УДК 536.2.02 : 517.4

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Ю. И. Бабенко

(Ленинград)

Рассматривается задача о прогреве полубесконечной области с переменными физическими параметрами при наличии распределенных источников тепла. Найдено функциональное выражение, позволяющее определить градиент температуры на границе области в виде ряда по производным дробного порядка от температуры границы.

Ранее этот метод был предложен [1] для случая, когда тепловые источники в среде отсутствуют.

Будем исследовать процесс теплопередачи в полубесконечной области, описываемый задачей

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \alpha(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \gamma(x,t)\right]T = Q(x,t), \quad x \geqslant 0, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$T|_{x=0} = T_0(t), \quad T|_{x=\infty} = 0, \quad T|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

Здесь $\alpha > 0$, β, $\gamma \geqslant 0$, Q — аналитические функции координаты x и времени t, T — температура в произвольной точке, T_0 — заданная температура границы. Требуется определить только градиент температуры на границе области $q_0 = (\partial T / \partial x)_{x=0}$.

Уравнение (1) можно записать в форме [1]

$$LMT = Q \tag{3}$$

$$L = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x,t)\frac{\partial^{(1-m)/2}}{\partial t^{(1-m)/2}} - \alpha^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t)\frac{\partial^{(1-n)/2}}{\partial t^{(1-n)/2}} + \alpha^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}$$

Здесь a_n и b_m — известные функции, определенные в [1] через α, β, γ и их производные. Операторы дробного дифференцирования порядка ν определены так же, как в работе [2] ($f(t)$ — произвольная функция)

$$\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\nu}d\tau \tag{4}$$

Основные свойства операции (4)

$$\frac{d^\mu}{dt^\mu}\frac{d^\nu}{dt^\nu}f(t) = \frac{d^{\mu+\nu}}{dt^{\mu+\nu}}f(t), \qquad \mu+\nu \leqslant 1 \tag{5}$$

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu}{n}f^{(n)}(t)\frac{d^{\nu-n}g(t)}{dt^{\nu-n}}$$

Рассмотрим теперь вместо (3) уравнение

$$MT = Q^* \qquad (LQ^* = Q) \tag{6}$$

Вспомогательная функция Q^* может быть найдена в виде (L^{-1} — оператор, обратный к L при умножении на последний справа)

$$Q^* = LL^{-1}Q^* = L^{-1}Q \tag{7}$$

Решения уравнения (6) будут одновременно и решениями исходного уравнения (1), в чем можно убедиться, умножая (6) слева на оператор L. Можно показать, что решение уравнения (6) удовлетворяет также условиям (2), например для случая, когда

$$\lim x \to \infty, \ \alpha, \ \beta, \ \gamma = \mathrm{const}, \qquad \lim x \to \infty, \quad Q = 0, \quad T_0(0) = 0$$

Если ряды сходятся абсолютно и равномерно по x для $x \to +0$, то, записывая (6) при $x = 0$, сразу получаем решение поставленной задачи — выражение градиента температуры у границы через температуру границы

$$-\alpha^{1/2}(0, t) \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0, t) \frac{d^{(1-n)/2} T_0(t)}{dt^{(1-n)/2}} - Q^*(0, t) \tag{8}$$

Поясним, как определяется Q^* из (7). Оператор L^{-1} ищется в виде

$$L^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} G_s\left(x, t, \frac{\partial^r}{\partial x^r}\right) \frac{\partial^{-(1+s)/2}}{\partial t^{-(1+s)/2}}, \qquad r \leqslant s \tag{9}$$

где G_s — пока неизвестные операторы. Подставляя (9) в (7) и перемножая операторы с учетом правил (5), получим символическое уравнение для определения операторов G_s

$$\left[\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1+s}{2}}{k} b_m \frac{\partial^k G_s}{\partial t^k} \frac{\partial^{-(m+s)/2-k}}{\partial t^{-(m+s)/2-k}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1+s}{2}}{k} \alpha^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^k G_s}{\partial t^k} \frac{\partial^{-(1+s)/2-k}}{\partial t^{-(1+s)/2-k}}\right] Q = Q$$

