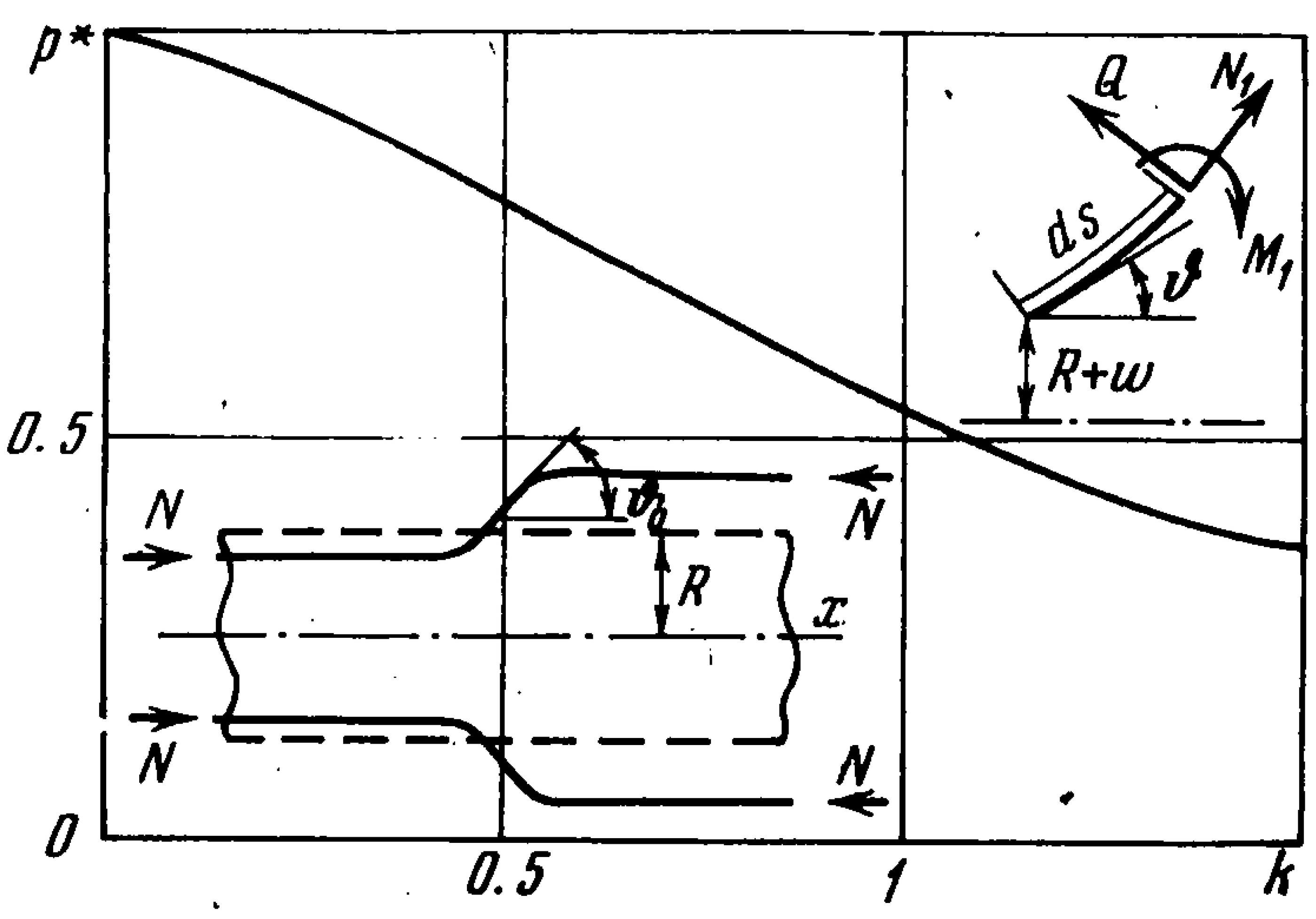
УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Л. М. Куршин, В. Г. Шорохов

(Новосибирск)

Задачи осесимметричного деформирования упругих тонкостенных оболочек вращения с учетом конечности смещений к настоящему времени достаточно полно рассмотрены для оболочек типа сферических. Так, в работах [1–4] разработаны численные методы и получены решения для куполов разной геометрии при различных внешних воздействиях. Ниже на примере длинной цилиндрической оболочки показано, что и для оболочек вращения, гауссова кривизна которых близка к нулевой, при определенных воздействиях появляются формы равновесия типа эластик гибкого стержня.



