Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.4

К РАСЧЕТУ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД

А. В. Чигарев

(Воронеж)

Изучается применение методов, развитых в электродинамике стохастических сред и заимствованных в теории квантовых полей [1,2] к уравнениям динамики упругой среды. Рассматриваемый метод не накладывает обычных ограничений малости на величину флуктаций упругих модулей. Выделение сингулярной части тензора Грина [1,3,4] и введение новых полевых переменных эквивалентно суммированию квазистатической части упругих модулей. Применение разрывных интегралов Вебера — Шафхейтлина [5,6] позволяет точно вычислить борновское приближение. При этом обнаруживаются эффекты, характерные для сред со структурой [7]; когда дисперсионные соотношения могут терпеть разрыв, появляются резонансные явления при длинах волн, сравнимых с размером структуры. Для сильно изотропной [8] среды и экспоненциальной корреляционной функции приводятся явные выражения для макроскопических упругих коэффициентов и собственных значений операторов.

Методы вычисления статических макроскопических коэффициентов развиты в работах многих авторов (см., например, [3,4,9,10]). При этом операторная, вообще говоря, связь между средними полями при некоторых предположениях относительно среднего напряженнодеформированного состояния и текстуры среды становится алгебраической. При вычислении динамических эффективных параметров соотношения также имеют нелокальный характер, что приводит к значительному усложнению дисперсионных уравнений. В работах [11–14] для борновского приближения рассмотрено вычисление макроскопических коэффициентов в случае длинных и коротких волн, когда можно пренебречь пространственной дисперсией.

1. Вектор перемещений u_i гармонической волны в неоднородной среде удовлетворяет уравнению

$$(\lambda_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + \rho_0\omega^2 u_i = 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda_{ijkl}(r)$ зависит случайным образом от пространственных координат, ρ_0 — плотность, ω — частота, напряжения и деформации связаны законом Гука.

Записывая уравнение (1.1) для однородной среды с параметрами λ_{ijkl}°, ρ_0, вычитая его из (1.1), после несложных преобразований получим

$$u_{i,m} = \overset{\circ}{u}_{i,m} - \int G_{in,mj}(r-r_1)\,\lambda'_{njkl}(r_1)\,u_{k,l}(r_1)\,dr_1 \tag{1.2}$$

$$\lambda'_{njkl} = \lambda_{njkl} - \overset{\circ}{\lambda}_{njkl}$$

Здесь u_i° — поле перемещений, $G_{in}(r-r_1)$ — динамический тензор Грина во введенной однородной среде.

Разбивая интеграл в выражении (1.2) на сингулярную и регулярную части, перейдем к новым полевым величинам

(1.3) $$E_{im} = \overset{\circ}{u}_{i,m} - \int G^{(R)}_{in,\,mj}(r - r_1)\,\gamma_{njst}(r_1)\,E_{st}(r_1)\,dr_1$$

(1.4) $$E_{im} = B_{imkl}u_{k,\,l}, \qquad \gamma_{njst} = \lambda'_{njkl}B^{-1}_{klst}$$

$$B_{imkl} = \delta_{ik}\delta_{ml} + G^{(s)}_{in.\,mj}\lambda'_{njkl}$$

Здесь γ_{njst} — тензор поляризации, $G_{in}{}^{(s)}$ — сингулярная, $G_{in}{}^{(R)}$ — регулярная части тензора Грина. Переход к новым переменным E_{im}, γ_{njst} эквивалентен суммированию бесконечного ряда для квазистатической части $L_{ijkl}(\omega, k)$ образа Фурье эффективного тензора упругих модулей.

