

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Л. А. Фильштинский

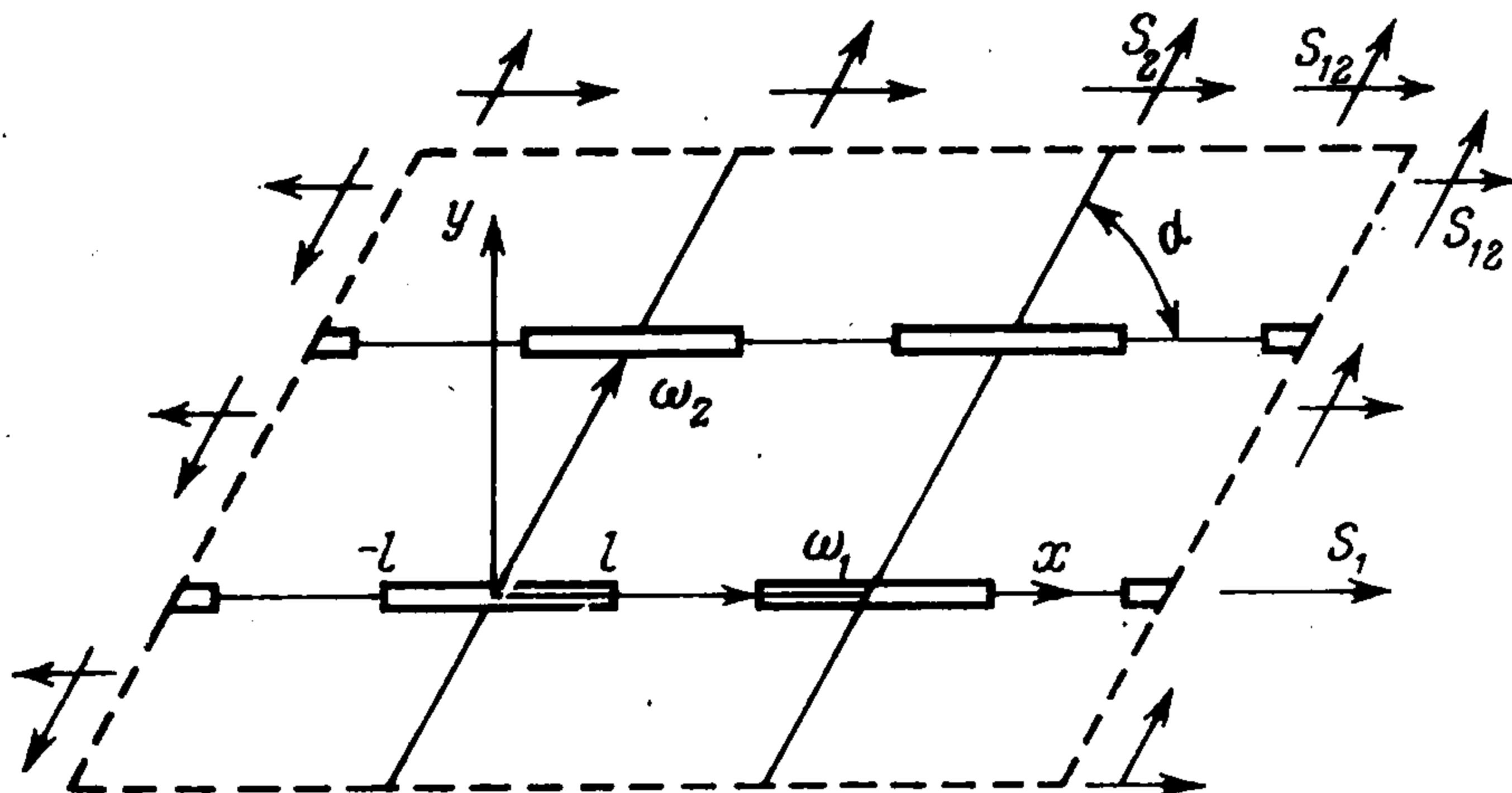
(Новосибирск)

Рассматривается задача о растяжении и сдвиге плоской изотропной среды, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных разрезов. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с двоякопериодическим распределением напряжений вне разрезов. Основное сингулярное уравнение задачи сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений без промежуточного этапа приведения его к уравнению Фредгольма. Выписывается процедура определения коэффициентов интенсивности напряжений.

Развиваются вопросы, связанные с моделированием описанной решетки сплошной анизотропной средой и определяются упругие характеристики последней (макроскопические параметры среды с разрезами). Приводятся результаты расчетов.

