{13}+c_{55})^2\alpha^2\beta^2\}^{1/2}$$

Для отыскания решения системы (3) с учетом вязкости приведем систему к «стандартному виду», применяя метод вариации произвольных постоянных и рассматривая C_i как неизвестные функции времени

$$C_{1,2}^{\cdot} = \mp \frac{\varepsilon}{\lambda_1} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \lambda_1 t F_{11}(C_1, C_2) \tag{5}$$

$$C_{3,4}^{\cdot} = \mp \frac{\varepsilon}{\lambda_2 m_2} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \lambda_2 t\, [F_{22}(C_3, C_4) + F_{23}(C_5, C_6)]$$

$$C_{5,6}^{\cdot} = \mp \frac{\varepsilon}{\lambda_3 m_3} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} \lambda_3 t\, [F_{32}(C_3, C_4) + F_{33}(C_5, C_6)]$$

Здесь

$$F_{ij}(C_l, C_{l+1}) = \int_0^t \Gamma_{ij}(t-\tau)(C_l \cos\lambda_j\tau + C_{l+1}\sin\lambda_j\tau)\, d\tau$$

$$m_{2,3} = \pm(a_3 - a_2), \quad \Gamma_{11}(t-\tau) = \Gamma_2\alpha^2 + \Gamma_5\beta^2$$

$$\Gamma_{22,33} = (\Gamma_5\alpha^2 + \Gamma_4\beta^2) a_{2,3} - [(\Gamma_1 + 2\Gamma_2)\alpha^2 + \Gamma_5\beta^2]\, a_{3,2} - 2(\Gamma_3+\Gamma_5) i\beta\alpha$$

$$\Gamma_{23,32} = [(\Gamma_5 - \Gamma_1 - 2\Gamma_2)\alpha^2 + (\Gamma_4 - \Gamma_5)\beta^2] a_{3,2} - (1 + a_{3,2}^2)(\Gamma_3 + $$

$$+ \Gamma_5)\, i\beta\alpha$$

— известные величины.

Системе (5) ставим в соответствие усредненную систему

$$\xi_{2j-1}^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{2\lambda_j m_j}(B_{0j}\xi_{2j-1} + A_{0j}\xi_{2j}) \tag{6}$$

$$\xi_{2j}^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{2\lambda_j m_j}(A_{0j}\xi_{2j-1} - B_{0j}\xi_{2j}), \quad j = 1, 2, 3, \quad m_1 = 1$$

Здесь, как нетрудно доказать [2–4].

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\lambda_i t\int_0^t \Gamma_{ij}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\lambda_i\tau d\tau=\begin{cases}\pm{}^1/_2 B_{0i}, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\lambda_i t\int_0^t \Gamma_{ij}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\lambda_j\tau d\tau=\begin{cases}{}^1/_2 A_{0i}, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$A_{0i}=\int_0^\infty \Gamma_{ii}(\tau)\cos\lambda_i\tau d\tau,\qquad B_{0i}=\int_0^\infty \Gamma_{ii}(\tau)\sin\lambda_i\tau d\tau$$

$$A_{01}>0,\ A_{02}<0,\ A_{03}>0,\ B_{01}>0,\ B_{02}<0,\ B_{03}>0$$

Интегрируя систему (6), находим

$$\xi_{2j-1,2j}(t)=\exp\left(-\frac{\varepsilon B_{0j}}{2\lambda_j m_j}t\right)\left(A_j\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\frac{\varepsilon A_{0j}}{2\lambda_j m_j}t\mp B_j\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\frac{\varepsilon A_{0j}}{2\lambda_j m_j}t\right)$$

где A_j, B_j — произвольные постоянные, $j=1,2,3$.

В [3], доказывается, что при весьма общих условиях решение системы (6) как угодно близко к решению системы (5) на достаточно большом конечном интервале времени.

Согласно теоремам об усреднении, решение системы (3) может быть приближенно представлено в виде (4), где C_j заменены на $\xi_j(t)$. Решение наиболее общего вида получается после подстановки этого приближенного решения в (2) суммированием по k и интегрированием по α и β,

$$W_l(r,\varphi,z,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\varphi}\int_0^\infty J_\nu(\alpha r)\,d\alpha\int_0^\infty e^{i\beta z}\times \tag{7}$$

$$\times\sum_{i=1}^{3}n_{li}\exp\left(-\frac{\varepsilon B_{0i}}{2\lambda_i m_i}t\right)[A_i\cos\mu_i t+B_i\sin\mu_i t]\,d\beta$$

$$\mu_i=\lambda_i-\frac{\varepsilon A_{0i}}{2\lambda_i m_i},\qquad l=1,2,3,\qquad \nu=k\pm1,\ k$$

$$n_{1i}=n_{21}=1,\qquad n_{22}=n_{23}=-1,\qquad n_{31}=0,\qquad n_{32}=a_2,\qquad n_{33}=a_3$$

Сравнение полученного решения с [5] показывает, что в случае вязкоупругой среды происходит затухание амплитуды по экспоненциальному закону и сдвиг фаз.