Фиг. 1

Пусть цилиндрическая оболочка толщины h и радиуса R (фиг. 1) равномерно сжата продольными усилиями N и нагрета до температуры $t(x) = {}^1/_2\ T \operatorname{sign}(x)$, постоянной по толщине. Будем разыскивать симметричные относительно оси оболочки формы равновесия. Используем линейные зависимости между напряжениями и деформациями, полагая деформации малыми по сравнению с единицей [5]. При этих допущениях с точностью до малых порядка $\sqrt{h / R}$ деформированная срединная поверхность кососимметрична относительно сечения $x = 0$. Потенциальная энергия деформации определяется изгибающим моментом $M_1 = -D d\vartheta / ds$ и окружным усилием $N_2 = Ehw / R$. Здесь s — длина дуги меридиана деформированной срединной поверхности; ϑ, w — угловое смещение и прогиб, отсчитываемый по нормали к исходной поверхности; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$.

Вводим безразмерные величины

$$f = \beta(w - w_0), \qquad \xi = \beta s, \qquad p = N / N^* = {}^1/_2\, NR/\sqrt{DEh}$$

где

$$\beta = [12(1-\nu^2) / (hR)^2]^{1/4}, \qquad w_0 = {}^1/_2\, \alpha RT + \nu NR / Eh$$

(α — коэффициент температурного расширения, N^* — эйлерова критическая сила).

Задачу о формах равновесия оболочки рассматриваем как задачу экстремума функционала

$$I = \int_0^\infty [\vartheta'^2 + f^2 - 4p(1-\cos\vartheta)]\, d\xi$$

при условии $f' = \sin\vartheta$ (штрих означает дифференцирование по ξ). С помощью множителей Лагранжа получаем уравнения задачи и естественные граничные условия. Присоединив кинематические условия (с учетом симметрии), сформулируем следующую краевую задачу:

$$(2p \operatorname{tg}\vartheta + \vartheta'' / \cos\vartheta)' + f = 0, \qquad f' - \sin\vartheta = 0 \qquad (0 \leqslant \xi < \infty) \tag{1}$$

$$\vartheta'(0) = 0, \qquad f(0) = -k \ (k = {}^1/_2\, \alpha\beta RT), \qquad f(\infty) = \vartheta(\infty) = 0$$

Заметим, что введением функции $\psi = 2(N_1 \sin\vartheta + Q\cos\vartheta) / N^*$ или, с учетом соответствующих физических и геометрических соотношений (при сделанных ранее допущениях), $\psi = 2\,p\,\mathrm{tg}\,\vartheta + \vartheta''/\cos\vartheta$ система (1) может быть представлена в виде, полученном в работе [6].

Путем несложных преобразований эта система может быть приведена к интегрируемой форме. Первые интегралы ее с учетом условия на бесконечности имеют вид

$$2\vartheta''\sin\vartheta - (\vartheta'^2 - f^2)\cos\vartheta + 4p\,(1-\cos\vartheta) = 0 \tag{2}$$

$$\vartheta'^2 - f^2 - 2\sin\vartheta \int\limits_{\xi}^{\infty} f\,d\xi + 4p\,(1-\cos\vartheta) = 0$$

Обозначим угловое смещение ϑ при $\xi = 0$ через ϑ_0. Заметим, что решение, соответствующее значению $\vartheta_0 = \pi$, может иметь место при $k^2 = 8p$, что позволяет предположить существование форм равновесия, характеризующихся достаточно большими угловыми смещениями.

