Пример. Пусть $\alpha = (a + bx)^{4/3}$, $\beta = {}^4/_3\, b\, (a + bx)^{4/3}$, $\gamma = 0$. Тогда (3) имеет вид (см. [1])

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} - (a+bx)^{2/3}\frac{\partial}{\partial x}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} + (a+bx)^{2/3}\frac{\partial}{\partial x}\right] T = Q$$

Из (10) найдем (9)

$$L^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} + (a+bx)^{2/3}\right]^s \frac{\partial^{-(1+s)/2}}{\partial t^{-(1+s)/2}}$$

Решение (8) дается выражением

$$-a^{2/3}q_0(t) = \frac{d^{1/2}T_0(t)}{dt^{1/2}} + \frac{bT_0(t)}{3a^{1/3}} -$$

$$- \sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} + (a+bx)^{2/3}\frac{\partial}{\partial x}\right]^s \frac{\partial^{-(1+s)/2}Q(x,t)}{\partial t^{-(1+s)/2}}\Bigg|_{x=0}$$

Поступила 20 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко Ю. И.* Применение дробной производной в задачах теории теплопередачи. В кн.: Тепло- и массоперенос, т. 8. Тр. 4 Всес. совещания по тепло- и массообмену, Минск, 1972.
2. *Летников А. В.* Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int_a^x (x-u)^{p-1} \cdot f(u)du$. Матем. сб., 1874, т. 7.

УДК 538.4

УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВАХ В ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕДАХ

Г. Л. Седова

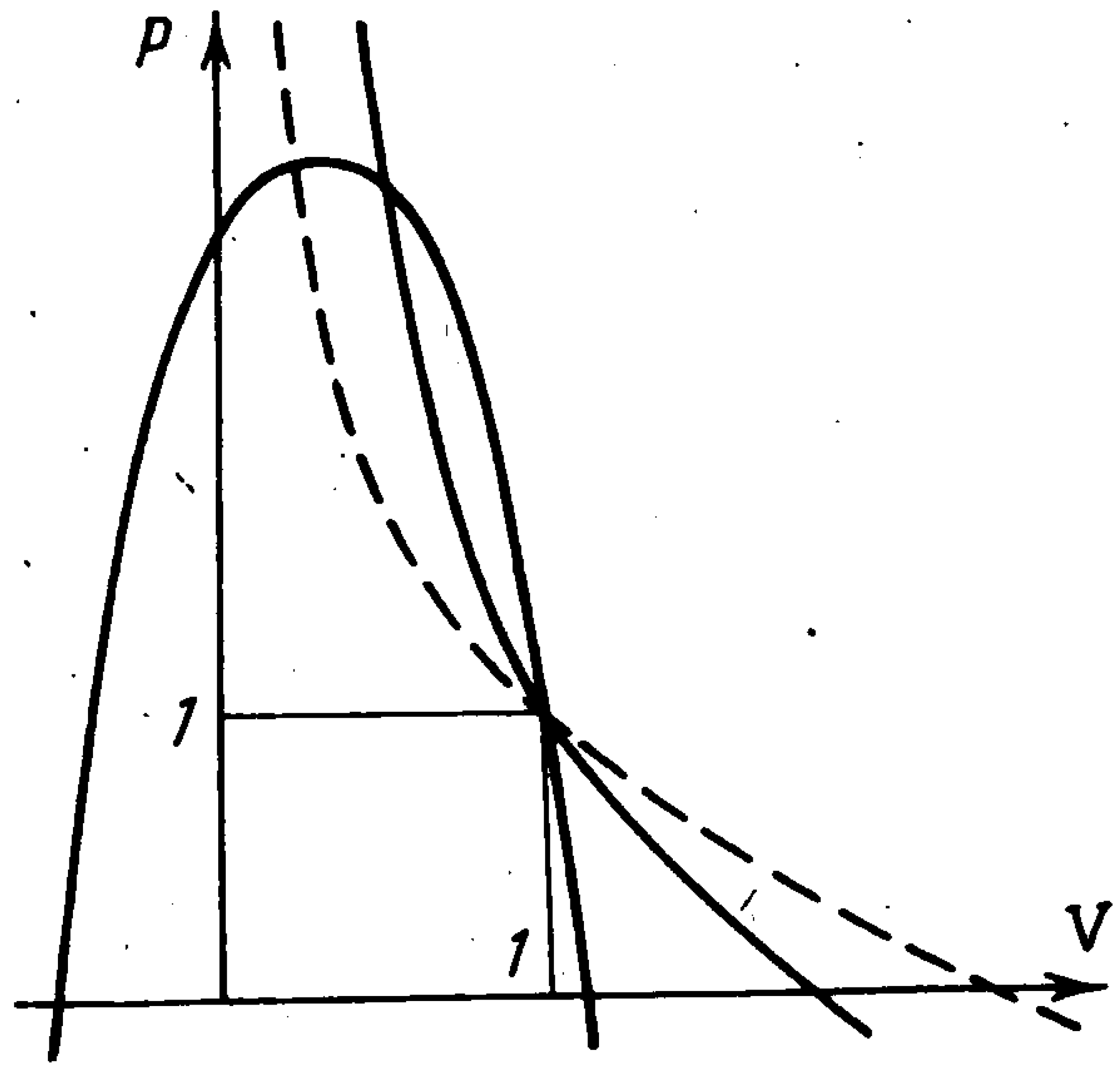
(Москва)

