УДК 532.6.011

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА ЖИДКОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. Я. Клименков, Л. В. Полуянов

(Москва)

Исследуется устойчивость течения Куэтта несжимаемой неньютоновской жидкости второго порядка [1] при больших числах Рейнольдса в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости. В отличие от течения Куэтта ньютоновской жидкости (жидкости первого порядка), которое в рамках линейной теории устойчиво, для рассматриваемого течения показана возможность потери устойчивости уже в линейном приближении.

Проблеме гидродинамической устойчивости простых течений неньютоновских жидкостей посвящено достаточно много работ [2–4], в них исследовано влияние на устойчивость течений свойств упругости неньютоновских жидкостей. В частности, в работах [2,3] проанализированы изменения устойчивости, связанные с учетом упругости при малых отклонениях от ньютоновских свойств, для течений, которые обладают неустойчивостью и в случае обычной ньютоновской жидкости. В работе [4] исследована в рамках линейной теории устойчивость плоско-параллельного течения Куэтта и показано дестабилизирующее влияние свойств упругости жидкости на течение при малых числах Рейнольдса и значительно выраженных свойствах упругости.

В данной работе проблема устойчивости течения Куэтта при больших числах Рейнольдса исследуется для неупругой жидкости второго порядка, тензор вязких напряжений которой имеет вид [1]

$$\sigma_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) +$$
$$+ b\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) + \varkappa\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность жидкости, a, b, $\varkappa$ — коэффициенты нормальных напряжений.

1. Функция тока ψ плоского изотермического течения несжимаемой вязкой жидкости второго порядка удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, y)} = \nu\Delta\Delta\psi + \frac{b+\varkappa}{\rho}\Delta\frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, y)} - \tag{1.1}$$
$$-\frac{b}{\rho}\frac{\partial(\Delta\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, y)} + \frac{\varkappa}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Delta\psi$$

Рассмотрим устойчивость течения с профилем скорости $U(y)$ по отношению к малым возмущениям функции тока ψ' вида

$$\psi' = f(y)\, e^{i\alpha(x-ct)} \tag{1.2}$$

Линеаризуя уравнение (1.1) по ψ' и используя (1.2), получим для $f(y)$ в безразмерных переменных

$$[U - c + (\beta + \gamma)k\alpha^2 U]D^2 f - [1 + \alpha^2 k(\beta + \gamma)]U'' f = \tag{1.3}$$
$$= -\left(k\beta U + ck\gamma + \frac{i}{\alpha R}\right)D^2D^2 f + k\beta f U^{\mathrm{IV}} + k(\beta + \gamma)(UD^2 f - U'' f)'', \quad D^2 = d^2/dy^2 - \alpha^2$$
$$\beta = \frac{b}{m\rho\nu^2/T}, \quad \gamma = \frac{\varkappa}{m\rho\nu^2/T}, \quad k = \frac{m\nu^2}{TL^2}, \quad R = \frac{u_0 L}{\nu}$$

Здесь безразмерные постоянные β и γ (порядка единицы) зависят от выбора определенной статистической модели жидкости, m и T — соответственно масса молекулы и температура жидкости, измеряемая в энергетических единицах ($[T] =$ *эрг*), k — без-

[1] Савченко В. А. Кандидатская диссертация. Ростов-на-Дону, 1972.

размерный параметр, характеризующий величину отношения неньютоновских сил в жидкости к инерционным, L, u_0 — характерные размер и скорость течения.

Рассмотрим устойчивость течения Куэтта $U = y$ относительно возмущений, удовлетворяющих условию $0 < \alpha \sim 1$.

В уравнении (1.3) положим $\beta = 0$, что справедливо для некоторых статистических моделей жидкости. Тогда при больших числах Рейнольдса и при $k \gg 1 / R$ уравнение для возмущений принимает вид

$$(y - c + \gamma k\alpha^2 y) D^2 f = - ck\gamma D^2 D^2 f + \gamma k (yD^2 f)'' \tag{1.4}$$

Предельный переход $R \to \infty$ здесь не соответствует особым возмущениям [5], поскольку члены со старшими производными при этом не исчезают.