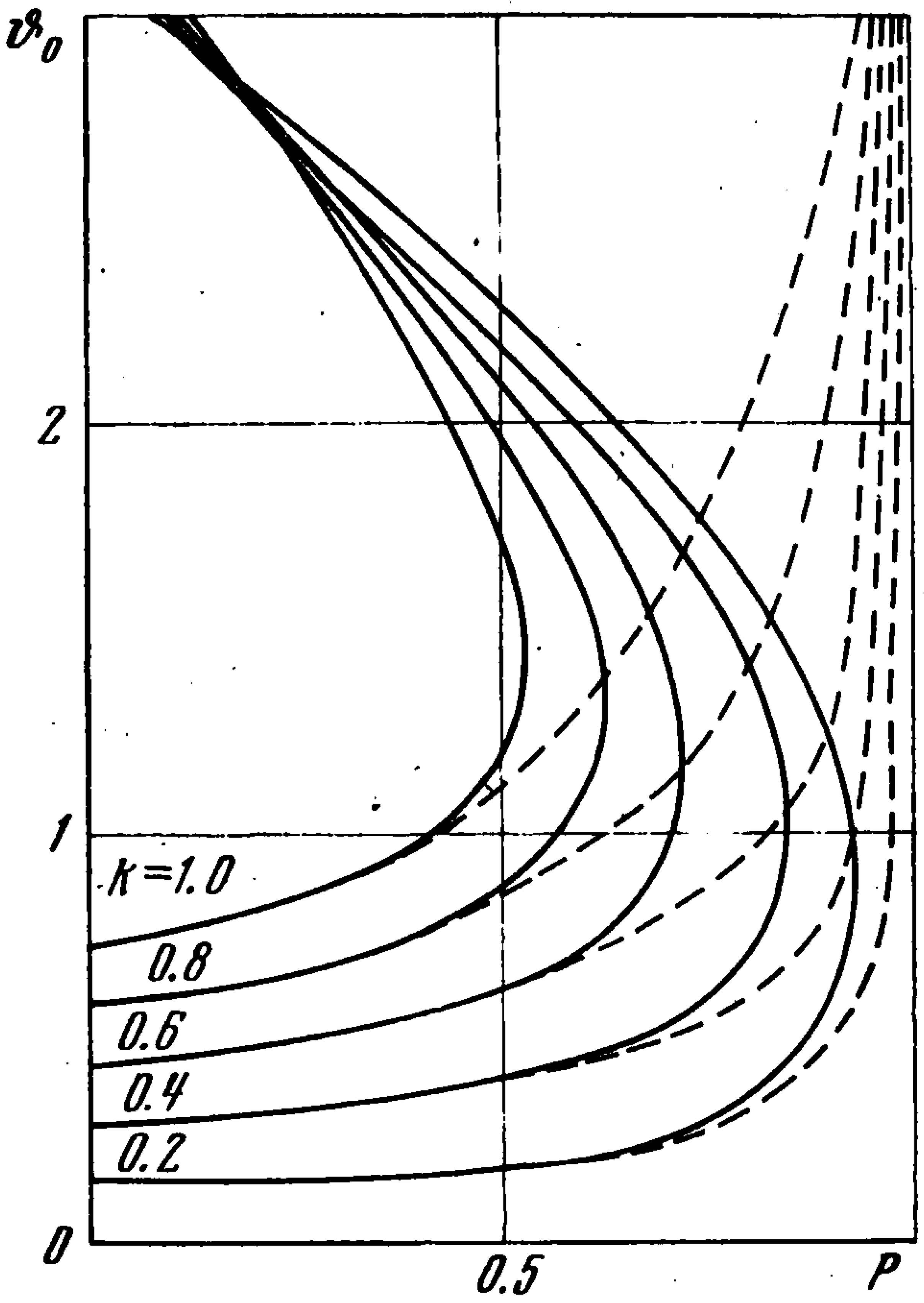
Первое из соотношений (2) при $\xi = 0$ позволяет эффективно использовать для численного решения метод сведения к задаче Коши, в силу того, что начальные условия при заданных значениях параметров k и p могут быть явно выражены через ϑ_0. Задача сводится к разысканию такого значения ϑ_0, при котором решение задачи Коши носит затухающий характер при больших значениях ξ. С учетом затухания, начиная с некоторого $\xi = \xi^*$, вместо уравнений (1) можно записать линеаризованные уравнения

$$F_1 = f'' + \lambda f' + f, \qquad \lambda = \sqrt{2\,(1-p)}$$

$$F_2 = \vartheta'' + \lambda\vartheta' + \vartheta, \qquad \xi \geqslant \xi^*$$

Поэтому требование затухания решения можно формулировать в виде условия сопряжения решения с затухающим

$$F_i\,(\xi^*) = 0, \qquad i = 1,2 \tag{3}$$



Фиг. 2

В процессе счета для разных значений параметров k и p подбирались такие значения ϑ_0, чтобы полученные решения задачи Коши удовлетворяли условиям (3) и в этом смысле являлись решениями задачи (1). Значение ξ^* определялось в процессе счета из условий выполнения (3) с заданной точностью. Полученные зависимости $\vartheta_0 = \vartheta_0\,(p)$ при фиксированных k приведены на фиг. 2 (сплошные линии). Существенное отличие от имеющей место в линейной постановке зависимости $\vartheta_0 = k\,/\,\lambda$ (пунктирные линии) в том, что при одном и том же значении p возможно существование как устойчивой формы равновесия, близкой к описываемой линейной теорией, так и «вывернутой» формы равновесия (неустойчивой). При определенных значениях параметров $k = k^*$, $p = p^*$ возможно существование смежных осесимметричных форм равновесия, т. е. имеет место потеря устойчивости «в большом». Кривая зависимости критического значения параметра осевой нагрузки p^* от значения параметра нагрева k приведена на фиг. 1. При $p < {}^1/_3$ указанное явление не имеет места ни при каких значениях параметра нагрева.

