3. *Keller H. B., Wolfe A. W.* On the nonunique equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1965, vol. 13, No. 3, p. 674—705.
4. *Валишвили Н. В.* Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
5. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
6. *Reissner E.* On the theory of thin elastic shells. In: Reissner Anniversary Volume, Contributions Applied Mechanics, Michigan, Ann Arbor, I. W. Edwards, 1949, p. 231—247.

УДК 539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕПОЛОГОГО СИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА

И. И. Ворович, Ш. М. Шлафман

(Ростов-на-Дону)

Методом работы [1] доказывается существование обобщенного решения в задаче о равновесии изотропного упругого непологого сферического купола с жестко заделанным краем, подверженного осесимметричной деформации. Вычислена топологическая характеристика задачи — вращение векторного поля.

Разрешимость нелинейных уравнений для непологих симметрично загруженных оболочек вращения изучалась в работах [2,3]. Однако в них исключались из рассмотрения куполообразные оболочки.

1. Основные соотношения. Рассматривается следующий вариант [3] соотношений для нелинейной теории непологих симметрично загруженных оболочек вращения:

$$
\begin{gathered}
T_1(\varepsilon_j) = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad M_1 = D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2) \quad 1 \rightleftarrows 2 \\
\varepsilon_1 = vA'(AB)^{-1} + wR_1^{-1}, \quad \varepsilon_2 = v'B^{-1} + wR_2^{-1} + \psi^2 2^{-1} \\
\varkappa_1 = -\psi A'(AB)^{-1}, \quad \varkappa_2 = -\psi' B^{-1}, \quad \psi = w'B^{-1} - vR_2^{-1} \\
T_{12} = M_{12} = \varepsilon_{12} = \varkappa_{12} = 0 \\
K = 2hE(1-\nu^2)^{-1}, \quad D = 2h^3[3(1-\nu^2)]^{-1} E
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь T_i, T_{12} — тангенциальные усилия; ε_i, ε_{12} — деформации растяжения и сдвига; M_i, M_{12} — изгибающий и крутящий моменты; $\varkappa_i$, $\varkappa_{12}$ — изменения кривизн R_i^{-1} точек срединной поверхности оболочки s^*; v, w — тангенциальное и нормальное смещение точек срединной поверхности оболочки s^* A^2, B^2, $2C = 0$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности s^*. $E > 0$ — модуль Юнга; $0 < \nu < 1/2$ — коэффициент Пуассона; $2h$ — толщина оболочки. Штрих вверху означает дифференцирование по параметру β.

При рассмотрении сферического купола удобно использовать сферическую систему координат. Тогда $A = \rho \sin\beta$, $\beta \in [0, b]$, $B = R_i = \rho$, где ρ — радиус срединной поверхности оболочки s^*. Для удобства полагается $\rho \equiv 1$. Заменой $v = w' - \psi$ во всех соотношениях исключается v. Вводятся обозначения

$$
e_1(w) = w' \operatorname{ctg}\beta + w, \qquad e_2(w) = w'' + w \tag{1.2}
$$

Принцип Лагранжа определяет уравнения равновесия оболочки

$$
\int_0^b (T_i(\varepsilon_j)\,\delta\varepsilon_i + M_i\,\delta\varkappa_i) \sin\beta\, d\beta = \int_0^b [F_1(\delta w' - \delta\psi) + F_2\,\delta w] \sin\beta\, d\beta \tag{1.3}
$$

$$
\delta\varkappa_i = \varkappa_i(\delta\psi), \quad \delta e_i = e_i(\delta w), \quad \delta\varepsilon_2 = \delta e_2 + \delta\varkappa_2 + \psi\delta\psi
$$