Решая уравнение (1.3) последовательными итерациями, получим ряд по степеням γ_{njst}. Усредняя полученный ряд и используя метод суммирования фейнмановских диаграмм, для среднего поля $\langle E_{im}\rangle$ можем записать уравнение типа Дайсона [1,2]

(1.5) $$\langle E_{im}\rangle = \overset{\circ}{u}_{i,m} + \iint G^{(R)}_{in,\,mj}(r - r_1)\,Q_{njst}(r_2 - r_1)\,\langle E_{st}(r_1)\rangle\,dr_1 dr_2$$

Эффективный тензор $\overset{*}{\gamma}_{njst}$ вводится соотношением

(1.6) $$\langle \gamma_{njst}E_{st}\rangle = \Gamma_{njst}\langle E_{st}\rangle = \int \overset{*}{\gamma}_{njst}(r - r_1)\,\langle E_{st}(r_1)\rangle\,dr_1$$

Ядро $\overset{*}{\gamma}_{njst}$ связано с массовым оператором Q_{njst} соотношением

(1.7) $$\overset{*}{\gamma}_{njst}(r - r_1) = -\,Q_{njst}(r - r_1)$$

$$Q_{njst}(r_1 - r_2) = \langle \gamma_{njdl}(r_1)\,\gamma_{prst}(r_2)\rangle\,G_{dp,\,lr}(r_1 - r_2)$$

Наилучшая сходимость рядов, рассматриваемых в методе, имеет место при условии

(1.8) $$\langle \gamma_{njst}\rangle = 0$$

Соотношения (1.8) дают замкнутую систему уравнений для нахождения вспомогательных коэффициентов в $\lambda_{ijkl}{}^{\circ}$ через моменты λ_{ijkl}. Физический смысл равенства (1.8) ясен, и условия сходимости (1.8) не накладывают никаких ограничений на величину флуктуаций λ_{ijkl}.

Выпишем соотношения, связывающие старые и новые переменные

(1.9) $$E_{im} = [\delta_{ik}\delta_{ml} + G^{(s)}_{in,\,mj}\lambda'_{njkl}]\;u_{k,\,l} = B_{imkl}u_{k,\,l}$$

(1.10) $$\gamma_{njim}E_{im} = \lambda'_{njkl}B^{-1}_{klim}B_{imst}u_{s,\,t} = \lambda'_{njkl}u_{k,\,l}$$

Осредним соотношения (1.9), (1.10)

(1.11) $$\langle E_{im}\rangle = [\delta_{ik}\delta_{ml} + G^{(s)}_{in,\,mj}(\Lambda_{njkl} - \overset{*}{\lambda}_{njkl})]\,\langle u_{k,\,l}\rangle$$

(1.12) $$\Gamma_{njim}\langle E_{im}\rangle = (\Lambda_{njkl} - \overset{*}{\lambda}_{njkl})\,\langle u_{k,\,l}\rangle$$

Подставим (1.11) в (1.12)

(1.13) $$\Gamma_{njim}[\delta_{ik}\delta_{ml} + G^{(s)}_{in,\,mj}(\Lambda_{njkl} - \overset{*}{\lambda}_{njkl})]\,\langle u_{k,\,l}\rangle = (\Lambda_{njkl} - \overset{\circ}{\lambda}_{njkl})\,\langle u_{k,\,l}\rangle$$

Тензор $\lambda_{njkl}{}^{*}$ вводится соотношением

$$\langle \sigma_{ij}\rangle = \Lambda_{ijkl}\langle u_{k,\,l}\rangle = \int \overset{*}{\lambda}_{ijkl}(r - r_1)\,\langle u_{k,\,l}(r_1)\rangle\,dr_1$$

Пусть рассматриваемая среда статистически изотропна, однородна. Рассмотрим поля средних перемещений вида e^{ikr}, тогда соотношения (1.13) можно записать в виде

(1.14) $$D_{njim}\,[\delta_{ik}\delta_{ml} + G^{(s)}_{ip,mq}\,(L_{pqkl} - \overset{\circ}{\lambda}_{pqkl})] = L_{ijkl} - \overset{\circ}{\lambda}_{ijkl}$$

Здесь $D_{njim}(\omega, k)$, $L_{njkl}(\omega, k)$ — образы Фурье ядер операторов Γ_{njim}, Λ_{njkl}.

