Отсюда и из положительности решений (3) и их первых и вторых производных при $t = \omega$ заключаем, что

$$b \geqslant -q^*, \qquad q^* = q(S+1)(3S + {}^5/_2)$$

Поэтому для завершения доказательства леммы остается показать, что $q^* < 5$, или

$$q^2 - 75q + 90 > 0 \tag{7}$$

Неравенство (7) следует из условия (5) леммы, так как число d — меньший корень трехчлена в левой части (7).

Лемма доказана.

Пусть $a \neq b$. Тогда число $\rho = 1$ не является корнем уравнения (2). Производя в (2) замену по формуле $\rho = (\lambda + 1) / (\lambda - 1)$, придем к уравнению

$$(b - a)\lambda^3 + (6 - a - b)\lambda^2 + (a - b)\lambda + (a + b + 2) = 0 \tag{8}$$

для которого $\lambda = 1$ не является корнем.

Теорема. Пусть непрерывная ω-периодическая функция $p(t)$ неположительна и $p(t) \not\equiv 0$. Пусть выполнено неравенство (5). Тогда уравнение (1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть сначала $a \neq b$. Тогда в силу условия (6) полином в левой части уравнения (8) является стандартным [1]. Из условий Гурвица следует, что уравнение (8) имеет по крайней мере один корень в правой полуплоскости. Возвращаясь к переменной ρ, заключаем, что уравнение (1) имеет хотя бы один мультипликатор ρ, для которого $|\rho| > 1$, что и доказывает теорему при $a \neq b$.

При $a = b$ уравнение (2) имеет корень

$$\rho = {}^1/_2 \left(a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}\right) > 1 \qquad (a > 3)$$

Следовательно, и при $a = b$ уравнение (1) неустойчиво.

Теорема доказана.

Поступила 30 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука» 1967.

УДК 534

СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Колоколов

(Москва)

Для нелинейного волнового уравнения прямым вариационным методом доказывается существование счетного множества стационарных решений с цилиндрической и сферической симметрией.

Стационарные решения нелинейного волнового уравнения, позволяющие оценить характерные пространственные и энергетические параметры световых пучков в нелинейной среде, были подробно изучены для случая кубичного волнового уравнения[1–4]. При большой интенсивности световых волн зависимость диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon(|E|)$ перестает быть квадратичной и становится сложной функцией амплитуды поля $|E|$. Определение точной функциональной зависимости $\varepsilon(|E|)$ при больших полях даже в случае ориентационного эффекта Керра встречает большие трудности и может быть доведено до конца только для простейшей модели невзаимодействующих молекул [5]. В рамках этой модели было получено, что $\varepsilon(|E|)$ является монотонно растущей и ограниченной функцией при всех значениях амплитуды $|E|$. Обобщение теории на случай взаимодействующи молекул не меняет монотонности роста и ограниченности функции $\varepsilon(|E|)$, а приводит лишь к изменению величины поля насыщения и максимально возможного приращения нелинейной диэлектрической проницаемости [6,7]. Возникает задача исследования существования стационарных решений без конкретизации функциональной зависимости $\varepsilon(|E|)$, с использованием лишь монотонности ее роста и ограниченности. Метод фазовой плоскости, примененный в ряде работ [1,3] в данном случае использован быть не может, так как он носит качественный характер и должен всегда проверяться численными расчетами. Необходимо также отметить, что из численных расчетов, проведенных для простейших моделей среды с насыщающейся нелинейностью [8,9], совсем не следует существование стационарных решений в реальных средах с ориентационным эффектом Керра.

В данной работе на основе прямого вариационного метода [10,11] доказывается, что монотонность роста и ограниченность функции $\varepsilon(|E|)$ являются достаточными условиями существования счетного множества стационарных решений с цилиндрической или сферической симметрией и обладающих конечной энергией. Полученные результаты применимы не только в нелинейной оптике, но и в нелинейной полевой теории элементарных частиц, где из-за неустойчивости решений кубичного волнового уравнения приходится вводить в уравнение более сложные нелинейные члены [8,12].