(F_i — компоненты внешней нагрузки). Край оболочки жестко заделан

$$
\psi(b) = w(b) = w'(b) = 0 \tag{1.4}
$$

Осевая симметрия задачи позволяет принять, что

(1.5) $\psi(\beta) = -\psi(-\beta), \quad w(\beta) = w(-\beta)$

Пусть выполняется условие

(1.6) $b < \pi / 2$

Вводятся скалярные произведения

$$(\psi \cdot \delta\psi)_{H_1} = \int_0^b M_i \delta x_i \sin\beta \, d\beta$$

$$(w \cdot \delta w)_{H_2} = \int_0^b T_i(e_j)\, \delta e_i \sin\beta \, d\beta$$

Определение 1. Замыкание множества C_1 $\{C_2\}$ 2π-периодических функций $\psi \in C^{(1)}$ $\{w \in C^{(2)}\}$ на $[0, b]$, удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5), в соответствующей норме, называется гильбертовым пространством H_1 $\{H_2\}$

$$\|\psi\|^2_{H_1} = \int_0^b M_i \varkappa_i \sin\beta\, d\beta = D \int_0^b [\psi'^2 + (\psi \operatorname{ctg}\beta)^2 + 2\nu\psi'\psi \operatorname{ctg}\beta] \sin\beta \, d\beta$$

$$\|w\|^2_{H_2} = \int_0^b T_i(e_j)\, e_i \sin\beta\, d\beta = K \int_0^b [(w'' + w)^2 + (w' \operatorname{ctg}\beta + w)^2 +$$
$$+ 2\nu (w'' + w)(w' \operatorname{ctg}\beta + w)] \sin\beta \, d\beta$$

Лемма. Если функция $\psi \in H_1$ $\{w \in H_2\}$, то $\psi s_p \in C^{(0)}$ $\{w' s_p, w \in C^0\}$ на $[0, b]$, $s_p = (\sin\beta)^{1/p}$, $p > 1$. Из слабой сходимости $\psi_n \to \psi_0$ в H_1 $\{w_n \to w_0$ в $H_2\}$ при $n \to \infty$ вытекает сильная сходимость $\psi_n s_p \Rightarrow \psi_0 s_p$ $\{w_n \Rightarrow w_0, w_n' s_p \Rightarrow w_0' s_p\}$ в $C^{(0)}_{[0,b]}$.

Доказательство. В силу условия (1.5) $\psi(0) = 0$. Тогда

(1.7)
$$f(\beta) = \psi(\beta)\, s_p(\beta) = \int_0^\beta (\psi(\alpha)\, s_p(\alpha))'\, d\alpha = \int_0^\beta [\psi'(\alpha) +$$
$$+ p^{-1}\psi(\alpha) \operatorname{ctg}\alpha] (\sin\alpha)^{1/p}\, d\alpha = \int_0^\beta (\sin\alpha)^{1/p - 1/2} M(p, \alpha)\, d\alpha$$

$$f(\beta + t) - f(\beta) = \int_\beta^{\beta+t} (\sin\alpha)^{1/p - 1/2} M(p, \alpha)\, d\alpha$$

$$M(p, \alpha) = [\varphi'(\alpha) + p^{-1}\psi(\alpha) \operatorname{ctg}\alpha] (\sin\alpha)^{1/2}$$

Используя неравенство Гельдера, из (1.7) можно получить (m_k — постоянные)

(1.8)
$$|f(\beta)| \leqslant \left(\int_0^b (\sin\alpha)^{2/p - 1}\, d\alpha\right)^{1/2} L, \qquad p > 1$$

$$|f(\beta + t) - f(\beta)| \leqslant \left|\int_0^t (\sin(\beta + \alpha))^{2/p - 1}\, d\alpha)^{1/2} L \leqslant \eta(t) \left(\int_0^\beta M(p, \beta)^2\, d\beta\right)^{1/2}\right.$$

$$\eta(t) = \begin{cases} t & 1 < p \leqslant 2 \\ \left(\int_0^t (\sin\alpha)^{2/p-1}\, d\alpha\right)^{1/2}, & 2 < p, \ \beta + t \leqslant \pi / 2 \end{cases}$$

$$L \equiv \left(\int_0^\beta M(p, \beta)^2\, d\beta\right)^{1/2} \leqslant m_1 \|\psi\|_{H_1}$$

