ЛИТЕРАТУРА

1. *Савченко В. А., Хаванович Т. Н.* Уравнения движения жидкости второго порядка. ТМФ, 1970, т. 4, № 2, с. 246.
2. *Thomas R. H., Walters K.* The stability of elastico-viscous Flow between rotating cylinders, pt 1. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 1.
3. *Листров А. Т.* Об устойчивости течения упруговязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости. ПМТФ, 1965, № 5.
4. *Городцов В. А., Леонов А. И.* О линейной неустойчивости плоскопараллельного течения Куэтта упруговязкой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. Acad. Press, New York — London, 1964. (Рус. перев.: Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.)

УДК 539.3

О ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

С. Б. Вигдергауз

(Ленинград)

Рассматривается задача об определении напряжений в тонком однородном диске, ослабленном N одинаковыми отверстиями, равноудаленными от центра, и нагруженном на обводе диска нормальным усилием постоянной интенсивности. Эта циклически симметричная задача решалась В. М. Буйволом [1] сведением интегрального уравнения Д. И. Шермана [2,3], записанного по границе L рассматриваемой области, к уравнению по l—части L, лежащей внутри угла $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \tau$. Здесь $\tau = 2\pi / N$, θ — угловая координата точек l в полярной системе, выбираемой в плоскости кольца очевидным образом, θ_0 произвольно.

Такой подход позволяет рационально использовать симметрию задачи при численном решении полученного уравнения, не накладывает в отличие от других методов [4–6] ограничений на размеры и расположение отверстий, а выбор подходящей нормы в методе наименьших квадратов обеспечивает равномерную сходимость комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их производных вплоть до границ. К сожалению, в работе [1] допущена ошибка. В ней преобразование функции $\omega(t)$ при повороте на угол τ определено лишь с точностью до существенного слагаемого — граничного значения функции, голоморфной вне рассматриваемой области (см. [7], стр. 220 — представление голоморфных функций интегралами типа Коши). Такое граничное значение влияет на вид функции $\psi(z)$, а значит, и на результат. В данной статье оно определяется из неиспользованного в [1] условия — преобразования $\psi(z)$ при повороте.

Доказано, что $\omega(t)$ принадлежит некоторому подпространству $W_2^3(L, \tau)$ пространства $W_2^3(L)$, построенному с учетом симметрии задачи. Применение в $W_2^3(L, \tau)$ метода наименьших квадратов приводит к экономичной вычислительной схеме. Приведены численные результаты для $N = 4$ при различной геометрии диска. Метод решения легко распространяется на случай любой статической нагрузки, не нарушающей симметрию задачи.

Введем следующие обозначения: S_+ — рассматриваемая область, S_- — дополнение S_+ до полной комплексной плоскости, L — граница области (не относится ни к S_+ ни к S_-), L_0 — внешняя граница диска радиуса R, L_k — граница, z_k — центр k-го отверстия радиуса r ($k = 1, 2,\ldots, N$), $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — функции Колосова, голоморфные в S_+, t, t_0 — точки на L.

По Д. И. Шерману [2,3] $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ищутся в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt+U(z),\qquad U=\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{z-z_k}\tag{1}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar t\omega'(t)}{t-z}\,dt+U(z)\tag{2}$$

$$b_k=i\int\limits_{L_k}\{\omega(t)\,d\bar t-\overline{\omega(t)}\,dt\},\qquad k=1,2,\ldots N$$

Здесь $\omega(t)$ — достаточно гладкая комплекснозначная функция на L, b_k — действительные постоянные.

Граничное условие приводит к интегральному уравнению относительно $\omega(t)$

$$\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\tag{3}$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{b_k}{t_0-z_k}+\frac{b_k}{\bar t_0-\bar z_k}\left(1-\frac{t_0}{\bar t_0-\bar z_k}\right)\right\}-C_k=f(t_0)\quad \text{на } L_k$$

$$C_k=-\int\limits_{L_k}\omega(t)\,dS,\qquad dS=|dt|$$

При повороте на угол τ напряженное состояние диска не изменится. Поэтому, с точностью до несущественных слагаемых

$$\varphi(ze^{i\tau})=e^{i\tau}\varphi(z)\tag{4}$$

$$\psi(ze^{i\tau})=e^{-i\tau}\psi(z)\tag{5}$$

Запишем функцию $U(z)$ в виде

$$U(z)=\int\limits_L\frac{h(t)}{t-z}\,dt,\qquad h(t)=\begin{cases}0, & t\in L_0\\ \dfrac{b_k}{t-z_k}, & t\in L_k\end{cases}\tag{6}$$

Подставив (1) в (4) и учитывая (6), получим

$$\omega(te^{i\tau})=e^{i\tau}\omega(t)+H_0(t)+q(t)$$

$$q(t)=\begin{cases}0, & t\in L_0\\ \dfrac{b_ke^{i\tau}-b_{k+1}e^{-i\tau}}{t-z_k}, & t\in L_k,\quad k=1,2,\ldots,N\end{cases}$$

Здесь $H_0(t)$ — граничное значение убывающей на бесконечности функции, голоморфной в S_-, определяемое в дальнейшем. В [1] функция $H_0(t)$ произвольно полагалась тождественно равной нулю.