1. Существование основной моды. Стационарным решением уравнения

$$i\frac{\partial E}{\partial \tau}+\Delta E+f(|E|^2)E=0 \tag{1.1}$$

будем называть решение вида $E=\varphi(r)e^{j\gamma\tau}$, где $\varphi(r)$ — функция с интегрируемым квадратом, удовлетворяющая уравнению и граничным условиям

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{m}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\gamma\varphi+f(\varphi^2)\varphi=0 \quad (\gamma>0) \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=0}=0, \qquad \varphi(\infty)=0 \tag{1.3}$$

Здесь $m=0,1,2$ определяется размерностью лапласиана в уравнении (1.1).

Для доказательства существования решений рассмотрим следующую вариационную задачу: найти максимум функционала

$$G(\varphi)=\int F(\varphi^2)\,dv, \quad F(\varphi^2)=\int_0^{\varphi^2} f(\eta)\,d\eta, \quad dv=r^m dr$$

на классе положительных функций с кусочно-гладкими производными, удовлетворяющих граничным условиям (1.3) и нормировке

$$N(\varphi)=\int[(\nabla\varphi)^2+\gamma\varphi^2]\,dv=R=\mathrm{const} \tag{1.4}$$

Функция $f(\eta)$ положительна и ограничена при всех значениях η, поэтому функционал $G(\varphi)$ на классе введенных функций ограничен сверху

$$G(\varphi)\leqslant\int f\varphi^2 dv\leqslant \max f(\varphi^2)\,R/\gamma$$

Здесь использовано, что при $f_\eta'>0$

$$F(\varphi^2)=f\varphi^2-\int_0^{\varphi^2} f_\eta'\eta\,d\eta\leqslant f\varphi^2$$

В дальнейшем будем считать, что $f(0) = 0$, $\lim \eta \to \infty\, f = M$, $f_\eta' > 0$ при всех $\eta > 0$. В силу ограниченности сверху функционал $G(\varphi)$ имеет точную верхнюю границу λ и существует максимизирующая последовательность функций $y_n > 0$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, причем $\lim\, n \to \infty\, G(y_n) = \lambda$.

Докажем, что максимизирующую последовательность y_n можно всегда выбрать таким образом, чтобы ее предельная функция y_0 являлась положительным решением уравнения ($\alpha(R)$ — непрерывная функция константы нормировки R)

$$\frac{d^2y_0}{dr^2} + \frac{m}{r}\frac{dy_0}{dr} - \gamma y_0 + \alpha(R) f(y_0^2) y_0 = 0 \tag{1.5}$$

Каждой функции y_n поставим в соответствие функцию u_n, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2u_n}{dr^2} + \frac{m}{r}\frac{du_n}{dr} - \gamma u_n + \alpha_n f(y_n^2) y_n = 0 \tag{1.6}$$

и граничным условиям (1.3). Здесь α_n определяется из условия нормировки $N(u_n) = R$. Решение уравнения (1.6) можно записать в виде

$$u_n = \alpha_n \int_0^\infty f(y_n^2) y_n g_m(r, \xi)\, d\xi \tag{1.7}$$

где $g_m(r, \xi)$ — функция Грина однородного уравнения (1.6) с граничными условиями (1.3). Из свойств функций Грина $g_m(r, \xi)$, ограниченности $f(\varphi^2)$ и нормировки y_n следует равномерная ограниченность последовательности u_n

$$0 < u_n(r) < \alpha_n \left(\int_0^\infty f^2 y_n^2 \xi^m d\xi\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \frac{g_m^2(r, \xi)}{\xi^m}\, d\xi\right)^{1/2} < cR \tag{1.8}$$

Из (1.8) и (1.4) получим

$$\int_0^\infty \left(\frac{du_n}{dr}\right)^2 dr < c_1$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность последовательности u_n [13].

Докажем, что $\lim\, n \to \infty\, G(u_n) = \lambda$. Так как функции u_n удовлетворяют тем же условиям, что и y_n, то $G(u_n) \leqslant \lambda$ при всех n. В силу условия $f_\eta' > 0$ справедливо неравенство

$$G(u_n) \geqslant G(y_n) + \int (u_n^2 - y_n^2) f(y_n^2)\, dv \tag{1.9}$$

Умножая (1.6) на u_n, интегрируя по всему пространству, на основе неравенства Буняковского получим

$$R^2 \leqslant \alpha_n^2 \int f(y_n^2) y_n^2\, dv \int f(y_n^2) u_n^2\, dv \tag{1.10}$$

Умножая (1.6) на y_n, интегрируя и вновь используя неравенство Буняковского, после несложных преобразований получим

$$R \geqslant \alpha_n \int f(y_n^2) y_n^2\, dv \tag{1.11}$$

Из (1.9) — (1.11) следует $\lambda \geqslant G(u_n) \geqslant G(y_n)$ и $\lim G(u_n) = \lim G(y_n) = \lambda$ $n \to \infty$.