Двоякопериодическая задача для симметричной ромбической решетки рассмотрена иным методом в [1,2].

**1. Постановка задачи.** Пусть в неограниченной изотропной пластинке, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных щелей, действуют средние напряжения  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_{12}$  (фиг. 1). Будем предполагать,



Фиг. 1

что на берегах щелей заданы одинаковые в конгруэнтных точках, непрерывные по Гельдеру, самоуравновешенные нагрузки

$$F^\pm(x) = \sigma_y^\pm(x) + i\tau_{xy}^\pm(x), \quad x \in [-l, l]$$

Обозначим основные периоды через  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  ( $\text{Im } \omega_1 = 0$ ,  $\text{Im } \omega_2 / \omega_1 > 0$ ), область, занятую материалом пластины, через  $D$ ; начала и концы щелей поместим соответственно в точках

$$\begin{aligned} & -l + m\omega_1 + n\omega_2, \quad l + m\omega_1 + n\omega_2 \\ & (m, n = 0, \pm 1, \pm \dots; 0 \leq l < \omega_1 / 2) \end{aligned}$$

В силу симметрии граничных условий и геометрии области  $D$  напряжения в  $D$  являются двоякопериодическими функциями с основными периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Следуя [3], введем аналитическую в  $D$  функцию

$$(1.1) \quad \bar{\Omega}(z) = \Psi(z) + \Phi(z) + z\Phi'(z)$$

Эта функция в совокупности с аналитической функцией  $\Phi(z)$  однозначно определяет напряжения и смещения в рассматриваемой области. Имеем [3]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re} \Phi(z) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2 \{ \bar{\Omega}(z) - \Phi(z) - (z - \bar{z})\Phi'(z) \} \\ \sigma_y + i\tau_{xy} &= \bar{\Omega}(z) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z})\Phi'(z) \\ 2G(u - iv) &= \kappa\overline{\Phi(z)} - \bar{\omega}(z) - (\bar{z} - z)\Phi(z), \quad \bar{\omega}(z) = \int \bar{\Omega}(z)dz \end{aligned}$$

Из (1.2) следуют условия периодичности напряжений

$$(1.3) \quad \Phi(z + \omega_v) = \Phi(z), \quad \bar{\Omega}(z + \omega_v) - \bar{\Omega}(z) = (\omega_v - \bar{\omega}_v)\Phi'(z) \\ v = 1, 2$$

Целесообразно построить функции  $\bar{\Omega}(z)$  и  $\Phi(z)$  таким образом, чтобы, во-первых, обеспечить заданный скачок комбинации  $\sigma_y + i\tau_{xy}$  при переходе с одного берега щели на противоположный и, во-вторых, автоматически выполнить условия периодичности (1.3).

Искомые представления имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l p(x) \zeta(x-z) dx + A \\ \bar{\Omega}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \{F(x) - \overline{p(x)}\} \zeta(x-z) dx + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l p(x) \{ \rho_1(x-z) - (x-z)\rho(x-z) + \zeta(x-z) \} dx + B \\ F(x) &= F^+(x) - F^-(x) \end{aligned}$$

Здесь  $\rho(z)$  и  $\zeta(z)$  — функции Вейерштрасса [4],  $\rho_1(z)$  — специальная мероморфная функция [5,6];  $F(x)$  — скачок выражения  $\sigma_y(x) + i\tau_{xy}(x)$  на  $[-l, l]$ ;  $A$  и  $B$  — константы, определяемые статическими условиями,  $p(x)$  — искомая, вообще говоря, комплексная функция на  $(-l, l)$ .

К представлениям (1.4) присовокупим дополнительное равенство, выражающее условие однозначности смещений в  $D$

$$(1.5) \quad \int_{-l}^l p(x) dx = 0$$

Выполнение условий (1.3) представлениями (1.4) следует из квазипериодичности  $\zeta(z)$ , равенства (1.5) и соотношений [5]

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \rho_1(z + \omega_v) - \rho_1(z) &= \bar{\omega}_v \rho(z) + \gamma_v, \quad v = 1, 2 \\ \gamma_v &= 2\rho_1\left(\frac{\omega_v}{2}\right) - \bar{\omega}_v \rho\left(\frac{\omega_v}{2}\right) \end{aligned}$$

Заданный скачок функции  $\sigma_y + i\tau_{xy}$  на  $[-l, l]$  также обеспечивается. Это легко обнаружить, если учесть непрерывность ядра  $\rho_1(x-z) - (x-z)\rho(x-z) + \zeta(x-z)$  в основном параллелограмме периодов.