На стенках канала $y = \pm {}^1/_2$ возмущения продольной и поперечной скоростей обращаются в нуль, поэтому

$$f(\pm {}^1/_2) = f'(\pm {}^1/_2) = 0 \tag{1.5}$$

2. Общее решение линейного уравнения (1.4) можно записать в виде суперпозиции линейно-независимых решений $f_i (i = 1, \ldots, 4)$

$$f = \sum_{i=1}^{4} c_i f_i(y), \qquad c_i = \text{const} \tag{2.1}$$

Ввиду однородности граничных условий (1.5) решение (2.1) будет отлично от тривиального, если равен нулю следующий определитель:

$$| f_i({}^1/_2)\ f_i'({}^1/_2)\ f_i(-{}^1/_2)\ f_i'(-{}^1/_2) | = 0 \tag{2.2}$$

Первая пара линейно-независимых точных решений имеет простой вид

$$f_1(y) = e^{\alpha y}, \qquad f_2(y) = e^{-\alpha y} \tag{2.3}$$

Рассмотрим течения, удовлетворяющие условию $k \ll 1$, и вторую пару решений ищем в виде асимптотического ряда

$$f = f_0(\eta) + \Delta_1(\gamma k) f_1(\eta) + \ldots \qquad \eta = (y - c) / \Delta(\gamma k), \qquad \Delta, \ \Delta_1 = 0\,(1) \tag{2.4}$$

Заметим, что c и, следовательно, η могут быть комплексными.

Подставляя (2.4) в (1.4) и используя принцип минимальной вырожденности уравнений [5], в нулевом приближении имеем

$$\Delta(\gamma k) = \sqrt{\gamma k}, \qquad f_0^{\text{IV}} + \frac{2}{\eta} f_0''' - f_0'' = 0 \tag{2.5}$$

Фундаментальная система линейно-независимых решений уравнения (2.5) имеет вид

$$f_0^{(1)} = 1, \quad f_0^{(2)} = \eta, \quad f_0^{(3)} = \eta Ei(\eta) - e^{\eta} \tag{2.6}$$

$$f_0^{(4)} = \eta Ei(-\eta) + e^{-\eta}, \qquad Ei(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} e^t \frac{dt}{t}$$

В качестве второй пары решений, дополняющей пару (2.3), следует взять $f_0^{(3)}$ и $f_0^{(2)}$, поскольку решения $f_0^{(1)}$ и $f_0^{(2)}$ — линейные комбинации разложений решений f_1 и f_2 при $|y - c| \ll 1$. Решения $f_0^{(3)}$ и $f_0^{(4)}$ представляют собой многозначные функции с трансцендентной точкой ветвления при $\eta = 0$. Чтобы эти решения имели правильную асимптотику при $| y - c | \gg \sqrt{\gamma k}$, т. е.

$$f_3 \simeq \frac{1}{y - c} \exp\left(\frac{y}{\sqrt{\gamma k}}\right), \qquad f_4 \simeq \frac{1}{y - c} \exp\left(-\frac{y}{\sqrt{\gamma k}}\right)$$

необходимо выделить нужную ветвь интегральной показательной функции. Для этого следует сделать разрез вдоль отрицательной мнимой полуоси в плоскости комплексного переменного η, т. е. η должно удовлетворять условию

(2.7) $$-\pi / 2 < \arg \eta < 3\pi / 2$$

Равенства (2.3) и (2.6) дают требуемую систему линейно-независимых решений уравнения (1.4), которая далее используется в характеристическом уравнении (2.2).

3. Покажем, что рассматриваемый режим течения Куэтта неустойчивый. Для этого рассмотрим случай, когда

$$c_r = \operatorname{Re} c < 0, \qquad |c_i| = |\operatorname{Im} c| \sim \sqrt{\gamma k}$$

Видно, что элементы первых двух строк определителя (2.2) имеют величину порядка единицы. Далее в зависимости от того, ограниченность какого из решений $f_0^{(3)}$, $f_0^{(4)}$ потребовать при $y \in [-{}^1/_2, {}^1/_2]$ и $k \to 0$, соответственно $f_0^{(3)}$ или $f_0^{(4)}$ войдет в характеристическое уравнение, получим две возможные волны. Рассмотрим одну из них, потребовав ограниченности $f_0^{(4)}$. Это требование эквивалентно выполнению следующего соотношения:

(3.1) $$c_r = -{}^1/_2 + \theta \sqrt{\gamma k}, \qquad 0 < \theta \sim 1$$

и соответствует условию $c_r < 0$.

Удерживая далее в определителе (2.2) наибольшее по порядку величины слагаемое, получим

(3.2) $$f_3^{\bullet} ({}^1/_2) \; f_4' (-{}^1/_2) \; \operatorname{sh} \alpha = 0$$

Из трех сомножителей в левой части только второй может обратиться в нуль, в то время как первый в силу условия (3.1) равен $\sqrt{\gamma k} \exp (1 / \sqrt{\gamma k}) [1 + O (\sqrt{\gamma k})]$ и стремится к ∞ при $k \to 0$. Таким образом, как было отмечено выше, характеристическое уравнение содержит только ограниченное решение. Используя решения (2.6), находим

(3.3) $$f_4'\left(-\frac{1}{2}\right) \sim E_i\left(\frac{{}^1/_2 + c}{\sqrt{\gamma k}}\right) = 0$$

Представляют интерес только те корни уравнения (3.3), которые в силу условия (3.1) удовлетворяют неравенству

