Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.374

НЕГОЛОНОМНОСТЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА И УСЛОВИЯ НА СИЛЬНЫХ РАЗРЫВАХ

Н. Д. Вервейко, В. Н. Николаевский

(Воронеж, Москва)

Рассматриваются на основе теории разрывов условия на ударной волне в упругопластической среде с неассоциированным законом течения. Предлагается система соотношений на ударной волне, которая вообще представляет собой неголономные условия, интегрируемые только при решении задачи о движении среды за фронтом волны. В рассматриваемом случае отсутствует адиабата Гюгонио, независимая от течения за фронтом.

Уравнения, определяющие пластические деформации материалов, в общем случае представляются в приращениях и должны быть проинтегрированы в ходе решения конкретных задач. Если последние осложняются наличием поверхностей сильных разрывов, то для проведения интегрирования, помимо обычных балансовых соотношений, необходимы дополнительные граничные условия на этих поверхностях.

В предлагаемой заметке показано, что подобное условие должно формулироваться для смещений в случае отсутствия разрывов перемещений в виде условия непрерывности смещений. Анализ проводится с учетом конечности деформаций.

Инкрементальные определяющие связи неголономны [1] и их нельзя, вообще говоря, проинтегрировать независимо. В этих случаях связи между параметрами системы на сильных разрывах не могут быть сведены к системе конечных замкнутых соотношений. Так, в дилатирующих пластических материалах [2] в общем случае не будет существовать адиабаты Гюгонио, независимой от движения вне сильного разрыва.

Некоторые авторы [3–5] конструируют дополнительные соотношения на сильном разрыве (позволяющие получить конечные ударные соотношения), исходя из анализа внутренней структуры разрыва на основе тех же определяющих уравнений, иногда с дополнительными вязкими слагаемыми и с введением гипотетического пути нагружения. Частный характер условий на сильном разрыве, получаемых путем предельного перехода от непрерывной структуры, был отмечен Л. И. Седовым [1].

Согласно подходу, развиваемому в данной заметке, рассмотрение структуры ударного перехода требуется для определения изменений начального состояния (состояния отсчета) в материальной частице, проходящей через ударный фронт. Поэтому адекватную систему уравнений для структуры следует выбирать среди обобщенных континуальных моделей.

1. Рассмотрим тензорно-линейную упругопластическую среду [6, 7] при неассоциированном законе течения. Будем использовать эйлерово представление движения.

Полные приращения деформаций e_{ij} являются суммой упругих и пластических составляющих

$$De_{ij} = De_{ij}^e + De_{ij}^p = \varepsilon_{ij}Dt \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(v_{i,j} + v_{j,i}), \qquad v_{i,j} = \partial v_i \,/\, \partial x_j \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{De_{ij}}{Dt} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + v_k\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k} - e_{ik}\Omega_{kj} - e_{jk}\Omega_{ki} + e_{ik}\varepsilon_{kj} + e_{jk}\varepsilon_{ki}\right)$$

Здесь символом D обозначены приращения, соответствующие производной в смысле Олдройда [8] (выражение в скобках). ε_{ij} — тензор скоростей деформаций.

С другой стороны, сами полные деформации e_{ij}, которые, вообще говоря, не малы, выражаются через смещения u_{ij} соотношением Альманси

$$e_{ij} = {}^1/_2(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) \tag{1.3}$$

Как известно (см., например, [8, 9]), определения (1.1) и (1.3) не противоречат одно другому, так как тензоры e_{ij} и ε_{ij} связаны между собой формулой (d' / dt — производная в смысле Яуманна)

$$\varepsilon_{ij} = De_{ij} / Dt = d'e_{ij} / dt + e_{ik}\varepsilon_{kj} + e_{jk}\varepsilon_{ki} \tag{1.4}$$

Малые упругие деформации De_{ij}^e связаны с приращениями напряжений $D\sigma_{ij}$ законом Гука (λ, μ — коэффициенты Ламе)

$$D\sigma_{ij} = \lambda De_{kk}^e\delta_{ij} + 2\mu De_{ij}^e$$

что соответствует линейному закону упругости в лагранжевых координатах. Эти же соотношения в терминах скоростей изменения напряжений и деформаций примут вид