Таким образом, доказано, что последовательность u_n является максимизирующей, равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Следовательно, в качестве исходной максимизирующей последовательности y_n можно всегда выбрать равномерно ограниченную и равностепенно непрерывную. Согласно известной теореме, из таких последовательностей можно выбрать подпоследовательности, сходящиеся к непрерывным предельным функциям y_0 и u_0, причем $G(y_0) = G(u_0) = \lambda$ [13]. Для предельных функций неравенства (1.9) — (1.11) обращаются в равенства, что возможно лишь при условии

$$\int (y_0 - u_0)^2 \, dv = 0 \tag{1.12}$$

Из (1.12) и непрерывности u_0 и y_0 следует, что в каждой точке $y_0(r) = u_0(r)$. Так как y_n, u_n в силу (1.8) ограниченные функции и

$$\int_t^\infty f(y_n^2)\, y_n g_m(r, \xi)\, d\xi < cMR \int_0^\infty g_m(r, \xi)\, d\xi < \infty$$

то в (1.7) можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$y_0 = \alpha \int_0^\infty f(y_0^2)\, y_0 g_m(r, \xi)\, d\xi, \qquad \alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \tag{1.13}$$

Дифференцируя (1.13) по r, получим, что y_0 удовлетворяет уравнению (1.5) и граничным условиям (1.3), Докажем, что при $0 < \gamma < M$ величину R можно выбрать таким образом, что $\alpha(R) = 1$. Из (1.5) имеем верхнюю и нижнюю оценки для α

$$\frac{R}{G(y_0)} > \alpha = \frac{R}{\int f y_0^2 dv} > \frac{\gamma}{\max f(y_0^2)}$$

Из (1.8) видно, что

$$\lim (\max y_0^2) = \lim (\max f(y_0^2)) = 0, \qquad R \to 0$$

Отсюда $\alpha(R) \to \infty$ при $R \to 0$. Докажем теперь, что $\alpha(R) < 1$ при $R > R^*$. Для этого достаточно найти положительную функцию Ψ, для которой при нормировке $N(\Psi) = R > R^*$ выполняется неравенство

$$N(\Psi) / G(\Psi) = R / G(\Psi) < 1$$

Такой функцией является положительное решение задачи

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{m}{r}\frac{d\Psi}{dr} - \gamma\Psi + M'\Psi = 0 \qquad (\gamma < M' < M) \tag{1.14}$$

$$\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad \Psi(r_1) = 0, \quad \Psi(r) = 0, \quad r > r_1$$

Здесь $r_1 = \pi / \sqrt{M' - \gamma}$ при $m = 0, 2$, $r_1 = x_1 / \sqrt{M' - \gamma}$ при $m = 1$, $x_1 = 2.41$ — наименьший корень функции Бесселя нулевого порядка. При $M' < M = \max f$ и $f'_\eta > 0$ можно доказать существование такого числа $\beta_1 > 0$, что при $\beta > \beta_1$ выполняется неравенство

$$M' \int \beta^2\Psi^2 dv < \int F(\beta^2\Psi^2)\, dv = G(\beta\Psi) \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) следует, что $N(\beta\Psi) / G(\beta\Psi) < 1$ при $\beta > \beta_1$.

Если выберем константу нормировки $R > R^* = N(\beta_1\Psi)$, то

$$\alpha(R) < \frac{R}{\max G} < \frac{R}{G(\beta\Psi)} < 1$$

Таким образом, $\alpha(R) \to \infty$ при $R \to 0$, $\alpha(R) < 1$ при $R > R^*$, поэтому существует такая константа нормировки $R^* > R_0 > 0$, что $\alpha(R_0) = 1$, и предельная функция рассматриваемой вариационной задачи является положительным решением уравнения (1.2). При $\gamma > M$ уравнение (1.2) решений с интегрируемым квадратом не имеет. Умножая (1.2) на φ и интегрируя, получим

$$M \int \varphi^2 dv \geqslant \int f\varphi^2 dv \geqslant \gamma \int \varphi^2 dv + k \left(\int \varphi^2 dv\right)^2 \Big/ \int r^2\varphi^2 dv. \tag{1.16}$$