Приравнивая члены при одинаковых показателях производных по времени, получим символическую систему рекуррентных соотношений для определения операторов G_s по известным функциям b_m и α

$$b_0 G_0 Q = Q \tag{10}$$
$$\left(b_0 G_1 + b_1 G_0 - \alpha^{1/2} \frac{\partial G_0}{\partial x}\right) \frac{\partial^{-1/2} Q}{\partial t^{-1/2}} = 0$$
$$\left(b_0 G_2 + b_1 G_1 + b_2 G_0 - \frac{1}{2} b_0 \frac{\partial G_0}{\partial t} - \alpha^{1/2} \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G_0}{\partial t}\right) \frac{\partial^{-1} Q}{\partial t^{-1}} = 0$$

. . . .

$$\left[\sum_{m=0}\sum_{s=0}^{p-m-s\geqslant 0} \binom{-\frac{1+s}{2}}{\frac{p-m-s}{2}} b_m \frac{\partial^{(p-m-s)/2} G_s}{\partial t^{(p-m-s)/2}} - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=0}^{p-1-s\geqslant 0} \binom{-\frac{1+s}{2}}{\frac{p-1-s}{2}} \alpha^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{(p-1-s)/2}}{\partial t^{(p-1-s)/2}}\right] \frac{\partial^{-p/2} Q}{\partial t^{-p/2}} = 0$$

. . . .

Отсюда найдем явные выражения для операторов G_s

$$G_0 = \frac{1}{b_0}, \qquad G_1 = \left(\alpha^{1/2} \frac{\partial G_0}{\partial x} - b_1 G_0\right)$$
$$G_2 = \left(\frac{1}{2} b_0 \frac{\partial G_0}{\partial t} + \alpha^{1/2} \frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \alpha^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial G_0}{\partial t} - b_1 G_1 - b_2 G_0\right) \Big/ b_0$$

. . . .

Пример. Пусть $\alpha = (a + bx)^{4/3}$, $\beta = {}^4/_3\, b\,(a + bx)^{1/3}$, $\gamma = 0$. Тогда (3) имеет вид (см. [1])

$$\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} - (a+bx)^{2/3}\frac{\partial}{\partial x}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} + (a+bx)^{2/3}\frac{\partial}{\partial x}\right]T = Q$$

Из (10) найдем (9)

$$L^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} + (a+bx)^{2/3}\right]^s \frac{\partial^{-(1+s)/2}}{\partial t^{-(1+s)/2}}$$

Решение (8) дается выражением

$$-a^{2/3}q_0(t) = \frac{d^{1/2}T_0(t)}{dt^{1/2}} + \frac{bT_0(t)}{3a^{1/3}} -$$

$$-\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{b}{3}(a+bx)^{-1/3} + (a+bx)^{2/3}\frac{\partial}{\partial x}\right]^s \left.\frac{\partial^{-(1+s)/2}Q(x,t)}{\partial t^{-(1+s)/2}}\right|_{x=0}$$

Поступила 20 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко Ю. И.* Применение дробной производной в задачах теории теплопередачи. В кн.: Тепло- и массоперенос, т. 8. Тр. 4 Всес. совещания по тепло- и массообмену, Минск, 1972.

2. *Летников А. В.* Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int\limits_a^x (x-u)^{p-1}\cdot$ $\cdot f(u)du$. Матем. сб., 1874, т. 7.

УДК 538.4

УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВАХ В ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕДАХ

Г. Л. Седова

(Москва)

Выписываются условия на поверхности разрыва в поляризующихся средах в присутствии электрического поля. Из соображений эволюционности показывается, что в электрогидродинамике с характерной для большинства газов линейной зависимостью диэлектрической проницаемости от плотности всегда, как и в обычной гидродинамике, осуществляется скачок уплотнения.

1. Условия на разрывах. Рассмотрим среду, которая в электрическом поле поляризуется по линейному закону $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где диэлектрическая проницаемость среды ε — функция плотности и температуры. Сформулируем условия на поверхности разрыва в таких средах.

Пусть Σ — поверхность, ограничивающая объем V, содержащий внутри себя некоторую часть поверхности разрыва S, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности Σ, L — контур, ограничивающий поверхность Σ_1, получающуюся в сечении объема V, плоскостью, проходящей через нормаль $\mathbf{n}$ и касательную $\boldsymbol{\tau}$ к Σ в некоторой точке M.