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = \lambda\frac{De_{kk}}{Dt}\delta_{ij} + 2\mu\frac{De_{ij}}{Dt} - \lambda\frac{De_{kk}^p}{Dt}\delta_{ij} - 2\mu\frac{De_{ij}^p}{Dt} \tag{1.5}$$

В работах [6, 7] в связи (1.5) использовалась яуманнова производная от напряжений

$$d'\sigma_{ij} / dt = d\sigma_{ij} / dt - \sigma_{ik}\Omega_{kj} - \sigma_{jk}\Omega_{ki}$$

и полагалось, что $\varepsilon_{ij} = de_{ij}/dt$, где $d/dt = \partial / \partial t + v_k\partial / \partial x_k$ — субстанциональная производная.

Отметим, что модели линейно-гипоупругого материала по Трусделлу [8] соответствует связь (1.5) при $e_{ij}^p = 0$.

В соответствии с принципами инкрементальной теории пластичности в тензорно-линейном изотропном случае связь между приращениями пластических деформаций и напряжениями может быть представлена в виде [7]

$$De_{ij}^p = d\zeta\,({}^1/_3\sigma_{kk} - H)\delta_{ij} + d\psi\,(\sigma_{ij} - {}^1/_3\sigma_{kk}\delta_{ij}) \tag{1.6}$$

Здесь ζ, ψ, H — скалярные функции параметров состояния среды. Функции ζ и ψ считаются искомыми; для их нахождения введем [6] два дополнительных условия пластического деформирования.

$$\Phi_\sigma = (\sigma_{ij}, \alpha, Y, \chi, \ldots) = \sqrt{J_2'} + {}^1/_3\alpha J_1 - Y = 0, \quad J_1 = \sigma_{kk}, \quad J_2 = \sigma_{ij}'\sigma_{ij}' \tag{1.7}$$

$$\Phi_\varepsilon = (\varepsilon_{ij}^p, \Lambda, \chi, \ldots) = I_1 - 2\Lambda\sqrt{I_2'} = 0, \ I_1 = \varepsilon_{kk}^p, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}'^p\varepsilon_{ij}'^p \tag{1.8}$$

Первое из них — условие пластичности в форме Мизеса — Шлейхера для напряжений, второе — кинематическое ограничение для компонент тензора скоростей пластических деформаций (условие дилатансии [7]) J_1, I_1 — первые инварианты тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, J_2, I_2 — вторые инварианты девиаторов тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций, $\alpha(J, \chi)$, $Y(\chi)$ — коэффициенты внутреннего трения и сцепления, χ — параметр упрочнения, $\Lambda(\chi, I)$ — скорость дилатансии.

Условие дилатансии (1.8) позволяет исключить величины H и ζ следующим образом: $d\zeta = -{}^2/_3\,\Lambda\alpha d\psi$, $H = \alpha^{-1}Y$.

Тогда связь между пластическими деформациями и напряжениями (1.5) примет вид

$$De_{kk}{}^{p} = {}^2/_3\,\Lambda\alpha({}^1/_3\alpha^{-1}Y - \sigma_{kk})d\psi, \qquad De_{ij}{}'^{p} = \sigma_{ij}{}'d\psi \tag{1.9}$$

В частном случае ассоциированного закона, как известно [7], $\alpha \equiv \Lambda$. Определяющие уравнения (1.2), (1.5), (1.9) и условие пластичности (1.7) совместно с уравнениями неразрывности и движения

$$d\rho\ /\ dt + \rho v_{kk} = 0, \qquad \rho dv_i\ /\ dt = \sigma_{ij},_j + F_i \tag{1.10}$$

при известных функциях упрочнения $\alpha(J, \chi)$, $Y(\chi)$ составляют замкнутую систему уравнений динамики упругопластической дилатирующей среды. Здесь ρ — плотность среды, F_i — массовая сила.