В формуле (6) и ниже, из условия периодичности, следует считать $b_0=b_N$, $b_{N+1}=b_1$.

Сделаем в (2) замену переменной $\xi=ze^{-i\tau}$. Используя (5) и (6), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{H_0(t)}{t-\xi}\,dt+\frac{e^{-2i\tau}}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{H_0(t)}}{t-\xi}\,d\bar t-\frac{e^{-2i\tau}}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar tH_0(t)}{(t-\xi)^2}\,dt=\tag{7}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k-b_{k+1}}{z-z_k}\,e^{-i\tau}-e^{-2i\tau}\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[\frac{\bar z_k}{(\xi-z_k)^2}+\frac{r^2}{(\xi-z_k)^3}\right]$$

$$\beta_k=b_ke^{i\tau}-b_{k+1}e^{-i\tau}$$

Интегралы, содержащие $q(t)$, вычислены с помощью вычетов. Имея целью составить уравнение типа (3) относительно $H(t) = e^{-i\tau} H_0(t)$, вычислим предварительно

$$d_k = i \int_{L_k} \{H(t)\,d\bar{t} - \overline{H(t)}\,dt\} = b_{k+1} - b_k \tag{8}$$

Заметив, что функция

$$p(\xi) = \int_L \frac{H(t)}{t-\xi}\,dt$$

тождественно равна нулю в S_+, прибавим к левой части (7) выражение $p(\xi) + \xi\overline{p'(\xi)}$. Устремляя ξ к t_0 и используя формулу (8) и соотношение $(t - z_k)(\bar{t} - \bar{z}_k) = r^2$, придем к уравнению

$$H(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L H(t_0)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{H(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \frac{\bar{d}_k}{\bar{t}_0 - \bar{z}_k} = -\sum_{k=1}^{N} e^{i\tau}\beta_k\left[\frac{z_k}{(\bar{t}_0-\bar{z}_k)^2} + \frac{r^2}{(\bar{t}_0-\bar{z}_k)^3}\right]$$

решение которого

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \in L_0 \\ d_k\left[\dfrac{1}{t-z_k} - \dfrac{t}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}\right] - e^{i\tau}\beta_k\dfrac{t}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}, & t \in L_k \end{cases} \tag{9}$$

Поскольку $H(t)$ — граничное значение функции, голоморфной в S_-, то необходимо $b_{k+1} = b_k$. Возвращаясь к $H_0(t) = H(t)\,e^{i\tau}$, получим окончательно (индекс у β_k опущен, так как все b_k равны)

$$\omega(te^{i\tau}) = e^{i\tau}\omega(t) + \begin{cases} 0, & t \in L_0 \\ e^{2i\tau}\beta\left[\dfrac{1}{t-z_k} - \dfrac{t}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}\right], & t \in L_k \end{cases} \tag{10}$$

Для решения (3) методом наименьших квадратов выберем фундаментальную в $W_2^3(L)$ систему функций

$$\left(\frac{t}{c_1}\right)^m, \quad \left(\frac{\bar{t}}{c_1}\right)^{m+1}, \quad c_1 < R \tag{11}$$

$$\left(\frac{c_2}{t-z_k}\right)^m, \quad \left(\frac{c_2}{(\bar{t}-\bar{z}_k)}\right)^{m+1}, \quad c_2 > r, \qquad m = 0, 1, 2\ldots$$

— прямое объединение систем, фундаментальных на L_p, $p = 0, 1,\ldots N$.