Решая уравнение (1.14) относительно L_{njkl}, получим

(1.15) $$L_{stkl} = \overset{\circ}{\lambda}_{stkl} + M^{-1}_{stnj} D_{njkl}$$

$$M_{pnqj} = \delta_{pn}\delta_{qj} - D_{njim} G^{(s)}_{ip,mq}$$

2. Рассмотрим вычисление вспомогательных коэффициентов. Пусть среда, определяемая $\overset{\circ}{\lambda}_{ijkl}$, изотропна и однородна, а рассматриваемая неоднородная среда изотропна

(2.1) $$\overset{\circ}{\lambda}_{ijkl} = \lambda^\circ \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^\circ(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

(2.2) $$\lambda_{ijkl}(r) = \lambda(r)\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(r)\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Тогда в формулах (1.4) имеем

(2.3) $$B_{imkl} = b_1\delta_{im}\delta_{kl} + b_2\delta_{ik}\delta_{ml} + b_3\delta_{il}\delta_{mk}$$

$$b_1 = G^{(s)}_1\lambda' + 3G^{(s)}_2 K', \qquad b_2 = 1 + G^{(s)}_1\mu', \qquad b_3 = G^{(s)}_1\mu'$$

$$B^{-1}_{imkl} = b_1^{-1}\delta_{im}\delta_{kl} + b_2^{-1}\delta_{ik}\delta_{ml} + b_3^{-1}\delta_{il}\delta_{mk}$$

$$b_1^{-1} = -b_1\,[(3b_1 + b_2 + b_3)\,(b_2 + b_3)]^{-1}, \quad b_2^{-1} = b_2\,(b_2^2 - b_3^2)^{-1}$$

$$b_3^{-1} = b_3\,(b_3^2 - b_2^2)^{-1}, \quad G_1^{(s)} = (3\lambda_0 + 8\mu_0)[15\mu_0\,(\lambda_0 + 2\mu_0)]^{-1}$$

$$G_2^{(s)} = -(\lambda_0 + \mu_0)[15\mu_0\,(\lambda_0 + 2\mu_0)]^{-1}$$

(2.4) $$\gamma_{njst} = \gamma_1\delta_{nj}\delta_{st} + \gamma_2\,(\delta_{ns}\delta_{jt} + \delta_{nt}\delta_{js})$$

$$\gamma = K'\,[1 + K'\,(\lambda_0 + 2\mu_0)^{-1}]^{-1}, \quad \gamma = \gamma_1 + \frac{2}{3}\gamma_2,$$

$$K' = \lambda' + \frac{2}{3}\mu'$$

$$\gamma_2 = \mu'\,[1 + \mu'\,(6\lambda_0 + 15\mu_0)\,(15\lambda_0\mu_0 + 30\mu_0^2)^{-1}]^{-1}$$

Соотношения (1.8) дают в изотропном случае два уравнения для определения λ_0, μ_0, (K_0, μ_0) через моменты λ, μ (K, μ). Предполагая определенный закон распределения λ, μ, K, можно вычислить λ_0, μ_0, K_0 аналогично работе [1]; для композитов и поликристаллов получим уравнения самосогласованного поля.

Уравнения (1.8), (2.4) можно решать последовательными итерациями, не конкретизируя вида распределения. Очевидно, в нулевом приближении

$$\lambda_0 = \langle\lambda\rangle, \qquad \mu_0 = \langle\mu\rangle, \qquad K_0 = \langle K\rangle$$

В первом приближении

(2.5) $$K_0^{(1)} = \langle K\rangle - \Lambda_{(0)}\langle K'^2\rangle + \Lambda^2_{(0)}\langle K'^3\rangle - \ldots$$

$$\mu_0^{(1)} = \langle\mu\rangle - M_{(0)}\langle\mu'^2\rangle + M^2_{(0)}\langle\mu'^3\rangle - \ldots$$

$$\Lambda_{(0)} = \langle\lambda + 2\mu\rangle^{-1}, \quad M_{(0)} = 2\,\langle 3\lambda + 8\mu\rangle\,[15\,\langle\mu\rangle\,\langle\lambda + 2\mu\rangle]^{-1}$$

Найденные таким образом значения λ_0, μ_0, (K_0, μ_0) подставляем во все приведенные выше формулы.