Некоторые соотношения из этой системы являются конечными связями между основными функциями (условие пластичности). Другие уравнения (это неассоциированный закон пластических приращений (1.9), закон Гука в форме (1.5), а также возможные функциональные зависимости χ от процесса) могут быть проинтегрированы только совместно с уравнениями (1.10) неразрывности и движения.

2. Пусть в рассматриваемой сплошной среде распространяется изолированная поверхность Σ, на которой претерпевают разрыв напряжения, скорости и их производные по координатам x_i и t времени

$$[\sigma_{ij}] \neq 0, \quad [v_i] \neq 0, \ldots, [\partial^k\sigma_{ij}/\partial t^l\partial x_1{}^m \ldots \partial x_2{}^n\partial x_3{}^p] \neq 0$$
$$l + m + n + p = k$$

Будем считать, что, по крайней мере, с одной стороны от Σ выполнены условия пластичности. Перемещения материальной среды будем предполагать непрерывными

$$[u_i] = 0 \tag{2.1}$$

Законы сохранения массы и импульса на фронте ударной волны [1] имеют вид

$$[\rho G] = 0, \qquad [\sigma_{ij}]n_j + \rho G[v_i] = 0 \tag{2.2}$$

Здесь $G = D - v_n$ — нормальная скорость движения ударной волны относительно материальных частиц, D — та же скорость относительно неподвижной системы координат, n_i — нормаль к поверхности Σ. Предполагаем, что процесс деформирования материала не зависит от изменения температуры, а поэтому балансовый закон для энергии и производства энтропии на скачке не выписывается.

При нахождении скачков конечных деформаций на поверхности разрыва Σ будем пользоваться локальной системой координат n, y_1, y_2, соответствующей вектору n_i и касательным векторам τ_{1i}, τ_{2i} к Σ. Поэтому производные по координатам x_i будут преобразовываться к производным по местным координатам по правилу

$$\partial / \partial x_i = (\partial / \partial n) n_i + x_{i,\alpha} g_{\alpha\beta} \; (\partial / \partial y_\beta)$$

$$(x_{i\alpha} = x_{i,\alpha} = \partial x_i / \partial y_\alpha, \; g_{\alpha\beta} = x_{i\alpha} x_{i\beta})$$

Здесь $x_i = x_i(y_1, y_2, t)$ — уравнение поверхности разрыва Σ, $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор [10].

Применяя это правило в выражении (1.3), а затем составляя разности полных деформаций e_{ij} по разные стороны от поверхности Σ, получим соотношение для $[e_{ij}]$. В силу условия [10]

$$[\partial u_k / \partial y_\beta] = \partial [u_k] / \partial y_\beta$$

требование (2.1) о непрерывности смещения означает, что

$$[\partial u_k / \partial y_\beta] = 0 \tag{2.3}$$

Поэтому соотношение для скачка полных деформаций упрощается

$$[e_{ij}] = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial u_i}{\partial n} \right] n_j + \left[\frac{\partial u_j}{\partial n} \right] n_i - \left[\frac{\partial u_k}{\partial n} \frac{\partial u_k}{\partial n} \right] n_i n_j - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial u_k}{\partial n} \right] \left(x_{i\alpha} g_{\alpha\beta} \frac{\partial u_k}{\partial y_\beta} n_j + x_{j\alpha} g_{\alpha\beta} \frac{\partial u_k}{\partial y_\beta} n_i \right) \right\}$$

Скорость перемещения v_i в локальной системе координат имеет вид

$$v_i = du_i / dt = \delta u_i / \delta t - G \partial u_i / \partial n + v_k x_{k\alpha} g_{\alpha\beta} du_i / dy_\beta$$

где $\delta / \delta t$ означает производную по времени на подвижной поверхности [10]. Снова в силу (2.1) имеем

$$[\delta u_i / \delta t] = \delta [u_i] / \delta t = 0 \tag{2.4}$$

а поэтому скачок скорости принимает вид

$$[v_i] = - [G \partial u_i / \partial n] + [v_k] x_{k\alpha} g_{\alpha\beta} \partial u_i / \partial y_\beta$$