Выписываются условия на поверхности разрыва в поляризующихся средах в присутствии электрического поля. Из соображений эволюционности показывается, что в электрогидродинамике с характерной для большинства газов линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от плотности всегда, как и в обычной гидродинамике, осуществляется скачок уплотнения.

1. Условия на разрывах. Рассмотрим среду, которая в электрическом поле поляризуется по линейному закону $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где диэлектрическая проницаемость среды ε — функция плотности и температуры. Сформулируем условия на поверхности разрыва в таких средах.

Пусть Σ — поверхность, ограничивающая объем V, содержащий внутри себя некоторую часть поверхности разрыва S, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности Σ, L — контур, ограничивающий поверхность Σ_1, получающуюся в сечении объема V, плоскостью, проходящей через нормаль $\mathbf{n}$ и касательную τ к Σ в некоторой точке M.

Будем рассматривать установившиеся движения, тогда, выписывая все основные уравнения движения поляризующейся жидкости в интегральной форме в приближении электрогидродинамики и переходя к пределу при стягивании V и Σ к S и S к некоторой точке M, получим следующие условия на разрыве:



$$\{\rho v_n\} = 0 \tag{1.1}$$

$$\left\{\rho v_n + p + \frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{\varepsilon E_n}{4\pi}\right\} = 0$$

$$\left\{\rho v_n v_\tau - \frac{\varepsilon E_n E_\tau}{4\pi}\right\} = 0$$

$$\rho v_n \left\{\frac{v^2}{2} + w - \frac{E^2}{8\pi\rho}\left[T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\right\} = 0$$

$$\{D_n\} = 0, \qquad \{E_\tau\} = 0 \qquad (\{f\} = f_1 - f_2)$$

Рассмотрим различные типы скачков: а) скачок с непротеканием жидкости через поверхность и б) скачок, через который жидкость движется.

а) Пусть нормальная составляющая скорости на разрыве равна нулю, тогда получаем следующие соотношения:

$$\rho_{1,2} \text{ — любое}, \quad v_{\tau 1,2} \text{ — любое}$$

$$\{p\} + \left\{\frac{E_n^2}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \varepsilon\right]\right\} + \frac{E_\tau^2}{8\pi}\left\{\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right\} = 0$$

Таким образом, из интегральных уравнений можно получить связь скачка давления и скачка электрического поля.

б) Предположим, что $v_n \neq 0$, тогда, полагая $v_{\tau 1} = 0$, а следовательно, и $v_{\tau 2} = 0$, получим

$$\{\rho v_n\} = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho v_n \{v_n\} + \{p\} - \left\{\frac{E_n^2}{8\pi}\left[\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \varepsilon\right]\right\} + \frac{E_\tau^2}{8\pi}\left\{\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right\}$$

$$\frac{v_n^2}{2} + w - \frac{E^2}{8\pi\rho}\left[T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]$$

$$\{D_n\} = 0, \qquad \{E_\tau\} = 0$$

2. Уравнение ударной адиабаты и уравнение импульсов в случае зависимости диэлектрической проницаемости только от плотности. Рассмотрим случай, характерный для большинства газов, когда диэлектрическая проницаемость — линейная функция плотности: $\varepsilon - 1 = \alpha\rho$ для достаточно большого диапазона температур.