3. Рассмотрим вычисление второго слагаемого в формуле (1.15). Из соотношений (1.5)—(1.7) с учетом (2.1)—(2.4) в борновском приближении по γ_{njkl} следует, что выражение для ядра $\overset{*}{\gamma}_{nj\gamma\delta}(r - r_1)$ имеет вид

(3.1)
$$\overset{*}{\gamma}_{nj\gamma\delta}(r - r_1) = \gamma_1{}^*(\rho)\,\delta_{nj}\delta_{\gamma\delta} + \gamma_2{}^*(\rho)\,(\delta_{n\gamma}\delta_{j\delta} + \delta_{n\delta}\delta_{j\gamma}) +$$
$$+ \gamma_3{}^*(\rho)\,(\delta_{nj}n_\gamma n_\delta + \delta_{\gamma\delta}n_n n_j) + \gamma_4{}^*(\rho)\,(\delta_{n\gamma}n_j n_\delta +$$
$$+ \delta_{n\delta}n_j n_\gamma + \delta_{j\delta}n_n n_\gamma + \delta_{j\gamma}n_n n_\delta) + \gamma_5{}^*(\rho)\,n_n n_j n_\gamma n_\delta$$
$$\rho = |r - r_1|, \qquad n_i = \rho_i\rho^{-1}$$
$$\gamma_m{}^*(\rho) = R(\rho)\left\{\frac{A_m(k_t\rho)}{\mu_0\rho^3}\, l^{ik_i\rho} + \frac{1}{\rho_0\omega^2\rho^5}\left[B_m(k_\alpha\rho)\, e^{ik_\alpha\rho}\right]_t{}^l\right\}$$
$$A_1 = 4z_t - k_t{}^2\rho^2, \qquad B_1 = k_\alpha{}^4\rho^4 - 24ik_\alpha{}^3\rho^3 - 12z_\alpha, \qquad A_2 = 2z_t$$
$$B_2 = 4(3z_\alpha + k_\alpha{}^2\rho^2), \qquad A_3 = 2A_4, \qquad A_4 = -(3z_t + k_t{}^2\rho^2)$$
$$B_3 = -2(30z_\alpha + z_\alpha{}^2k_\alpha{}^2\rho^2 + k_\alpha{}^4\rho^4 + 10ik_\alpha{}^3\rho^3), \qquad A_5 = 0$$
$$B_4 = 4(6z_\alpha k_\alpha{}^2\rho^2 - 15z_\alpha - 5ik_\alpha{}^3\rho^3), \qquad B_5 = 180k_\alpha{}^2\rho^2 z_\alpha -$$
$$- 420z_\alpha + 4k_\alpha{}^4\rho^4 - 140ik_\alpha{}^3\rho^3, \qquad z_\alpha = ik_\alpha\rho - 1$$
$$[f(k_\alpha\rho)]_t{}^l = f(k_l\rho) - f(k_t\rho), \qquad k_\alpha{}^2 = \frac{\omega^2}{c_\alpha{}^2}, \qquad c_t{}^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$$
$$c_l{}^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}, \qquad \langle\gamma_{njst}(r_1)\,\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_2)\rangle = R(\rho)\, R_{njst}^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Собственные значения операторов Γ_{njim}, Λ_{njkl} находятся по формулам

(3.2)
$$D_{nj\gamma\delta}(\omega, k) = \int \overset{*}{\gamma}_{nj\gamma\delta}(\rho)\, e^{-ik\rho}d\rho$$
$$L_{nj\gamma\delta}(\omega, k) = \int \overset{*}{\lambda}_{nj\gamma\delta}(\rho)\, e^{-ik\rho}d\rho$$

Переходя в (3.2) к сферическим координатам, проводим интегрирование по углам; а затем подынтегральные выражения преобразуются к функциям Бесселя с полуцелым индексом так, что получаем разрывные интегралы типа Вебера — Шафхейтлина и Сонина — Гегенбауэра, Бейли [6]. Кроме того, при регуляризации интегралов используются рекуррентные формулы для функций Бесселя. Вычисления проводим для корреляционной функции $R(\rho) = R_0 \exp(-\rho_i / a_i)(a_i$ — радиусы корреляции).