Здесь использовано известное неравенство

$$\int (\nabla\varphi)^2 dv \int r^2\varphi^2 dv \geqslant k\,(m) \left(\int \varphi^2 dv\right)^2$$

где $k\,(m)$ — константа, зависящая только от размерности пространства m [14]. Из (1.16) следует

$$M > \gamma \qquad \langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2\varphi^2 dv}{\int \varphi^2 dv} \geqslant \frac{k}{M-\gamma} \tag{1.17}$$

В среде с насыщающейся нелинейностью минимальный размер стационарного решения ограничен снизу величиной $k\,/\,(M - \gamma)$. В случае неограниченной функции (φ^2) эффективный размер стационарного распределения $\langle r^2\rangle$ может быть сколь угодно малым.

Рассмотрим кратко основные свойства решений уравнения (1.2) в случае конечной области. Доказательство существования положительного решения уравнения (1.2) граничными условиями $\varphi\,(r_1) = \varphi\,(\infty) = 0$, $r_1 \leqslant r < \infty$ при $m = 1,2$ проводится аналогично. Можно доказать, что при $r_1 \to \infty$ функционал [11]

$$H\,(\varphi) = \int \left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \gamma\varphi^2 - F\,(\varphi^2)\right] dv \to \infty \tag{1.18}$$

При $m = 0$ (одномерное пространство) данная граничная задача решения не имеет. Умножая (1.2) на $d\varphi\,/\,dr$, при $m = 0$ получим первый интеграл

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \gamma\varphi^2 - F\,(\varphi^2) = c \tag{1.19}$$

Имеем $d\varphi\,/\,dr \to 0$, $\varphi \to 0$ при $r \to \infty$, поэтому для стационарного решения $c = 0$, Отсюда следует, что в точке $r = r_1$ не только $\varphi\,(r_1) = 0$, но и $d\varphi\,/\,dr_1 = 0$. Уравнение 1.19) с граничными условиями $d\varphi\,/\,dr_1 = \varphi\,(r_1) = \varphi\,(\infty) = 0$ имеет единственное решение $\varphi \equiv 0$. Благодаря этому обстоятельству, в одномерном случае существует только основная мода и отсутствуют высшие моды.