Представления (1.4) при условии (1.5) должны обеспечивать существование в  $D$  заданных средних напряжений  $S_1, S_2$  и  $S_{12}$ . С этой целью определим константы  $A$  и  $B$  из соотношений

$$(1.7) \quad \begin{aligned} g(z + \omega_2) - g(z) &= i |\omega_2| (S_1 + S_{12}e^{i\alpha}), \quad \alpha = \arg \omega_2 \\ g(z + \omega_1) - g(z) &= -i\omega_1 (S_{12} + S_2e^{i\alpha}) \\ g(z) &= \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} = \varphi(z) + \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi(\bar{z})} \\ \varphi(z) &= \int \Phi(z) dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z) dz \end{aligned}$$

Комбинация  $g(z)$  оказывается квазипериодической функцией. Ее приращения на основных периодах найдем, учитывая следующие свойства входящих в  $g(z)$  функции [4,6]:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \sigma(z + \omega_v) &= -\sigma(z) \exp \left\{ \delta_v \left( z + \frac{\omega_v}{2} \right) \right\}, \quad v = 1, 2 \\ \delta_v &= \zeta \left( z + \frac{\omega_v}{2} \right) - \zeta(z) = 2\zeta \left( \frac{\omega_v}{2} \right) \\ \zeta_1(z + \omega_v) - \zeta_1(z) &= \bar{\omega}_v \zeta(z) - \gamma_v z - \gamma_v^* \\ \zeta_1(z) &= - \int_0^z \rho_1(z) dz \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что точка  $z$  лежит в основном параллелограмме периодов, содержащем начало координат,  $\gamma_v^*$  — несущественная в нашем случае постоянная.

Из (1.7) в силу (1.4), (1.5) и (1.8) приходим к системе уравнений

$$(1.9) \quad \begin{aligned} (A + \bar{A})\bar{\omega}_1 + (B - A)\omega_1 + a(\delta_1 + \gamma_1) + \bar{a}(\delta_1 + \bar{\delta}_1) &= \\ = i\omega_1 (S_{12} + S_2e^{-i\alpha}) - \delta_1 f \\ (A + \bar{A})\bar{\omega}_2 + (B - A)\omega_2 + a(\delta_2 + \gamma_2) + \bar{a}(\delta_2 + \bar{\delta}_2) &= \\ = -i|\omega_2| (S_1 + S_{12}e^{-i\alpha}) - \delta_2 f \\ a &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l xp(x) dx, \quad f = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l xF(x) dx \end{aligned}$$

Учитывая равенства [4,5]

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i, \quad \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 = \delta_2\bar{\omega}_1 - \delta_1\bar{\omega}_2$$

представим решение системы (1.9) в виде

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} A &= \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{\pi}{2S}f - \frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re}(a\delta_1), \quad S = \omega_1 H \\ B - A &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) + i\tau + \frac{\pi - H\delta_1}{S}f - \frac{a\gamma_1}{\omega_1} - \frac{\bar{a}\delta_1}{\omega_1} \\ \sigma_2 &= S_2 \sin \alpha, \quad \tau = S_{12} + S_2 \cos \alpha, \quad H = \operatorname{Im} \omega_2 \\ \sigma_1 \sin \alpha &= S_1 + 2S_{12} \cos \alpha + S_2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\tau$  — средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям  $ox$  и  $oy$ .

Условие совместности системы (1.9) имеет вид

$$(1.11) \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l x F(x) dx \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l (\sigma_v^+ - \sigma_v^-) x dx = 0$$

В силу самоуравновешенности заданной на берегах разрезов нагрузки условие (1.11) выполняется автоматически.

Таким образом, представления (1.4) при условии (1.5) описывают класс двойкопериодических задач для плоскости с разрезами.

2. Алгоритм решения] задачи. Условия периодичности напряжений выполняются за счет выбора представлений искомых функций, поэтому достаточно удовлетворить граничным условиям лишь на берегах основного разреза.

Эти граничные условия имеют вид

$$(2.1) \quad \bar{\Omega}(x) + \overline{\Phi(x)} = \begin{cases} F^+(x_0), & x = x_0 + 0i, \\ F^-(x_0), & x = x_0 - 0i \end{cases} \quad x_0 \in [-l, l]$$

В силу самого построения функций (1.4) достаточно удовлетворить одному из условий (2.1), так как реализация второго из условий (2.1) приведет к тому же сингулярному уравнению.