Решая задачу Коши, рассмотрим произвольные начальные условия, предполагая, что граничные функции допускают разложение в ряд Фурье по φ интегральные преобразования Фурье и Ханкеля по z и r

$$W_i(r,\varphi,z,t)\big|_{t=0}=f_i(r,\varphi,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\varphi}\int_0^\infty J_\nu(\alpha r)\,d\alpha\int_0^\infty e^{i\beta z}\bar f_i^{(k)}(\alpha,\beta)\,d\beta \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}W_i(r,\varphi,z,t)\Big|_{t=0}=f_{i+3}(r,\varphi,z)$$

Приравнивая правые части (8) к правым частям решения (7) и его производных по t при $t=0$, найдем постоянные

$$A_i=\varphi_i^{(k)},\qquad B_i=\frac{2\lambda_i m_i\varphi_{i+3}^{(k)}+\varepsilon B_{0i}\varphi_i^{(k)}}{2\lambda_i^2 m_i-\varepsilon A_{0i}},\qquad i=1,2,3$$

$$\varphi_j^{(k)}=\begin{cases}{}^1/_2(\bar f_j^{(k)}+\bar f_{j+1}^{(k)}), & j=1,4\\ (2m_3)^{-1}[2\bar f_{j+1}^{(k)}-a_3(\bar f_{j-1}^{(k)}-\bar f_j^{(k)})], & j=2,5\\ (2m_2)^{-1}[2\bar f_j^{(k)}-a_2(\bar f_{j-2}^{(k)}-\bar f_{j-1}^{(k)})], & j=3,6\end{cases}$$

Если в разложениях по φ граничных функций ограничиться конечным числом членов, то решение задачи тоже будет представлено в виде конечных сумм, и полученные формулы могут служить в качестве расчетных.

Поступила 3 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сунчелеев Р. Я.* Решение основных краевых задач для трансверсально изотропного упругого слоя. Инж. ж. МТТ, 1966, № 5.
2. *Ларионов Г. С.* Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения. Механика полимеров, 1969, № 5.
3. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971.
4. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
5. *Гончарова Г. Н.* Распространение упругих волн в трансверсально изотропной среде. Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук, 1974, № 1.

УДК 539.3 : 534.1

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ

А. У. Каримов

(Ташкент)

Предлагается способ приближенного построения решений уравнений, описывающих нелинейные колебания вязкоупругих систем. В отличие от работ [1–3] дается способ непосредственного построения решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных без предварительного сведения их к уравнениям в обычных производных и последующего приведения их к стандартной форме. Как показано в работах [3–5], колебания вязкоупругих систем описываются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. В работах [1–3] для исследования таких уравнений предлагалось путем применения метода Бубнова — Галеркина или метода прямых свести рассматриваемую систему к интегро-дифференциальным уравнениям в обычных производных, полученную таким образом систему привести к стандартному виду, а затем выполнить усреднение согласно [1–3].

Ниже предлагается способ непосредственного построения асимптотического разложения решений соответствующих уравнений вязкоупругости [1].

1. Начнем с рассмотрения линейных задач динамической теории вязкоупругости. Как известно, динамические уравнения линейной теории вязкоупругости имеют вид [5,6]

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho F + \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \tag{1.1}$$

$$-\varepsilon\mu^*\Delta\mathbf{u} - \varepsilon(\lambda^*+\mu^*)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$$

$$\mu^*\varphi(t,\ \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma(t-\tau)\,\varphi(\tau,\ \mathbf{x})\,d\tau$$

$$\lambda^*\varphi(t,\ \mathbf{x}) = \int_0^t \Gamma_0(t-\tau)\,\varphi(\tau,\ \mathbf{x})\,d\tau$$

---

[1] Задача непосредственного построения решений уравнений теории вязкоупругости была поставлена А. А. Ильюшиным.