Переходя к напряжениям, заметим, что их значения с той стороны от Σ, где происходит пластическое деформирование, связаны условием пластичности. В частности, если считать, что условие пластичности (1.7) выполняется и впереди, и за поверхностью разрыва Σ, из него можно получить ограничение для скачков напряжений следующего вида:

$$[\sqrt{J_2'}] = \sqrt{J_2'^+} - \sqrt{J_2'^+ - 2\sigma_{ij}'^+ [\sigma_{ij}'] + [\sigma_{ij}'][\sigma_{ij}']} = -{}^1/_3 [\alpha J_1] + [Y] \tag{2.5}$$

Скачки $[D\sigma_{ij} / Dt]$, $[De_{ij} / Dt]$, $[De_{ij}{}^p / Dt]$ связаны линейным условием (1.5). Для перехода в этом условии к скачкам самих функций, скачкам производных от функций по координатам и производным по времени от скачков функций отметим предварительно соотношение

$$\left[\frac{Da_{ij}}{Dt}\right]=\frac{\delta[a_{ij}]}{\delta t}+\left[v_n\frac{\partial a_{ij}}{\partial n}\right]+\left[v_k x_{k\alpha}g_{\alpha\beta}\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_\beta}\right]-$$
$$-D\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial n}\right]-\left[\frac{\partial v_k}{\partial n}a_{kj}\right]n_i-\left[\frac{\partial v_k}{\partial y_\alpha}x_{i\beta}g_{\alpha\beta}a_{kj}\right]+$$
$$+\left(\frac{\partial(Dn_k)}{\partial n}n_i+\frac{\partial(Dn_k)}{\partial y_\alpha}x_i{}^\beta g_{\alpha\beta}\right)[a_{kj}]-\left[\frac{\partial v_j}{\partial n}n_k a_{ki}\right]-$$
$$-\left[\frac{\partial v_j}{\partial y_\alpha}x_{k\beta}g_{\alpha\beta}a_{ki}\right]+\left(\frac{\partial(Dn_j)}{\partial n}n_k+\frac{\partial(Dn_j)}{\partial y_\alpha}x_{k\beta}g_{\alpha\beta}\right)[a_{ki}]$$

следующее из определения производной по времени в смысле Олдройда от произвольного тензора a_{ij}. Положив

$$a_{ij}=\sigma_{ij}-\lambda e_{kk}\delta_{ij}-2\mu e_{ij}+\lambda e_{kk}{}^p\,\delta_{ij}+2\mu e_{ij}{}^p$$

и беря разность выражений (2.3) справа и слева от Σ, получим следующее условие на ударной волне:

$$\left[\frac{Da_{ij}}{Dt}\right]=0 \tag{2.6}$$

Производные от скоростей, входящие в соотношение (2.6), в свою очередь, представим через смещения u_i следующим образом:

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial n}\right]=\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\partial u_i}{\partial n}\right]-\left[G\frac{\partial^2 u_i}{\partial n^2}\right]+\left[v_k x_{k\alpha}g_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\frac{\partial u_i}{\partial n}\right]$$
$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial y_\alpha}\right]=-\left[G\frac{\partial}{\partial n}\left(x_{i\sigma}g_{\sigma\beta}\frac{\partial u_i}{\partial y_\beta}\right)x_{j\gamma}g_{\ \alpha}\right]$$

Наконец, пластические определяющие связи (1.9), представленные в локальной системе координат, замыкают уравнения на поверхности разрыва. Действительно, составляя разность соотношений (1.9) слева и справа от фронта Σ, получим

$$\left[\frac{De_{kk}^p}{Dt}\right]=\left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}-G\frac{\partial\psi}{\partial n}+v_k x_{k\beta}g_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y_\alpha}\right)\frac{2}{3}\alpha\Lambda\left(\frac{1}{3}Y-\sigma_{kk}\right)\right] \tag{2.7}$$
$$\left[\frac{De_{ij}'^p}{Dt}\right]=\left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}-G\frac{\partial\psi}{\partial n}+v_k x_{k\beta}g_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y_\alpha}\right)\sigma_{ij}'\right]$$