Осуществляя в (1.4) предельный переход и подставляя полученные предельные значения функций  $\overline{\Phi(z)}$  и  $\bar{\Omega}(z)$  в одно из граничных условий (2.1), приходим к сингулярному уравнению относительно  $p(x)$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \overline{p(x)} \{ \zeta(x-x_0) + \overline{\zeta(x-x_0)} \} dx - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l p(x) \{ \rho_1(x-x_0) - (x-x_0)\rho(x-x_0) + \zeta(x-x_0) \} dx - \\ & - B - \bar{A} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l F(x) \zeta(x-x_0) dx - \frac{F^+(x) + F^-(x)}{2} \end{aligned}$$

Это уравнение (точнее, систему уравнений) легко привести к обычной форме, если иметь в виду разложения в основном параллелограмме периодов [7]

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1}^* z^{2j+1}}{\omega_1^{2j+2}}, & g_k^* &= \sum'_{m,n} \frac{1}{T^{2k}} \\ \rho(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1) g_{j+1}^*}{\omega_1^{2j+2}} z^{2j}, & \rho_k^* &= \sum'_{m,n} \frac{T}{T^{2k+1}} \\ \rho_1(z) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+2) \rho_{j+1}^*}{\omega_1^{2j+2}} z^{2j+1} \end{aligned}$$

$$T = m + n \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 2, 3, \dots$$

Получаем после простых выкладок

$$(2.4) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\theta(\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \theta(\xi) K(\xi - \xi_0) d\xi - \\ - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \overline{\theta(\xi)} K_*(\xi - \xi_0) d\xi = H(\xi_0)$$

$$\theta(\xi) = p(x), \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{l}, \quad \lambda = \frac{2l}{\omega_1}, \quad -1 < \xi_0 < 1$$

$$K(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad 0 \leq \lambda < 1$$

$$K_*(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad K_0 = \omega_1 \operatorname{Re} \delta_1$$

$$K_j = \operatorname{Re} g_{j+1}^*, \quad K_0^* = -\frac{\omega_1}{2} (\bar{\gamma}_1 + \bar{\delta}_1), \quad K_j^* = (j+1) \times \\ \times (\bar{\rho}_{j+1} - \bar{g}_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

$$H(\xi_0) = i\tau - \sigma_2 + \overline{F_1(x_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^l \overline{F(x)} \left\{ \overline{\zeta(x - x_0)} - \frac{x\bar{\delta}_1}{\omega_1} \right\} dx$$

$$F(x) = F^+(x) - F^-(x), \quad F_1(x) = \frac{1}{2} \{F^+(x) + F^-(x)\}$$

К основному сингулярному уравнению (2.4) необходимо присоединить дополнительное условие (1.5), представленное в форме

$$(2.5) \quad \int_{-1}^1 \theta(\xi) d\xi = 0$$

Если решетка и внешняя нагрузка симметричны относительно координатных осей, то (2.4) вырождается в одно сингулярное уравнение относительно функции  $\theta(\xi)$ , принимающей чисто мнимые значения. В общем случае (2.4) представляет собой систему двух сингулярных уравнений относительно комплексной функции  $\theta(\xi)$ .

Сведем уравнение (2.4) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, минуя промежуточный этап регуляризации и приведения его к фредгольмовому уравнению второго рода.

Положим

$$(2.6) \quad \theta(\xi) = \frac{\theta_0(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

где  $\theta_0(\xi)$  — непрерывная по Гельдеру на  $[-1, 1]$  функция.

Будем разыскивать  $\theta_0(\xi)$  в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода. Имеем

$$(2.7) \quad \theta_0(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k(\xi), \quad T_k(\xi) = \cos(k \arccos \xi)$$

Непосредственно видно, что дополнительное условие (2.5) при этом выполняется автоматически.

Ниже потребуются соотношения для полиномов Чебышева первого и второго рода  $T_k(\xi)$  и  $U_k(\xi)$

$$(2.8) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\xi}{\xi-\xi_0} = \pi U_{k-1}(\xi_0), \quad k=1, 2, \dots$$

$$\int_{-1}^1 (1-\xi)^s T_k(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi(2s)!}{2^s (k+s)! \Gamma(s-k+1)} = \pi b_{k,s}, \quad s, k=0, 1, \dots$$

$$\int_{-1}^1 (1+\xi)^s \sqrt{1-\xi^2} U_k(\xi) d\xi = \frac{\pi(2s+1)! (k+1)}{2^s (k+s+2)! \Gamma(s-k+1)} = \pi a_{k,s}$$