Образуем линейные комбинации элементов этой системы, удовлетворяющие соотношению (10). Это будут, как можно показать, комбинации вида

на L_0

$$\sum_{p=0}^{n}\left\{f_p^\circ\left(\frac{t}{c_1}\right)^{pN+1} + g_p^\circ\left(\frac{\bar{t}}{c_1}\right)^{pN+N-1}\right\}$$

на L_k

$$\sum_{p=1}^{n}\left\{\frac{c_2^{\,p} f_p^{\,1} e^{i(p+1)k\tau}}{(t-z_k)^p} + \frac{c_2^{\,p} g_p^{\,1} e^{i(1-p)k\tau}}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^p}\right\} - \tag{12}$$

$$-\,8i\pi\,\mathrm{Re}(g_1^1)\sin\tau\left[\frac{c_2 e^{3i\tau}(1-e^{2ik\tau})}{(t-z_k)(1-e^{2i\tau})} - \right.$$

$$\left. - \frac{c_2^2(1-e^{ik\tau})\,z_k}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2(1-e^{-i\tau})} - \frac{c_2^3 e^{-i\tau}(1-e^{-2ik\tau})\,r^2}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^3(1-e^{-2i\tau})}\right]$$

Замкнем это линейное множество по норме W_2^3, полученное пространство обозначим через $W_2^3(L, \tau)$. Докажем, что искомая функция $\omega(t)$ принадлежит ему.

Поскольку $\omega(t)$ принадлежит $W_2^3(L)$, то при достаточно больших n справедливо неравенство

$$\|\omega(t) - \nu(t)\|_{W_2^3} < \varepsilon, \quad \nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \tag{13}$$

где y_i — элементы фундаментальной системы (11), α_i — постоянные, ε — произвольное положительное число.

Делая в (13) замену переменной в интеграле, определяющем норму $\xi = te^{-i\tau}$, и используя (10), получим

$$\|\nu(te^{i\tau}) - e^{i\tau}\nu(t) + \mu(t)\|_{W_2^3} \leqslant 2\varepsilon(1+\gamma)$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{t - z_k} - \frac{t}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^2} \right\|_{W_2^3}, \quad t \in L_k$$

Функция $\mu(t)$ определяется для $\nu(t)$ правой частью (10).

Отсюда можно получить оценку $\|\omega(t) - \nu_1(t)\|_{W_2^3} \leqslant \varepsilon F$, где ν_1, принадлежащая $W_2^3(L, \tau)$, строится по ν очевидным образом, F равномерно ограничена.

Приведем выражения для Ay_i, вычисленные с помощью вычетов и последующего предельного перехода $z \to t$ (A — оператор определяемый левой частью уравнения Шермана)

$$A(t_1)^m = t^m + mt\bar{t}^{m-1} - mR^2\bar{t}^{m-2}, \quad m \geqslant 2$$

$$A(t_1)^m = 2t^m, \quad t_1 \in L_0, \quad m = 0, 1$$

$$A(\bar{t}_1)^m = \bar{t}^m, \quad m \geqslant 1, \quad t_1 \in L_0$$

$$A\left(\frac{1}{t_2 - z_k}\right)^m = \frac{1}{(t - z_k)^m} - \frac{mt}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^{m+1}} + \frac{m}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^{m+1}}\left(z_k + \frac{r^2}{\bar{t} - \bar{z}_k}\right), \quad m \geqslant 1$$

$$A\left(\frac{1}{\bar{t}_2 - \bar{z}_k}\right)^m = \frac{1}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^m}, \quad m \geqslant 2, \quad t_2 \in L_k$$

$$A\left(\frac{1}{\bar{t}_2 - \bar{z}_k}\right) = -4\pi\left(\frac{1}{t - z_k} + \frac{1}{\bar{t} - \bar{z}_k} - \frac{t}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^2}\right)$$

Для упрощения записи принято $c_1 = c_2 = 1$.

К выражению для $A[1/(t_2 - z_k)^m]$ надо добавить член

$$2im(-1)^{m+1} m \sin(k(m+1)\tau)\, H^{-m-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\bar{t}} + \frac{t}{\bar{t}^2}\right)$$