Поступила 29 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thurston G. A.* A numerical solution of the nonlinear equations for axisymmetric bending of shallow spherical shells. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961 vol. 28, No. 4, p. 557—562.
2. *Mescall I.* Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 11, p. 2041—2043.

3. *Keller H. B., Wolfe A. W.* On the nonunique equilibrium states and buckling mechanism of spherical shells. J. Soc. Indust. Appl. Math., 1965, vol. 13, No. 3, p. 674—705.
4. *Валишвили Н. В.* Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
5. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
6. *Reissner E.* On the theory of thin elastic shells. In: Reissner Anniversary Volume, Contributions Applied Mechanics, Michigan, Ann Arbor, I. W. Edwards, 1949, p. 231—247.

УДК 539.3

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕПОЛОГОГО СИММЕТРИЧНО ЗАГРУЖЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО КУПОЛА

И. И. Ворович, Ш. М. Шлафман

(Ростов-на-Дону)

Методом работы [1] доказывается существование обобщенного решения в задаче о равновесии изотропного упругого непологого сферического купола с жестко заделанным краем, подверженного осесимметричной деформации. Вычислена топологическая характеристика задачи — вращение векторного поля.

Разрешимость нелинейных уравнений для непологих симметрично загруженных оболочек вращения изучалась в работах [2,3]. Однако в них исключались из рассмотрения куполообразные оболочки.

1. Основные соотношения. Рассматривается следующий вариант [3] соотношений для нелинейной теории непологих симметрично загруженных оболочек вращения:

$$T_1(\varepsilon_j) = K(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad M_1 = D(\varkappa_1 + \nu\varkappa_2) \quad 1 \rightleftarrows 2 \tag{1.1}$$
$$\varepsilon_1 = vA'(AB)^{-1} + wR_1^{-1}, \quad \varepsilon_2 = v'B^{-1} + wR_2^{-1} + \psi^2 2^{-1}$$
$$\varkappa_1 = -\psi A'(AB)^{-1}, \quad \varkappa_2 = -\psi' B^{-1}, \quad \psi = w'B^{-1} - vR_2^{-1}$$
$$T_{12} = M_{12} = \varepsilon_{12} = \varkappa_{12} = 0$$
$$K = 2hE(1-\nu^2)^{-1}, \qquad D = 2h^3[3(1-\nu^2)]^{-1} E$$

Здесь T_i, T_{12} — тангенциальные усилия; ε_i, ε_{12} — деформации растяжения и сдвига; M_i, M_{12} — изгибающий и крутящий моменты; $\varkappa_i$, $\varkappa_{12}$ — изменения кривизн R_i^{-1} точек срединной поверхности оболочки s^*; v, w — тангенциальное и нормальное смещение точек срединной поверхности оболочки s^* A^2, B^2, $2C = 0$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности s^*. $E > 0$ — модуль Юнга; $0 < \nu < 1/2$ — коэффициент Пуассона; $2h$ — толщина оболочки. Штрих вверху означает дифференцирование по параметру β.

При рассмотрении сферического купола удобно использовать сферическую систему координат. Тогда $A = \rho \sin\beta$, $\beta \in [0, b]$, $B = R_i = \rho$, где ρ — радиус срединной поверхности оболочки s^*. Для удобства полагается $\rho \equiv 1$. Заменой $v = w' - \psi$ во всех соотношениях исключается v. Вводятся обозначения

$$e_1(w) = w' \operatorname{ctg}\beta + w, \qquad e_2(w) = w'' + w \tag{1.2}$$

Принцип Лагранжа определяет уравнения равновесия оболочки

$$\int_0^b (T_i(\varepsilon_j)\,\delta\varepsilon_i + M_i\,\delta\varkappa_i)\sin\beta\, d\beta = \int_0^b [F_1(\delta w' - \delta\psi) + F_2\,\delta w]\sin\beta\, d\beta \tag{1.3}$$
$$\delta\varkappa_i = \varkappa_i(\delta\psi), \quad \delta e_i = e_i(\delta w), \quad \delta\varepsilon_2 = \delta e_2 + \delta\varkappa_2 + \psi\delta\psi$$

(F_i — компоненты внешней нагрузки). Край оболочки жестко заделан

$$\psi(b) = w(b) = w'(b) = 0 \tag{1.4}$$