Из (1.8) и теоремы Арчела следует справедливость леммы для функций $\psi \in H_1$. Используя условия (1.4) — (1.6), можно показать, что выполняются соотношения

$$0 < m_2 \leqslant \| w' \|_{H_1} \| w \|_{H_2}^{-1} \leqslant m_3 \tag{1.9}$$

$$\| w \|_{C_{[0,\, b]}^{(0)}} \leqslant \| w' (\sin \beta)^{1/4} \|_{C_{[0,\, b]}^{(0)}} \int_0^b (\sin \beta)^{-1/4} d\beta$$

Из (1.9) следует справедливость леммы и для функции $w \in H_2$.

2. Постановка и разрешимость задачи. Аналогично [1] вводится понятие обобщенного решения.

Определение 2. Обобщенным осесимметричным решением задачи о равновесии изотропного упругого непологого сферического купола с жестко заделанным краем под действием осесимметричной нагрузки называется пара функций $\psi \in H_1$, $w \in H_2$, удовлетворяющих уравнению (1.3) при любых парах функций $\sigma\psi \in H_1$, $\sigma w \in H_2$.

Все члены уравнения (1.3) будут иметь смысл, если

$$F_1 \in H_{-1}, \qquad F_2 \in H_{-2} \tag{2.1}$$

где H_{-1} $\{H_{-2}\}$ — сопряженное $H_1\{H_2\}$ пространство.

Повторяя рассуждения работы [2] с учетом леммы и условия (1.6), можно показать, что уравнение (1.3) сводится к операторному уравнению $\psi = G\psi$, где G — вполне непрерывный оператор, действующий в H_1. Причем вращение [4] вполне непрерывного векторного поля $I - G$ (I — единичный оператор) в H_1 равно $+1$, на сферах $T(R, 0) = \{\psi \in H_1 : \| \psi \|_{H_1} = R\}$ достаточно большого радиуса R, т. е.

$$\gamma (I - G;\ T(R, 0)) = +1 \tag{2.2}$$

В силу принципа Лерея — Шаудера [4] будет справедлива теорема.

Теорема. При выполнении условий (1.6) и (2.1) существует по меньшей мере одно обобщенное в смысле определения 2 осесимметричное решение задачи о равновесии изотропного упругого непологого сферического купола с жестко заделанным краем под действием осесимметричной нагрузки.

Замечания 1°. Теорема справедлива для различных куполообразных симметрично загруженных оболочек вращения, коэффициенты первой квадратичной формы которых в (1.1) удовлетворяют условиям:

1) $A(\beta)$ монотонно возрастает на $[0, b]$, где $[0, b]$ — рассматриваемая область изменения параметра β;

2) $\displaystyle\int_0^\beta A(\beta)^{-1+\varepsilon} d\beta < \infty$ ($\varepsilon > 0$ — конечное достаточно малое число);

3) $0 < m_4 \leqslant B(\beta),\ R_i(\beta) \leqslant m_5$ на $[0, b]$.

Таким условиям удовлетворяют куполообразные оболочки, срединная поверхность которых является частью эллипсоида, параболоида, двуполостного гиперболоида и других поверхностей вращения.

2°. Согласно [4], условие (2.2) гарантирует сходимость проекционных методов.

3°. В случае пологого симметрично загруженного сферического купола и других пологих симметрично загруженных оболочек вращения ($\psi = w' B^{-1}$ в (1.1)) можно получить аналогичные результаты при выполнении условий 1) — 3).

Поступила 3 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
2. *Ворович И. И., Лебедев Л. П., Шлафман Ш. М.* О некоторых прямых методах и существовании решения в нелинейной теории непологих оболочек. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
3. *Срубщик Л. С.* О разрешимости нелинейных уравнений Рейснера для непологих симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.