$$U_k(\xi) = \frac{\sin[(k+1) \arccos \xi]}{\sin(\arccos \xi)}$$

Подставляя (2.6), (2.7) в интегральное уравнение (2.4), используя первую формулу в (2.8) и ортогональность функций  $U_k(\xi)$  на  $[-1, 1]$ , приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_k$

$$(2.9) \quad A_{k+1} - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk} A_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_{nk}^* A_n = i H_k, \quad k=0, 1, \dots$$

$$C_{nk} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) U_k(\xi_0) \sqrt{1-\xi_0^2}}{\sqrt{1-\xi^2}} K(\xi-\xi_0) d\xi d\xi_0$$

$$C_{nk}^* = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi) U_k(\xi_0) \sqrt{1-\xi_0^2}}{\sqrt{1-\xi^2}} K_*(\xi-\xi_0) d\xi d\xi_0$$

$$H_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 H(\xi_0) U_k(\xi_0) \sqrt{1-\xi_0^2} d\xi_0$$

Коэффициенты  $C_{nk}$ ,  $C_{nk}^*$  можно представить в явном виде. Имеем, используя (2.8) и (2.4)

$$(2.10) \quad C_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2} K_j \alpha_{jnk}, \quad C_{nk}^* = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2} K_j^* \alpha_{jnk}$$

$$\alpha_{jnk} = 2 \sum_{s=0}^{2j+1} (-1)^s \frac{(2j+1)!}{s! (2j+1-s)!} a_{k,s} b_{n, 2j-s+1}$$

Как можно заметить, отличны от нуля лишь величины  $\alpha_{j, 2n, 2k+1}$  и  $\alpha_{j, 2n+1, 2k}$ . Система (2.9) полностью определяет решение задачи.

Отметим в заключение, что замена  $\xi = \cos \vartheta$  придает представлению (2.7) обычный вид ряда Фурье по  $\cos k\vartheta$  (без нулевого члена).

**3. Коэффициенты интенсивности напряжений [8, 9].** Рассмотрим пластинку с двоякопериодической системой трещин. Положим

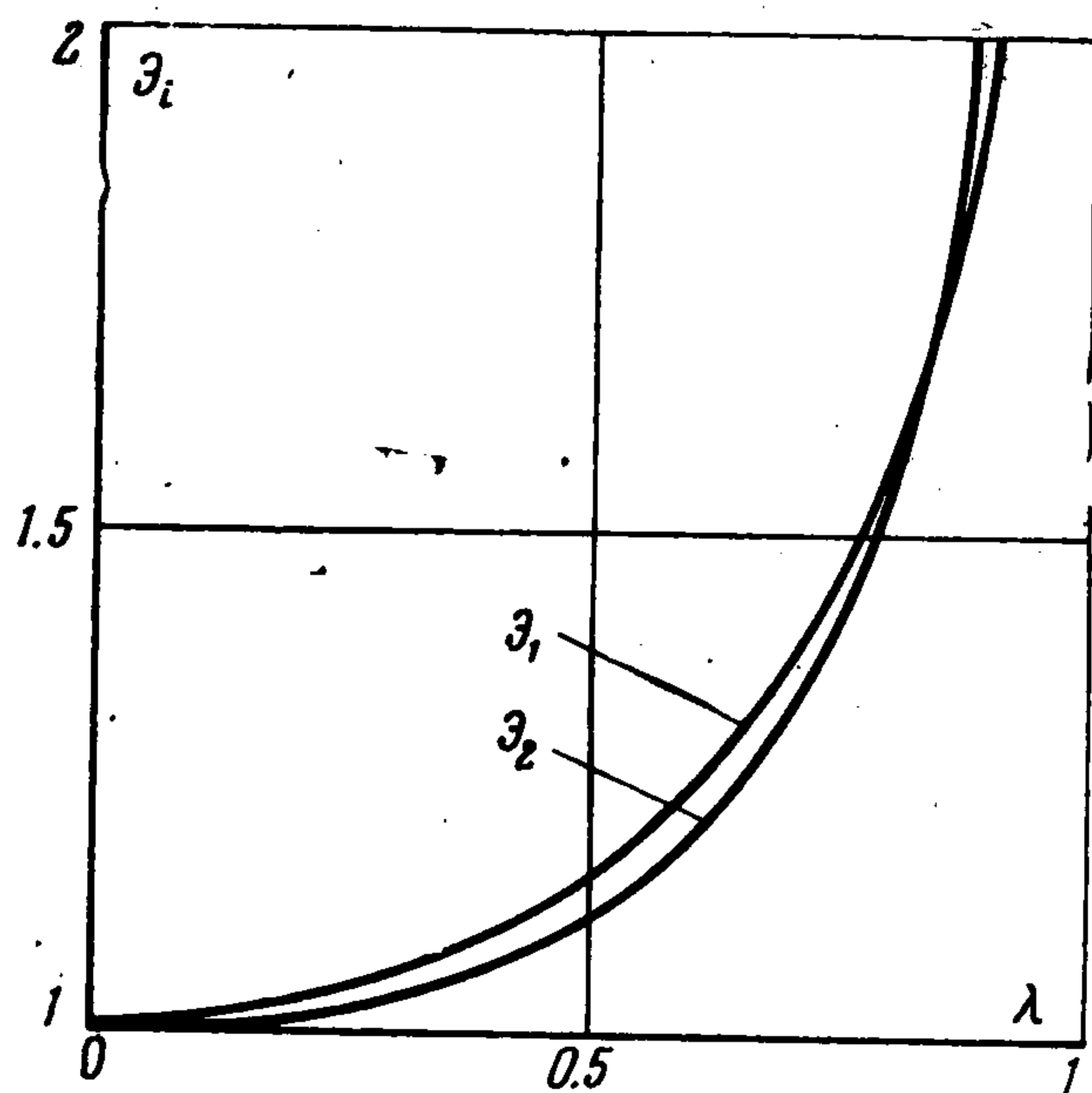
$$(3.1) \quad F(x) = 0, \quad F_1(x) = 0, \quad x \in [-1, 1]$$