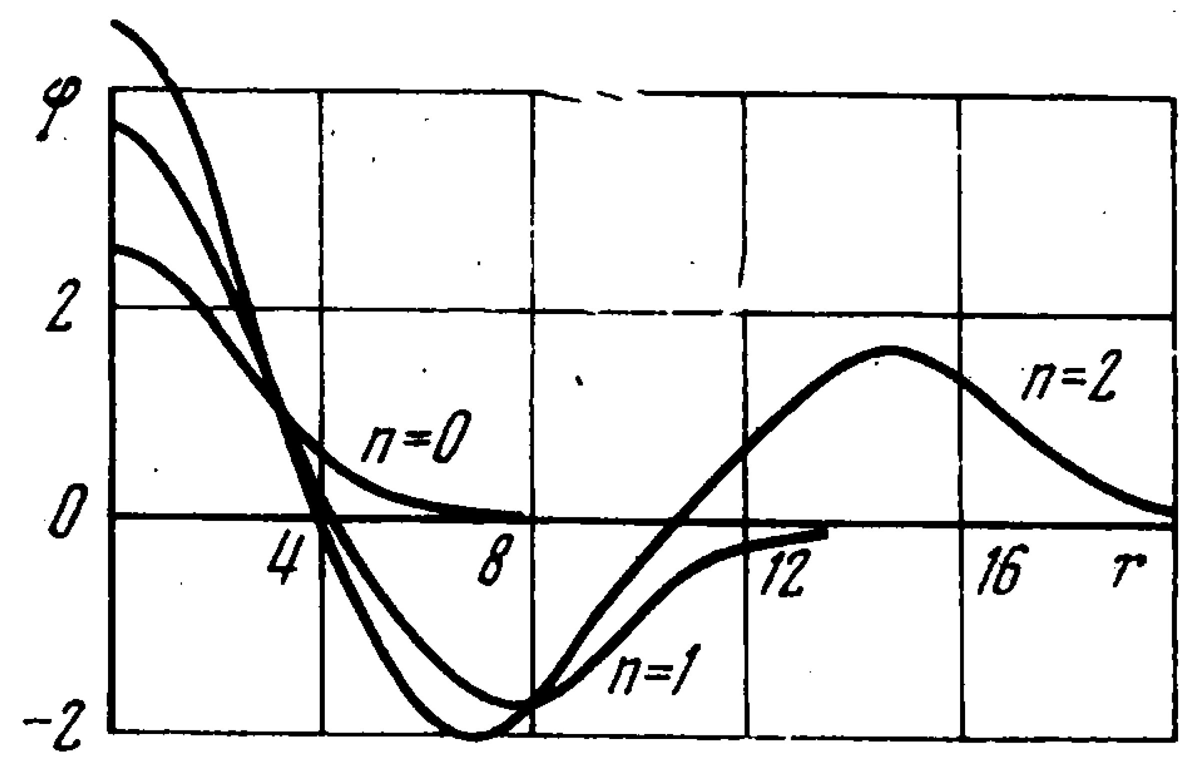
Доказательство существования положительных решений в конечной области достаточно большого размера при граничных условиях $d\varphi\,/\,dr\,|_{r=0} = \varphi\,(r_1) = 0$ или $\varphi\,(r_1) = \varphi\,(r_2) = 0$ проводится так же, как и в случае бесконечной области. При малых размерах области ($r_1^2 < k\,/\,(M - \gamma)$), как видно из неравенства (1.17), уравнение (1.2) ограниченных решений не имеет. Можно доказать, что точный минимальный размер области, в которой уравнение (1.2) имеет решение, равен минимальному размеру области, в которой существуют конечные положительные решения уравнения (1.4) при $M' = M$ и соответствующих граничных условиях. При граничных условиях $d\varphi\,/\,dr\,|_{r=0} = \varphi\,(r_1) = 0$ критический размер области равен $r_* = \pi\,/\,\sqrt{M-\gamma}$, если $m = 0.2$ и $r_* = x_1\,/\,\sqrt{M-\gamma}$, если $m = 1$. Когда размеры области приближаются к критической величине, $\max\varphi$ и производные на границе области неограниченно растут

$$\max\varphi \to \infty, \qquad \left|\frac{d\varphi}{dr_1}\right| \to \infty, \qquad \left|\frac{d\varphi}{dr_2}\right| \to \infty \tag{1.20}$$

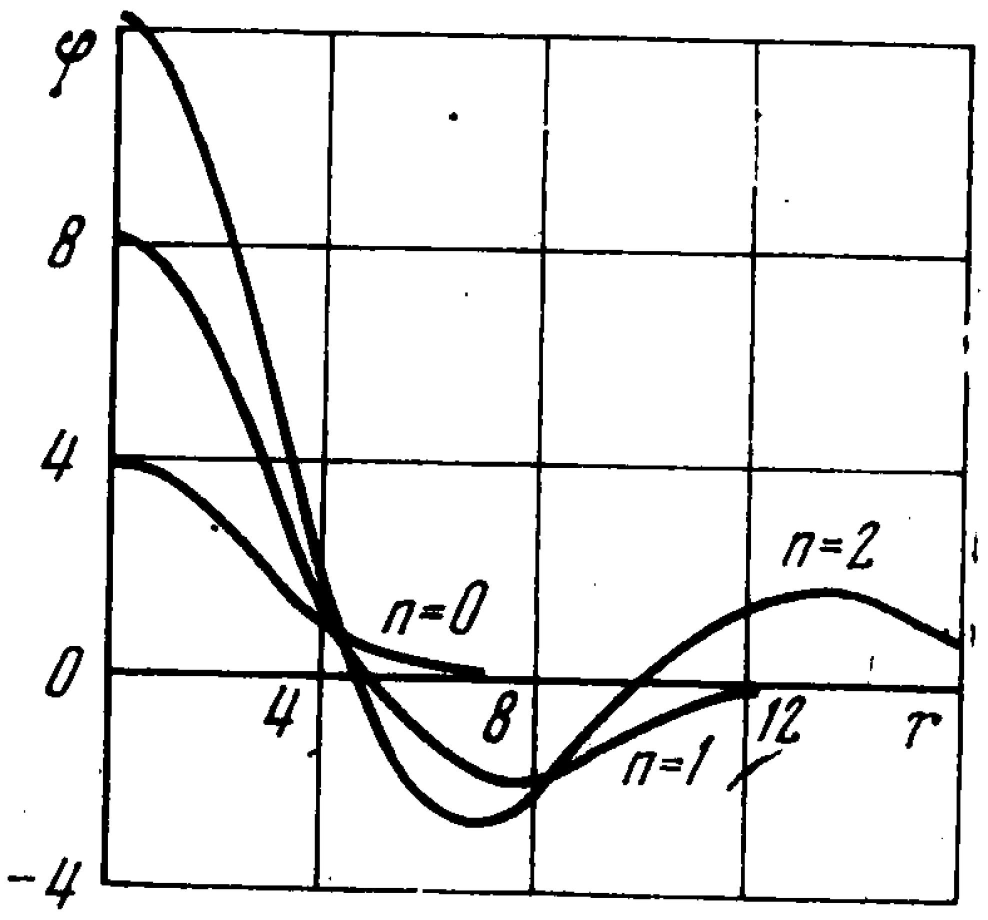
В области, размер которой меньше критической величины, уравнение (1.2) конечных решений не имеет.