(3.4) $$\operatorname{Re} [({}^1/_2 + c) / \sqrt{\gamma k}] > 0$$

Отметим, что уравнение (3.3) не имеет вещественных корней, и, следовательно, рассматриваемое течение при сделанных выше ограничениях не допускает нейтральных колебаний. Уравнение (3.3) имеет следующий комплексный корень, удовлетворяющий требуемым условиям:

$$({}^1/_2 + c) / \sqrt{\gamma k} \simeq 1.31 \; e^{0.413\pi i}$$

Следовательно, вещественная и мнимая части c даются равенствами

$$c_r \simeq -{}^1/_2 + 0.31 \sqrt{\gamma k} + \ldots, \qquad c_i \simeq 1.1 \sqrt{\gamma k} + \ldots$$

Положительное c_i свидетельствует о том, что рассматриваемая волна нарастающая. Таким образом, течение Куэтта жидкости второго порядка при $R \to \infty$ допускает нарастающие волновые колебания и будет неустойчивым (в отличие от течения Куэтта ньютоновской жидкости, которое в рамках линейной теории остается устойчивым). Заметим, что наложенное выше условие $1 \gg k \gg 1 / R$ означает, что в уравнении (1.4) определяющими являются неньютоновские свойства жидкости ($k \gg 1 / \operatorname{Re}$), а порядок величины инерционных членов больше порядка неньютоновских ($1 \gg k$).

В заключение отметим, что $c_i \to 0$ при $k \to 0$, т. е. при ослабевании влияния неньютоновских свойств жидкости эффект неустойчивости исчезает. Результаты работы показывают, что дестабилизирующим фактором могут быть не только свойства упругости жидкости, как показано в [4], но и неньютоновские свойства, обусловленные учетом квадратичных по скорости членов в тензоре вязких напряжений.

Поступила 25 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савченко В. А., Хаванович Т. Н.* Уравнения движения жидкости второго порядка. ТМФ, 1970, т. 4, № 2, с. 246.
2. *Thomas R. H., Walters K.* The stability of elastico-viscous Flow between rotating cylinders, pt 1. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, No. 1.
3. *Листров А. Т.* Об устойчивости течения упруговязкой жидкости, стекающей по наклонной плоскости. ПМТФ, 1965, № 5.
4. *Городцов В. А., Леонов А. И.* О линейной неустойчивости плоскопараллельного течения Куэтта упруговязкой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics. Acad. Press, New York — London, 1964. (Рус. перев.: Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.)

УДК 539.3

О ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ЦИКЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

С. Б. Вигдергауз

(Ленинград)

Рассматривается задача об определении напряжений в тонком однородном диске, ослабленном N одинаковыми отверстиями, равноудаленными от центра, и нагруженном на обводе диска нормальным усилием постоянной интенсивности. Эта циклически симметричная задача решалась В. М. Буйволом [1] сведением интегрального уравнения Д. И. Шермана [2,3], записанного по границе L рассматриваемой области, к уравнению по l—части L, лежащей внутри угла $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \tau$. Здесь $\tau = 2\pi / N$, θ — угловая координата точек l в полярной системе, выбираемой в плоскости кольца очевидным образом, θ_0 произвольно.

Такой подход позволяет рационально использовать симметрию задачи при численном решении полученного уравнения, не накладывает в отличие от других методов [4–6] ограничений на размеры и расположение отверстий, а выбор подходящей нормы в методе наименьших квадратов обеспечивает равномерную сходимость комплексных потенциалов $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и их производных вплоть до границ. К сожалению, в работе [1] допущена ошибка. В ней преобразование функции $\omega(t)$ при повороте на угол τ определено лишь с точностью до существенного слагаемого — граничного значения функции, голоморфной вне рассматриваемой области (см. [7], стр. 220 — представление голоморфных функций интегралами типа Коши). Такое граничное значение влияет на вид функции $\psi(z)$, а значит, и на результат. В данной статье оно определяется из неиспользованного в [1] условия — преобразования $\psi(z)$ при повороте.

Доказано, что $\omega(t)$ принадлежит некоторому подпространству $W_2^3(L, \tau)$ пространства $W_2^3(L)$, построенному с учетом симметрии задачи. Применение в $W_2^3(L, \tau)$ метода наименьших квадратов приводит к экономичной вычислительной схеме. Приведены численные результаты для $N = 4$ при различной геометрии диска. Метод решения легко распространяется на случай любой статической нагрузки, не нарушающей симметрию задачи.

Введем следующие обозначения: S_+ — рассматриваемая область, S_- — дополнение S_+ до полной комплексной плоскости, L — граница области (не относится ни к S_+ ни к S_-), L_0 — внешняя граница диска радиуса R, L_k — граница, z_k — центр k-го отверстия радиуса r ($k = 1, 2, \ldots, N$), $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — функции Колосова, голоморфные в S_+, t, t_0 — точки на L.