Выражения для $D_{nj\gamma\delta}(\omega, k)$ и $L_{njkl}(\omega, k)$ имеют также вид изотропных тензоров

(3.3)
$$D_{nj\gamma\delta}(\omega, q) = D_1(\omega, q)\delta_{nj}\delta_{\gamma\delta} + D_2(\omega, q)(\delta_{n\gamma}\delta_{j\delta} + \delta_{n\delta}\delta_{j\gamma}) +$$
$$+ D_3(\omega, q)(\delta_{nj}e_\gamma e_\delta + \delta_{\gamma\delta}e_n l_j) + D_4(\omega, q)(\delta_{j\delta}e_n e_\gamma + \delta_{j\gamma}e_n e_\delta +$$
$$+ \delta_{n\delta}e_j e_\gamma + \delta_{n\gamma}e_j e_\delta) + D_5(\omega, q)e_n e_j e_\gamma e_\delta$$
$$e_i = q_i q^{-1}, \qquad q^2 = k^2 + a^{-2}, \qquad a^2 = a_i a_i$$

Выпишем в явном виде выражения для D_1, D_2, соответствующие рассмотрению сильно изотропной среды

$$D_m = \frac{R_0}{\mu_0}\left\{\frac{\Gamma^{(1)}_{mt}}{m} + \frac{2z_t^2}{15}(4\Gamma^{(2)}_{mt} + \Gamma^{(3)}_{mt}) + \frac{k_t^2\Gamma^{(4)}_{mt}}{2k} + \right.$$
$$+ \frac{4\Gamma^{(5)}_{mt}}{mz_t^2} + \Gamma^{(6)}_{mt} + \frac{4\mu_0}{\rho_0\omega^2}\left[\frac{k_\alpha^4\Gamma^{(4)}_{m\alpha}}{8k} + \frac{k_\alpha^2}{15}(\Gamma^{(7)}_{m\alpha} + \right.$$
$$+ 5\Gamma^{(8)}_{m\alpha} + 5z_\alpha^{-2}\Gamma^{(9)}_{m\alpha} + 3\Gamma^{(10)}_{m\alpha} + \Gamma^{(11)}_{m\alpha} + 2\Gamma^{(12)}_{m\alpha} + 20z_\alpha^{-2}\Gamma^{(13)}_{m\alpha}) +$$
$$+ \frac{q^2}{315}(27\Gamma^{(5)}_{m\alpha} + z_\alpha^2\Gamma^{(14)}_{m\alpha} + 3\Gamma^{(15)}_{m\alpha} + 9\Gamma^{(16)}_{m\alpha} + 108\Gamma^{(17)}_{m\alpha} +$$
$$\left.\left. + 4z_\alpha^{-2}\Gamma^{(18)}_{m\alpha}) + i\pi z_\alpha^{-1}q^{-4}(I^{(1)}_{m\alpha} + I^{(2)}_{m\alpha})\right]_t^l\right\}, \quad m = 1, 2 \tag{3.4}$$

В зависимости от соотношений между величинами k_α и q для коэффициентов поляризации D_m из формулы (3.4) получим четыре разных выражения

1) $q < k_l, \quad z_\alpha = qk_\alpha^{-1}, \quad \alpha = l, t$
$\Gamma^{(n)}_{1l} = 0, n \neq 4, 7, 14, 17, \quad \Gamma^{(p)}_{1t} = 0, p \neq 1, 2, 3, 4, 7, 14, 17$
$\Gamma^{(n)}_{2l} = 0, n \neq 14, 15, \quad \Gamma^{(p)}_{2t} = 0, p \neq 1, 3, 14, 15, \quad I^{(1)}_{m\alpha} = I^{(2)}_{m\alpha} = 0$

2) $q = k_l, \quad z_\alpha = k_l k_t^{-1}$
$\Gamma^{(n)}_{2\alpha} = 0, \quad n \neq 1, 3, 14, 15, \quad I^{(1)}_{m\alpha} = I^{(2)}_{m\alpha} = 0, \quad \alpha = l, t$

3) $k_l < q < k_t$
$\Gamma^{(n)}_{1l} = 0, \quad n \neq 4, 9, 10, 16, \quad \Gamma^{(p)}_{1t} = 0, \quad p \neq 1, 2, 4, 12, 14, 17$
$\Gamma^{(n)}_{2l} = 0, \quad n \neq 11, 13, 16, 18, \quad \Gamma^{(p)}_{2t} = 0, \quad p \neq 1, 3, 15, \quad I^{(1)}_{mt} = I^{(2)}_{mt} = 0$