2. **Высшие моды.** При неограниченной функции $f\,(\varphi^2)$ уравнение (1.2) при $m = 1,2$, кроме положительного решения (основной моды), может иметь счетное множество решений с конечной энергией и обращающихся в нуль ровно n раз, где n — номер моды [1–4,11]. Аналогичная теорема справедлива в случае ограниченной, положительной и монотонно растущей функции $f\,(\varphi^2)$.

Разобьем весь интервал $0 \leqslant r < \infty$ на n частей таким образом, чтобы в каждом промежутке $r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots, n$ уравнение (1.2) имело положительное решение φ_i, удовлетворяющее граничному условию $\varphi_i\,(r_i) = \varphi_i\,(r_{i+1}) = 0$, $i = 2,3,\ldots, n$ (для первого промежутка — граничному условию $d\varphi_1/dr|_{r=0} = 0$, $\varphi_1\,(r_2) = 0$). Из результатов, полученных в п. 1, следует, что при $m = 1,2$ такое разбиение всегда возможно. Введем непрерывную функцию $\Psi_{n-1}(r)$, равную в каждом промежутке $[r_i, r_{i+1}]$ решению $(-1)^{i-1}\varphi_i(r)$. Очевидно, $\Psi_{n-1}(r)$ удовлетворяет уравнению (1.2) во всем пространстве за исключением, быть может, точек $r = r_i$, $i = 2,3,\ldots,n$, где $\Psi_{n-1}(r)$ может иметь разрывы производных.



Фиг. 1



Фиг. 2

Докажем, что разбиение на промежутки можно провести таким образом, чтобы $\Psi_{n-1}(r)$ во всех точках $r \geqslant 0$ имела непрерывные первую и вторую производные и являлась решением уравнения (1.2) во всем пространстве. Для этого достаточно выбрать такое разбиение на промежутки, которое реализует минимум функционала [11]

$$H_{n-1}(r_2, r_3, \ldots, r_n) = \int \left[\left(\frac{d\Psi_{n-1}}{dr}\right)^2 + \gamma\Psi_{n-1}^2 - F(\Psi_{n-1}^2)\right] dv =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[\left(\frac{d\varphi_i}{dr}\right)^2 + \gamma\varphi_i^2 - F(\varphi_i^2)\right] dv = \sum_{i=1}^{n} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \times$$

$$\times [f\varphi_i^2 - F(\varphi_i^2)]\, dv \geqslant 0$$

являющегося непрерывной функцией переменных $r_2, r_3, \ldots, r_n$ [15]. Существование минимума следует из положительности функционала H_{n-1} и свойств положительных решений (1.18), (1.19). Согласно [15]

$$\frac{\partial H_{n-1}}{\partial r_i} = \left[\left(\frac{d\varphi_{i-1}}{dr}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi_i}{dr}\right)^2\right] r^m \Big|_{r=r_i}, \quad i = 2, 3, \ldots, n \tag{2.1}$$

Поскольку в минимуме все производные $\partial H_{n-1} / \partial r_i = 0$, то из (2.1) следует непрерывность $d\Psi_{n-1} / dr$ при всех $r \geqslant 0$. Следовательно, существует такое разбиение на промежутки, при котором функция $\Psi_{n-1}(r)$ имеет непрерывные производные и является решением уравнения (1.2) во всех точках пространства, причем $\Psi_{n-1}(r)$ имеет ровно $n - 1$ нулей.