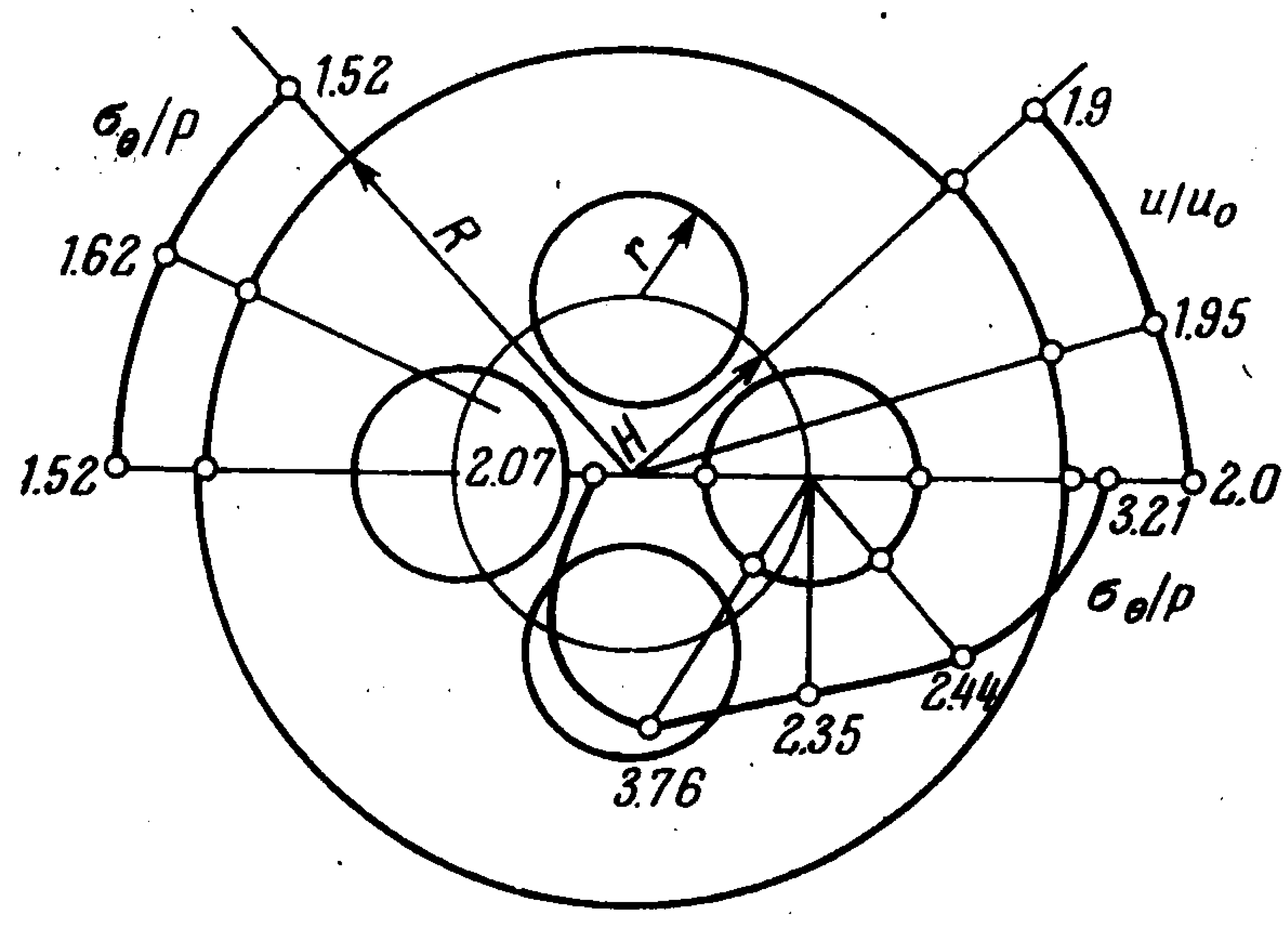
что в уравнении (3) соответствует тождественно равному нулю слагаемому вида

$$\frac{b_0}{t} + \frac{\bar{b}_0}{\bar{t}}\left(1 - \frac{t}{\bar{t}^2}\right)$$