4) $k_t < q$
$\Gamma^{(n)}_{1l} = 0, \quad n \neq 4, 8, 10, 16, \quad \Gamma^{(p)}_{1t} = 0, \quad p \neq 4, 5, 6, 8, 10, 16$
$\Gamma^{(n)}_{2l} = 0, \quad n \neq 11, 13, 16, \quad \Gamma^{(p)}_{2t} = 0, \quad p \neq 5, 6, 11, 13, 16$
$I^{(2)}_{1\alpha} = I^{(1)}_{2\alpha} = 0, \quad I^{(1)}_{1\alpha} \neq 0, \quad I^{(2)}_{2\alpha} \neq 0$
$I^{(1)}_{m\alpha} = 5q^6 - 69q^4k_\alpha^2 + 211q^2k_\alpha^4 - 111k_\alpha^6$
$I^{(2)}_{m\alpha} = 5q^6 - 9q^4k_\alpha^2 + 119q^2k_\alpha^4 - 61k_\alpha^6$

Здесь коэффициенты $\Gamma^{(i)}_{m\alpha}$ выражаются с учетом выражений (3.1), (3.2) по формулам Вебера — Шафхейтлина [6] через гипергеометрические функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Структура выражений для D_3, D_4, D_5 аналогична D_1, D_2.

Отметим следующее. Использование для вычислений разрывных интегралов позволяет найти точные выражения для $D_m(\omega, q)$, причем существенным является соотношение между длинами волн среднего, первоначального полей и радиусом корреляции. Исследование сходимости гипергеометрических функций в рассмотренных случаях показывает, что $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ сходятся всюду, где $\alpha + \beta - \gamma < 0$, расходятся при $z = 1$, если $0 \leqslant \alpha + \beta - \gamma < 1$.

Таким образом, разрывы дисперсионных соотношений имеют место при $q = k_l$, $q = k_t$. Асимптотику выражений для $D_m(\omega, q)$ в случае пренебрежения пространственной дисперсией ($aq \ll 1$, $aq \gg 1$) получаем из приведенных соотношений при k_l, $k_t < q$. Знание D_{njkl} позволяет вычислить L_{njkl}, причем сильно изотропному полю D_{njkl} соответствует сильная изотропия поля L_{njkl}. Выпишем в явном виде выражения L_1, L_2, L через D_1, D_2, D в сильно изотропном случае

$$L_2 = \mu_0 + \frac{D_2}{1 - 2G_1^{(s)} D_2}, \qquad L_1 = \lambda_0 + L - \frac{2}{3} L_2 \tag{3.5}$$

$$L = K_0 + D \left[\frac{1 - 2G_1^{(s)} D_2}{1 - 3(G_1^{(s)} + 3G_2^{(s)}) D} + \frac{2G_1^{(s)} D_2}{1 - 2G_1^{(s)} D_2} \right]$$

Формулы (3.5), определяющие собственные значения эффективных упругих операторов, позволяют вычислить скорости, затухание, эффективный поперечник рассеяния и другие макроскопические коэффициенты рассматриваемой среды.

Поступила 2 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В., Татарский В. И.* О пространственной дисперсии неоднородных сред. ЖЭТФ, 1965, т. 48, вып. 2.
2. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
3. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды. ПМТФ, 1968, № 1.
4. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* К вычислению упругих модулей гетерогенных сред. ПМТФ, 1968, № 3.
5. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции, т. 12. М., «Наука», 1973.
6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 1, 2. М., «Наука», 1969.
7. *Бриллюен Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
8. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
9. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11.
10. *Хорошун Л. П.* К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 9.
11. *Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д.* К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 2.
12. *Шуман Б. М.* Распространение упругих волн в среде со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 1.
13. *Усов А. А., Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах. ПМТФ, 1972, № 2.
14. *Чигарев А. В.* Распространение упругих волн в стохастически неоднородной среде. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 4.