Учитывая третью формулу в (1.2) и поведение интегралов типа Коши в (1.4) на концах линии интегрирования [10], находим коэффициенты ин-

тенсивности напряжений на левом и правом концах трещин

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 &= \lim_{x \rightarrow l+0} \{(\sigma_y + i\tau_{xy}) \sqrt{2\pi(x-l)}\} = \\
 &= i\sqrt{\pi l} \theta_0(1) = i\sqrt{\pi l} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k \\
 \varepsilon_1^* + i\varepsilon_2^* &= \lim_{x \rightarrow -l-0} \{(\sigma_y + i\tau_{xy}) \sqrt{-2\pi(x+l)}\} = \\
 &= i\sqrt{\pi l} \theta_0(-1) = i\sqrt{\pi l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \bar{A}_k
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов даны на фиг. 2. Здесь приведены кривые изменения коэффициентов интенсивности напряжений  $\varepsilon_i$  в зависимости от относительного размера области  $\lambda = 2l/\omega_1$ .



Фиг. 2

носительного размера области  $\lambda = 2l/\omega_1$ . ( $\omega_2 = \omega_1 e^{i\pi/3}$ ). В расчетах принималось  $\mu = 0.3$ .

4. Макроскопические параметры решетки. Найдем закон связи между средними деформациями и средними напряжениями в решетке. Этот закон представляет собой закон Гука для сплошной анизотропной среды, обладающей той же жесткостью на растяжение, что и решетка [5].

Приращение смещений в решетке при переходе от точки  $z$  к конгруэнтной ей точке  $z + \omega_v$  ( $v = 1, 2$ ) получим с учетом последней формулы (1.2) и соотношений (1.7). Имеем

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad 2G [u(z + \omega_1) - u(z)] &= 1/4 (\sigma_1 + \sigma_2) (\kappa + 1) \omega_1 - \omega_1 \sigma_2 \\
 2G [v(z + \omega_1) - v(z)] &= \omega_1 \tau + (\kappa + 1) \operatorname{Im} (a\delta_1) \\
 2G [u(z + \omega_2) - u(z)] &= \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2) (\kappa + 1) h + H\tau - h\sigma_2 - \\
 &\quad - \frac{\kappa + 1}{\omega_1} [H \operatorname{Im} (a\delta_1) - 2\pi \operatorname{Im} a], \quad h = \operatorname{Re} \omega_2 \\
 2G [v(z + \omega_2) - v(z)] &= \frac{1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2) (\kappa + 1) H + h\tau - H\sigma_1 + \\
 &\quad + \frac{\kappa + 1}{\omega_1} [h \operatorname{Im} (a\delta_1) - 2\pi \operatorname{Re} a], \quad H = \operatorname{Im} \omega_2
 \end{aligned}$$

С другой стороны, средние деформации  $e_1, e_2, e_{12}$  и угол поворота ячейки  $\omega$  в решетке связаны с приращениями смещений следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad e_1 \omega_1 &= u(z + \omega_1) - u(z), \quad (e_{12} + \omega) \omega_1 = v(z + \omega_1) - v(z) \\
 e_1 h + (e_{12} - \omega) H &= u(z + \omega_2) - u(z) \\
 e_2 H + (e_{12} + \omega) h &= v(z + \omega_2) - v(z)
 \end{aligned}$$

Ниже будем предполагать, что берега щелей свободны от сил.