Система соотношений (2.1)—(2.7) составляет граничные условия на поверхности разрыва для искомых функций σ_{ij}, e_{ij}, $e_{ij}{}^p$, v_i, ψ, ρ и позволяет решать задачу Коши для системы уравнений (1.5), (1.7) — (1.10) в возмущенной области с рассмотренными граничными условиями на Σ. Эти соотношения неголономны, так как в них входят скачки и самих функций и их производных по нормали, т. е. они не могут, вообще говоря, привести к конечным соотношениям между значениями искомых величин на фронте, независимым от течения вне поверхности разрыва.

Для интегрирования уравнения состояния (1.5) в областях непрерывных изменений (вне фронта) нужно знать начальные состояния (состояния отсчета) для каждой материальной частицы, а именно — значения полных деформаций при некоторых известных напряжениях. Эти начальные состояния могут быть одинаковыми для всех частиц (случай однородных начальных состояний), могут быть разными в силу исходной неоднородности материала, но самое существенное — ударная волна сама может изменять эти состояния. Поэтому выписанная выше система соотношений на фронте волны должна быть дополнена условиями для скачков начальных состояний.

Для нахождения величин этих скачков в зависимости от интенсивности ударной волны следует прибегнуть к анализу структуры скачка. При этом нужно пользоваться обобщенной континуальной моделью, адекватной таким переходам, которые не могут быть получены непрерывным движением среды в рассматриваемом пространстве [1].

За состояние отсчета можно взять любое заданное напряженное состояние σ_{ij}°, и при этом нужно знать соответствующие деформации e_{ij}°, $e_{ij}^{p\circ}$. Тогда анализ структуры необходим для определения скачков $[e_{ij}^\circ]$ и $[e_{ij}^{p\circ}]$ в материальной частице среды.

Наконец, в самом общем случае анализ структуры ударного перехода в рамках обобщенных моделей может приводить к ненулевому скачку самих смещений u_i, т. е. задание скачков начальных состояний и смещений может оказаться взаимосвязанными. Разбор этих вариантов требует конкретизации континуальных моделей внутриударных переходов.

3. В случае сферически симметричного движения уравнения (1.5), (1.7) — (1.10) для радиального σ_r и кольцевого $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ напряжений, для радиальной и кольцевой e_r, $e_\theta = e_\varphi$, e_r^p, $e_\theta^p = e_\varphi^p$ полных и пластических деформаций, смещения u, плотности ρ и скаляра ψ принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial v}{\partial r} + \rho\frac{v}{r} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \rho\frac{\partial v}{\partial r} - \rho v\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\frac{D\sigma_r}{Dt} = \lambda\frac{D}{Dt}(e_r + 2e_\theta) + 2\mu\frac{De_r}{Dt} - \lambda\frac{D}{Dt}(e_r^p + 2e_\theta^p) - 2\mu\frac{De_r^p}{Dt}$$

$$\frac{D\sigma_\theta}{Dt} = \lambda\frac{D}{Dt}(e_r + 2e_\theta) + 2\mu\frac{De_\theta}{Dt} - \lambda\frac{D}{Dt}(e_r^p + 2e_\theta^p) - 2\mu\frac{De_\theta^p}{Dt}$$

$$\sqrt{6}\varkappa(\sigma_r - \sigma_\theta) = \alpha(\sigma_r + 2\sigma_\theta - {}^1/_3 Y/\alpha)$$

$$\varkappa = \operatorname{sign}(\sigma_r - \sigma_\theta) = \operatorname{sign}(de_r^p - de_\theta^p)$$

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \quad e_\theta = \frac{u}{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2$$

$$\frac{D}{Dt}(e_r^p + 2e_\theta^p) = \sqrt{\frac{8}{13}}\Lambda\varkappa\frac{D}{Dt}(e_r^p - e_\theta^p)$$

$$\frac{De_\theta^p}{Dt} = \frac{d\psi}{dt}\left\{\frac{2}{3}\Lambda\alpha\left(\frac{1}{3\alpha}Y - \sigma_r - 2\sigma_\theta\right) + \frac{1}{3}(\sigma_\theta - \sigma_r)\right\}$$

Видно, что система уравнений (3.1) может быть проинтегрирована без последнего из них, определяющего изменения функции ψ.