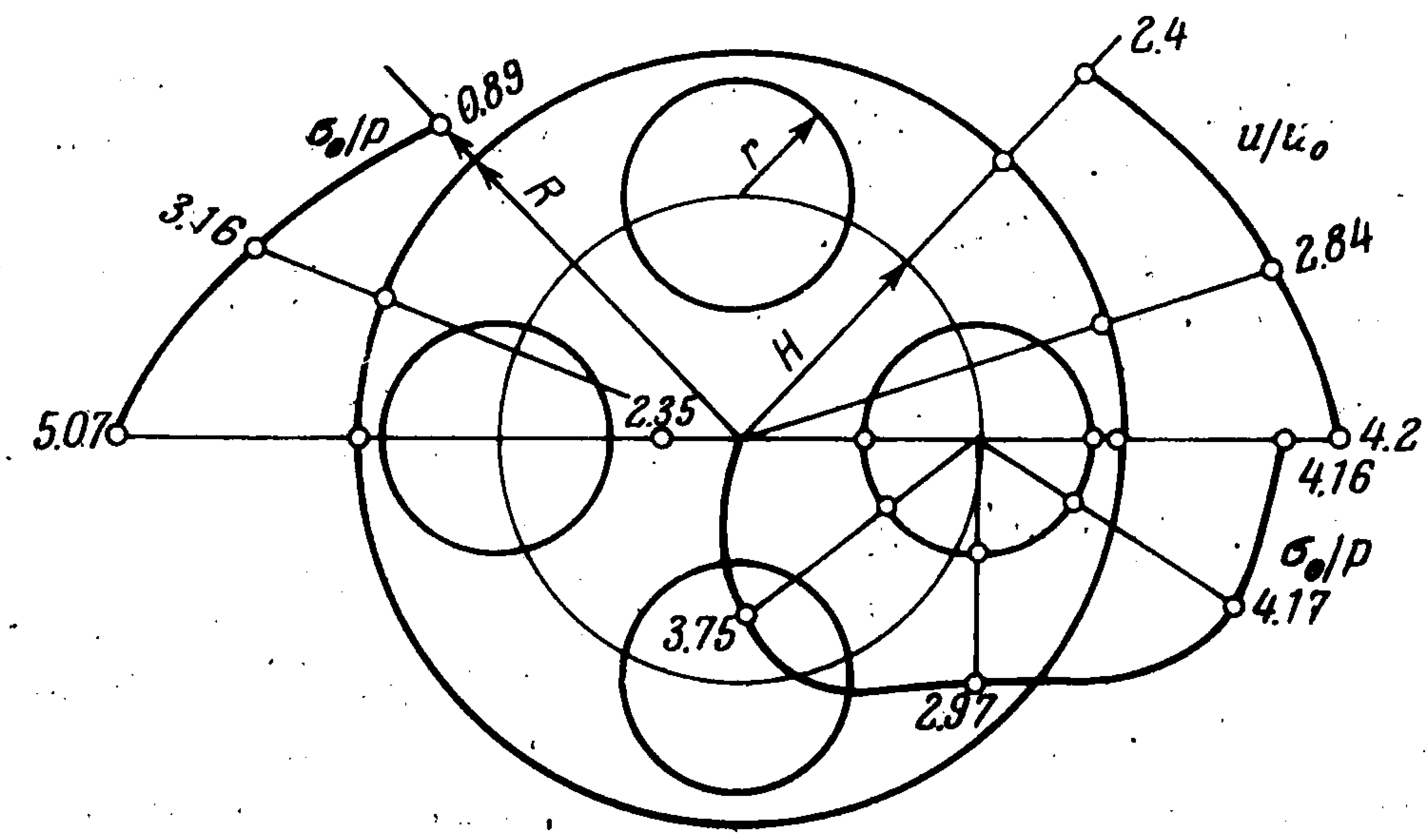
$$b_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}\,d\bar{t}\right\}, \quad H = |z_k|$$

Формулы для коэффициентов $a_{lk} = (Ay_k, Ay_l)_{W_2^3}$ строятся с помощью вычетов. Здесь они не приводятся из-за своей громоздкости.

Для численной реализации метода составлена программа и проведены расчеты на ЭВМ ICL-1905E. Напряжения σ_θ / P в точках L и радиальные смещения u / u_0 в точках L_0 (P — интенсивность нагрузки, u_0 — смещение в сплошном диске такого же радиуса) показаны на фиг. 1 для случая отверстий, близких между собой, и на фиг. 2 —



Фиг. 1



Фиг. 2

для отверстий, близких к краю диска. Относительные размеры дисков равны соответственно $r / R = 0.23$, $H / R = 0.4$ и $r / R = 0.3$, $H / R = 0.6$. Порядок нормальной системы выбирался равным 22, время счета около 30 *мин.* Близость полученного решения к точному оценивалась по относительной погрешности в выполнении граничных условий, составляющей в первом случае 4% и во втором 2.5%. Для $N = 6$, при таком же расположении отверстий и той же точности, время счета увеличивается до 42 *мин.*

Поступила 21 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буйвол В. М.* Бігармонічна задача для багатозв'язных систем з циклічною симетрією. Прикл. механіка, 1959, т. 5, № 3.
2. *Шерман Д. И.* К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
4. *Бухаринов Г. Н.* Решение плоской задачи теории упругости для диска, ослабленного несколькими круглыми отверстиями. Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем. наук, 1939, вып. 8.
5. *Перлин П. И.* Решение плоских задач теории упругости для многосвязных областей. Тр. Центрального н.-и. ин-та технологии машиностроения 1959, № 3.
6. *Кулиш В. Г.* Расчет на прочность пластины с запрессованными в нее круглыми дисками. Научн. тр. Ждановск. металлург. ин-та, вып. 16, 1971.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.