Введем обозначения

$$P = \frac{p_2}{p_1}, \quad V = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad e^2 = \frac{E_{1n}^2}{8\pi p_1}, \quad \rho v_n = m, \quad \alpha^* = \alpha\rho_1, \quad k = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \Omega = \frac{m^2}{p_1\rho_1}$$

Проведя ряд выкладок, из системы (1.2) получаем для совершенного газа уравнение ударной адиабаты

$$P = \frac{1}{kV-1}\left[k - V + \frac{e^2\alpha^{*2}(1-V)^3}{(\alpha^* + V)^2}\right], \qquad w = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{2.1}$$

Это уравнение имеет две асимптоты

$$P = -(1 + e^2\alpha^{*2}) / k, \qquad V = 1 / k$$

Видно, что в промежутке $1 / k < V < 1$ ударная адиабата (2.1) монотонно убывает с ростом V. График уравнений адиабаты представлен на фигуре сплошной линией.

Из системы (1.2) можно получить также уравнение импульсов

$$P = 1 + \Omega(1 - V) - \frac{e^2\alpha^{*2}(1-V)(2\alpha^* + 1 + V)}{(\alpha^* + V)^2} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) имеет две асимптоты: $V = -\alpha^*$ и $P = -\infty$. Видно, что

$$\partial P / \partial V = 0 \quad \text{при} \quad V_{max} = [2e^2\alpha^{*2}(\alpha^* + 1)^2 / \Omega^{1/3}] - \alpha^*$$

Можно подсчитать, что при характерных параметрах среды $\rho \sim 10^{-3}$ *г / см*^{3}, $v \sim 10^3$ *см / сек* и $E < 30$ *ед.* СГСЭ получаем $V_{max} < 1$. График уравнения импульсов представлен на фигуре сплошной линией, пересекающей в двух точках адиабату (2.1).

3. Эволюционность электрогидродинамических ударных волн. Показано [1], что разрыв устойчив, если число расходящихся от разрыва слабых возмущений на единицу меньше числа уравнений. Известно [2, 3], что в электрогидродинамике существуют два типа слабых возмущений: энтропийные волны, которые распространяются вместе с жидкостью, и звуковые волны, распространяющиеся со скоростью $a = \pm (a^2_0 + \alpha^2\rho E^2 / 4\pi\varepsilon)^{1/2}$. Будем считать эти волны приходящими на разрыв, если их скорость направлена от ударной волны. Разрыв при фиксированных D_n и E_τ описывается тремя уравнениями: уравнения сохранения массы, импульса и энергии. Следовательно, для эволюционности необходимо, чтобы от разрыва расходились две волны. Такая ситуация осуществляется, если скорость перед разрывом больше скорости звука, а скорость за разрывом меньше скорости звука: $v_1 > a_1$, $v_2 < a_2$. Из условия $v_1 > a_1$ следует

$$v_1^2 > a_0^2 + \alpha^2\rho_1 E_1^2 / 4\pi\varepsilon \quad \text{или} \quad -\Omega + e^2\alpha^{*2} / (\alpha^* + 1) < -\gamma \tag{3.1}$$

Слева в последнем неравенстве стоит величина, равная тангенсу угла наклона кривой, описываемой уравнением импульсов; справа — величина, равная тангенсу угла наклона ударной адиабаты в точке $V = 1$, $P = 1$. Из (3.1) следует, что в эволюционных волнах линия, описываемая уравнением импульсов, в точке $V = 1$, $P = 1$ при $V < 1$ идет выше ударной адиабаты и обязательно пересекает последнюю в интервале $1 / k < V < 1$. Таким образом, показано, что ударные волны в электрогидродинамике в случае линейной зависимости от плотности всегда представляют собой волны сжатия. При этом нормальная составляющая электрического поля за фронтом волны меньше нормальной составляющей электрического поля перед фронтом.

Из (2.1) видно, что при $V < 1$ график ударной адиабаты лежит выше обычной газодинамической адиабаты, т. е. в области $S > S_1$, где S_1 — значение энтропии в точке $P = 1$, $V = 1$. Следовательно, из условия роста энтропии на скачке можно также получить, что рассматриваемый скачок является скачком уплотнения.

Поступила 12 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М., «Наука», 1970.