Пусть  $\theta_1(\xi)$  — решение уравнения (2.4) при  $H(\xi) = -1$ , а  $\theta_2(\xi)$  — решение этого уравнения при  $H(\xi) = i$ . Тогда общее решение  $\theta(\xi)$  и соответствующий ему функционал  $a$  запишутся в виде

$$(4.3) \quad \theta(\xi) = \sigma_2 \theta_1(\xi) + \tau \theta_2(\xi), \quad a = l^2 (a_1 \sigma_2 + a_2 \tau)$$

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \xi \theta_j(\xi) d\xi, \quad j = 1, 2$$

Подставляя приращения смещений из (4.2) в (4.1) и учитывая (4.3), приходим к закону связи между средними напряжениями и средними деформациями в решетке, а также к формуле для угла поворота фундаментальной ячейки

$$(4.4) \quad e_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2)$$

$$e_2 = -\frac{\mu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \left( 1 - \frac{2\pi\lambda^2}{H} \omega_1 \operatorname{Re} a_1 \right) \sigma_2 - \frac{2\pi\lambda^2}{EH} \omega_1 \operatorname{Re} a_2 \tau$$

$$2e_{12} = \frac{2\pi\lambda^2}{EH} \omega_1 \operatorname{Im} a_1 \sigma_2 + \left( 2 \frac{1+\mu}{E} + \frac{2\pi\lambda^2}{EH} \omega_1 \operatorname{Im} a_2 \right) \tau$$

$$(4.5) \quad \omega = \frac{\lambda^2 \omega_1}{EH} \operatorname{Im} [(\delta_1 H - \pi)(a_1 \sigma_2 + a_2 \tau)]$$

Коэффициенты при  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\tau$  в (4.4) представляют собой макроскопические упругие параметры решетки. Можно показать, что матрица макроскопических параметров симметрична ( $\operatorname{Im} a_1 = -\operatorname{Re} a_2$ ) и энергетически допустима [11].

В силу (2.6), (2.7) и (4.3) фигурирующие в (4.4) функционалы  $a_1$  и  $a_2$  можно выразить через первый коэффициент в представлении (2.7) по формуле

$$(4.6) \quad a_1 = \frac{1}{4i} A_1^{(1)}, \quad a_2 = \frac{1}{4i} A_1^{(2)}$$

Здесь индекс 1 [вверху соответствует решению системы (2.9) при  $H_0 = -1$ ,  $H_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а индекс 2 соответствует решению этой системы при  $H_0 = i$ ,  $H_k = 0$ .

