УДК 517.917

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Л. А. Кипнис

(Воронеж)

Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$x''' + p(t)\,x = 0 \tag{1}$$

с непрерывной и ω-периодической функцией $p(t)$.

Уравнение (1) называется устойчивым или неустойчивым, если устойчива или неустойчива соответствующая ему система.

Ниже с использованием построения Ляпунова, примененного при доказательстве устойчивости уравнения $x'' + p(t)\,x = 0$ (см. [1]), указываются достаточные условия неустойчивости уравнения (1).

Обозначим через $z_k(t)$ $(k = 1,2,3)$ линейно-независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$z_k(0) = \delta_{k1}, \quad z_k'(0) = \delta_{k2}, \quad z_k''(0) = \delta_{k3}, \quad k = 1,2,3$$

где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера, и рассмотрим его матрицу монодромии [1]. Тогда для определения мультипликаторов получаем уравнение

$$\rho^3 - a\rho^2 + b\rho - 1 = 0 \tag{2}$$

$$a = z_1(\omega) + z_2'(\omega) + z_3''(\omega), \quad b = [z_1(\omega) z_3''(\omega) - z_3(\omega)\, z_1''(\omega)] +$$
$$+ [z_1(\omega)\, z_2'(\omega) - z_2(\omega)\, z_1'(\omega)] + [z_2'(\omega)\, z_3''(\omega) - z_3'(\omega)\, z_2''(\omega)]$$

Точно так же, как и в [1], получаем

$$z_k(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{k3}\right)\left\{t^{k-1} - \frac{1}{2}\int_0^t p(t_1)(t - t_1)^2 t_1^{k-1} dt_1 + \right. \tag{3}$$
$$\left. + \frac{1}{4}\int_0^t p(t_1)\left[p(t_2)(t_1 - t_2)^2 t_2^{k-1} dt_2\right](t - t_1)^2 dt_1 - \ldots\right\}$$

Вводя в рассмотрение числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (q/3!)^k \quad (q = M\omega^3, \ |p(t)| \leqslant M)$$

при $q < 6$ он сходится, причем его сумма S равна $q/(6 - q)$), после несложных выкладок получаем оценки

$$z_1'(\omega) \leqslant M\,\omega^2 (S + 1), \qquad z_1''(\omega) \leqslant M\omega (S + 1) \tag{4}$$
$$z_2(\omega) \leqslant \omega (S + 1), \qquad z_2''(\omega) \leqslant M\,\omega^2 (S + 1)$$
$$z_3(\omega) \leqslant {}^1/_2\,\omega^2 + \omega^2 S, \qquad z_3'(\omega) \leqslant \omega (S + 1)$$

Лемма. Пусть $p(t) \not\equiv 0$ и выполнены неравенства

$$p(t) \leqslant 0, \quad q = M\omega^3 < {}^1/_2\,(75 - 9\sqrt{65}) = d \quad (1 < d < 2) \tag{5}$$

Тогда

$$a + b + 2 > 0 \tag{6}$$

Доказательство. Из формул (3) и определения числа a видим, что $a > 3$. Из неравенства (4) получаем

$$z_3'(\omega)\, z_2''(\omega) \leqslant q(S + 1)^2, \quad z_2(\omega)\, z_1'(\omega) \leqslant q(S + 1)^2$$
$$z_3'(\omega)\, z_1''(\omega) \leqslant q(S + 1)(S + {}^1/_2)$$

Отсюда и из положительности решений (3) и их первых и вторых производных при $t = \omega$ заключаем, что

$$b \geqslant -q^*, \qquad q^* = q\,(S + 1)\,(3S + {}^5/_2)$$

Поэтому для завершения доказательства леммы остается показать, что $q^* < 5$, или

$$q^2 - 75q + 90 > 0 \tag{7}$$

Неравенство (7) следует из условия (5) леммы, так как число d — меньший корень трехчлена в левой части (7).

Лемма доказана.

Пусть $a \neq b$. Тогда число $\rho = 1$ не является корнем уравнения (2). Производя в (2) замену по формуле $\rho = (\lambda + 1) / (\lambda - 1)$, придем к уравнению

$$(b - a)\,\lambda^3 + (6 - a - b)\,\lambda^2 + (a - b)\,\lambda + (a + b + 2) = 0 \tag{8}$$

для которого $\lambda = 1$ не является корнем.

Теорема. Пусть непрерывная ω-периодическая функция $p\,(t)$ неположительна и $p\,(t) \not\equiv 0$. Пусть выполнено неравенство (5). Тогда уравнение (1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть сначала $a \neq b$. Тогда в силу условия (6) полином в левой части уравнения (8) является стандартным [1]. Из условий Гурвица следует, что уравнение (8) имеет по крайней мере один корень в правой полуплоскости. Возвращаясь к переменной ρ, заключаем, что уравнение (1) имеет хотя бы один мультипликатор ρ, для которого $|\,\rho\,| > 1$, что и доказывает теорему при $a \neq b$.

При $a = b$ уравнение (2) имеет корень

$$\rho = {}^1/_2\,(a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}) > 1 \qquad (a > 3)$$

Следовательно, и при $a = b$ уравнение (1) неустойчиво.

Теорема доказана.

Поступила 30 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука» 1967.

УДК 534

СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. А. Колоколов

(Москва)

Для нелинейного волнового уравнения прямым вариационным методом доказывается существование счетного множества стационарных решений с цилиндрической и сферической симметрией.

Стационарные решения нелинейного волнового уравнения, позволяющие оценить характерные пространственные и энергетические параметры световых пучков в нелинейной среде, были подробно изучены для случая кубичного волнового уравнения [1–4]. При большой интенсивности световых волн зависимость диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon\,(|E|)$ перестает быть квадратичной и становится сложной функцией амп-