На основании полученных результатов можно утверждать, что монотонный рост, ограниченность и положительность функций $f(\varphi^2)$ являются достаточными условиями существования счетного множества стационарных решений с цилиндрической или сферической симметрией.

Изложенная теория проверялась с помощью численного решения уравнения (1.2) в двумерном и трехмерном случаях при $f = \varphi^2 / (1 + \varphi^2)$. В полном соответствии с теорией было найдено счетное множество симметричных решений с конечной энергией. Соответствующие распределения амплитуды для первых трех мод при $\gamma = 0.5$ приведены на фиг. 1 ($m = 1$) и фиг. 2 ($m = 2$).

В двумерном случае доказанная теорема допускает обобщение на положительные, монотонно растущие, неограниченные функции $f(\varphi^2)$ степенного роста. Существование решений соответствующей вариационной задачи доказывается с помощью интерполяционных неравенств. Все дальнейшие рассуждения проводятся по схеме, данной в предлагаемой работе. В частности, счетное множество аксиально-симметричных решений существует для функций $f(\varphi^2)$ вида

$$f(\varphi^2)=\sum_{k=1}^{N} c_k\varphi^{2k}, \quad f\geqslant 0, \quad \frac{df}{d\varphi^2}\geqslant 0, \quad N<\infty$$

Отметим, что для неограниченных функций $f(\varphi^2)$ стационарные решения существуют в сколь угодно малой области.

Если функция $f(\varphi^2)$ условиям приведенных выше теорем не удовлетворяет, то существование стационарных решений определяется конкретным видом функции $f(\varphi^2)$ и в каждом случае требует специального исследования [8,9].

Автор благодарит Н. Г. Вахитова за проведение численных расчетов и Г. В. Скроцкого за полезное обсуждение полученных результатов.

Поступила 26 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Finkelstein R., Lelevier N., Ruderman M.* Nonlinear spinor fields. Phys. Rev., 1951, vol. 83, No. 2.
2. *Захаров В. Е., Соболев В. В., Сынах В. С.* Разрушение монохроматической волны в среде с безынерционной нелинейностью. ПМТФ, 1972, № 1.
3. *Янкаускас З. К.* Радиальные распределения поля в самосфокусировавшемся пучке света. Изв. вузов. Радиофизика, 1966, т. 9, вып. 2.
4. *Haus H. A.* Higher order trapped light beam solutions. Appl. Phys. Letts, 1966, vol. 8, No. 5.
5. *Brewer R. G., Lifsitz J. R., Garmire H., Chiao R. Y., Townes C. H.* Small-scale trapped filaments in intense laser beams. Phys. Rev., 1968, vol. 166, No. 2.
6. *Hanus J.* Influence of the molecular interaction on the ac Kerr effect possibility of a field-induced phase transition. IEEE J. Quant. Electr., 1968, vol. QE-4, No. 11.
7. *Gustafson T. K., Townes C. H.* Influence of steric effects and compressibility on nonlinear response to laser pulses and the diameters of self-trapped filaments. Phys. Rev., 1972, vol. 6A, No. 4.
8. *Anderson D. L. T.* Stability of time-dependent particlelike solutions in nonlinear field theories. II. J. Math. Phys., 1971, vol. 12, No. 6.
9. *Piekara A. H.* Phenomenological treatment of small-scale light trapping. Appl. Phys. Letts, 1968, vol. 13, No. 7.
10. *Nehari Z.* On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics. Proc. Roy. Irish. Acad., 1963, vol. 62A, No. 9.
11. *Ryder G. H.* Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations. Pacif. J. Math., 1967, vol. 22, No. 3.
12. *Anderson D. L. T., Derrick G. H.* Stability of time-dependent particlelike solutions in nonlinear field theories. I. J. Math. Phys., 1970, vol. 11, No. 4.
13. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы теоретической физики, т. 1. М., Гостехиздат, 1933.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963, стр. 69.
15. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 1. М.— Л., ОНТИ, 1935.