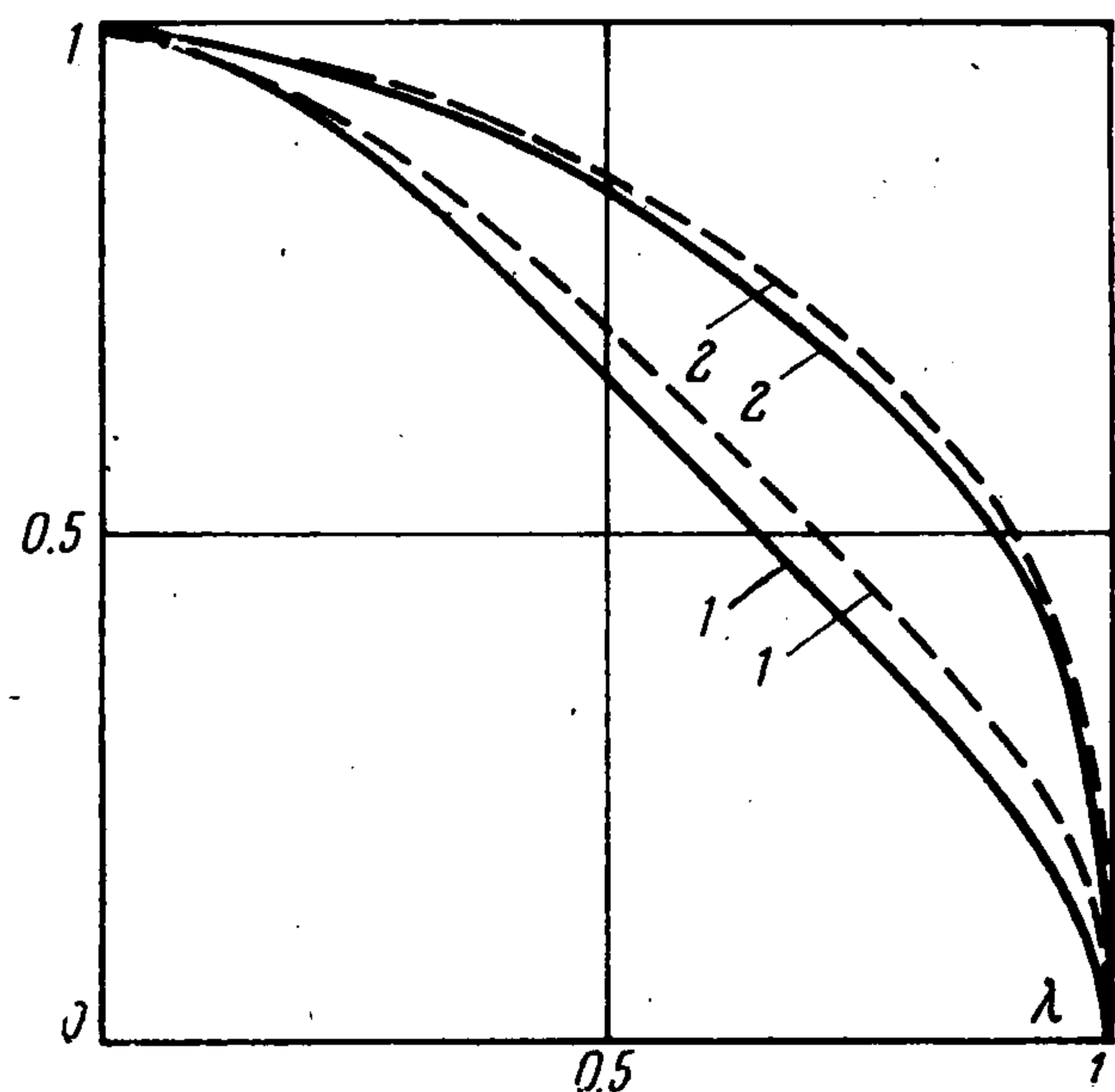
Сказанное выше суммирует следующая теорема. Неограниченная плоская изотропная среда, ослабленная двоякопериодической системой прямолинейных разрезов, тождественна «в среднем» специальной анизотропной среде, управляемой законом (4.4).

Рассматриваемую решетку можно интерпретировать как модель среды (4.4) и обратно.

На фиг. 3 кривым 1 и 2 соответствуют графики макроскопических параметров

$$\frac{\langle E_2 \rangle}{E} = \frac{1}{E \langle a_{22} \rangle} = \left\{ 1 - \frac{2\pi\lambda^2}{H} \omega_1 \operatorname{Re} a_1 \right\}^{-1}$$

$$\frac{\langle G \rangle}{G} = \frac{1}{G \langle a_{66} \rangle} = \left\{ 1 + \frac{\pi\lambda^2}{H(1+\mu)} \omega_2 \operatorname{Im} a_2 \right\}^{-1}$$



Фиг. 3

для правильной треугольной (сплошные кривые) и квадратной (пунктир) решеток (кривые 2 для обеих решеток практически совпадают). Очевидно, в этом случае модельная среда ортотропна, т. е.  $\langle a_{26} \rangle = \langle a_{32} \rangle = 0$

Отметим, в заключение, что при  $\lambda = 0$ ,  $|\omega_1| = |\omega_2|$  получаем среду с одной щелью; при  $|\omega_2| \rightarrow \infty$  имеем периодическую систему щелей, расположенных вдоль оси  $x$ ; наконец, при  $|\omega_1| \rightarrow \infty$  и конечной  $\omega_2$  получаем среду с периодической системой параллельных щелей.

Автор благодарит А. А. Калюту, взявшего на себя труд по численной реализации алгоритма.

Поступила 2 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В. З. Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении. ПМТФ, 1965, № 5.
2. Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., «Наука», 1968.
5. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
6. Кац В. Е., Фильштинский Л. А. Об одном методе построения двоякопериодических полигармонических функций. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 8.
7. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
8. Irwin G. R. Fracture Handbuch der Physik, Bd 6. Berlin, Springer-Verlag, 1958.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
11. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.