Условия на поверхности разрыва, соответствующие системе (1.1), имеют вид

$$[\rho G] = 0, \qquad [\sigma_r] + \rho G[v] = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\delta [a_{11}]}{\delta t} - \left[G\frac{\partial a_{11}}{\partial r}\right] - 2\left[\frac{\partial G}{\partial r}a_{11}\right] = 0, \qquad \frac{\delta [a_{22}]}{\delta t} - \left[G\frac{\partial a_{22}}{\partial r}\right] = 0$$

$$[e_r] = \left[\frac{\partial u}{\partial r}\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right], \qquad [e_\theta] = 0$$

$$[v] = -\left[G\frac{\partial u}{\partial r}\right], \qquad \sqrt{6}\varkappa[\sigma_r - \sigma_\theta] = \left[\alpha\left(\sigma_r + 2\sigma_\theta - \frac{1}{3\alpha}Y\right)\right]$$

$$\frac{\delta}{\delta t}[e_r^p + 2e_\theta^p] - \left[G\frac{\partial}{\partial r}(e_r^p + 2e_\theta^p)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}}\varkappa\left[\Lambda\frac{\delta}{\delta t}(e_r^p - e_\theta^p) - \Lambda G\frac{\partial}{\partial r}(e_r^p - e_\theta^p)\right]$$

$$\frac{\delta[e_\theta^p]}{\delta t} - \left[G\frac{\partial e_\theta^p}{\partial r}\right] = \frac{2}{3}\left[\Lambda\alpha\left(\frac{\delta\psi}{\delta t} - G\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{1}{3\alpha}Y - \sigma_r - 2\sigma_\theta\right)\right]$$

Здесь

$$a_{11} = \sigma_r - (\lambda + 2\mu)(e_r - e_r^p) - 2\lambda(e_\theta - e_\theta^p)$$

$$a_{22} = \sigma_\theta - 2(\lambda + \mu)(e_\theta - e_\theta^p) - \lambda(e_r - e_r^p)$$

В случае малых деформаций членами

$$[(\partial u / \partial r)^2], \qquad [a_{11}\partial(D - v_2) / \partial r]$$

в соотношениях на ударной волне можно пренебречь. Для малых полных деформаций и пластически несжимаемого материала в предположении постоянства скорости распространения волны D скорость D вычисляется $\rho D^2 = (\lambda + {}^2/_3\mu)$ и совпадает со скоростью упругой волны.

В случае малых деформаций уравнения (3.1) и соотношения (3.2) сводятся к полученным в работе [11].

Поступила 30 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
2. *Николаевский В. Н.* О связи объемных и сдвиговых пластических деформаций и об ударных волнах в мягких грунтах. Докл. АН СССР, 1967, т. 117, № 3.
3. *Чернышов А. Д.* О распространении ударных волн в упругопластической среде. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. *Быковцев Г. И., Кретова Л. Д.* О распространении ударных волн в упругопластических средах. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
5. *Germain P., Lee E. H.* Plane waves in elastic — plastic solids. In: Foundations of Plasticity. Groningen, Noordhoff Internat. Publ., Netherland, 1972.
6. *Николаевский В. Н.* Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
7. *Николаевский В. Н.* Механические свойства грунтов и теория пластичности. Итоги науки. Серия: Механика твердых деформируемых сред, т. 6. М., ВИНИТИ, 1972.
8. *Ольшак В., Мруз З., Пежина П.* Современное состояние теории пластичности. М., «Мир», 1964.
9. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
10. *Thomas T.* Plastic flow and fracture in solids. New York — London, Akad. Press, 1961. (Рус. перев.: Т. Томас. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.)
11. *Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М.* Динамика упруго-пластических дилатирующих сред. В сб.: Успехи и достижения механики деформируемых тел (К 100-летию академика Б. Г. Галеркина). М., «Наука», 1974.