

СТОХАСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК

А. С. Вольмир, Х. П. Культербаев

(Москва)

Для оболочки, рассматриваемой как система с одной степенью свободы и находящейся под действием поперечного давления, случайного во времени, в рамках корреляционной теории определяются параметры стационарных вынужденных нелинейных колебаний. Обобщенная сила описывается в виде стационарного нормального процесса с дробно-рациональной спектральной плотностью.

Устойчивость найденных решений проверяется по уравнению возмущенного движения в линейном приближении. Предварительно система приводится к марковскому типу путем расширения фазового пространства. Затем теорема Ляпунова об устойчивости в линейном приближении применяется к совокупности моментных функций первого и второго порядков. Конечный этап задачи выполняется численными методами.

Обнаруживается, что в некоторой области пространства параметров имеются неустойчивые решения. Для систем со сравнительно большой нелинейностью наблюдаются скачкообразные переходы из одних устойчивых состояний в другие.

Характерные типы детерминистического нагружения исследованы в [1-4]. Для существенно нелинейных систем кривые состояний имеют участки, соответствующие неустойчивым движениям.

В ряде работ рассматривались стационарные вынужденные колебания оболочек при случайных нагрузках [5-7]. Исследования, проводимые в рамках корреляционного приближения, часто дают неоднозначные решения, и вопрос о том, какие движения реализуются, остается открытым.

Основная цель данной работы — выделить те из решений, которые соответствуют неустойчивым колебаниям, и тем самым более точно определить фактическое поведение оболочек.

1. В нелинейной динамике упругих пластинок и оболочек поведение систем с одной степенью свободы часто описывается дифференциальным уравнением следующего типа [1]:

$$(1.1) \quad y'' + 2\epsilon y' + y - \alpha y^2 + \beta y^3 = q$$

Здесь $y(\tau)$ — обобщенная координата, ϵ — коэффициент демпфирования, α, β — константы, $q(\tau)$ — обобщенная сила. Дифференцирование произведено по безразмерному параметру времени $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 — круговая частота малых собственных колебаний, t — время.

Найдем математическое ожидание m_y и дисперсию σ_y^2 выходного процесса, если $q(\tau)$ — стационарный нормальный процесс с математическим ожиданием m_q , дисперсией σ_q^2 и спектральной плотностью (θ — положительная неслучайная константа)

$$(1.2) \quad S_q(\omega) = \frac{\sigma_q^2 \theta}{\pi} \frac{1}{\theta^2 + \omega^2}$$

Используем метод спектральных представлений [8] в соединении с гипотезой «квазигауссовости» [9], которая принимает для моментных функций выходного процесса те же соотношения, что и для нормального. Введем разложения Фурье — Стильтьеса

$$(1.3) \quad y(\tau) = m_y + \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$q(\tau) = m_q + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

где спектры $V(\omega)$ и $Q(\omega)$ обладают свойством стохастической ортогональности

$$\langle Y(\omega)Y^*(\omega') \rangle = S_y(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

$$\langle Q(\omega)Q^*(\omega') \rangle = S_q(\omega)\delta(\omega - \omega')$$

Здесь и далее угловые скобки означают операцию осреднения по множеству реализаций, звездочки — переход к комплексно-сопряженной величине, $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака, $S_y(\omega)$ — спектральная плотность обобщенной координаты.

Подставляя (1.3) в (1.1), получим выражение типа

$$(1.4) \quad f(Y, Q, m_y, m_q, \dots) = 0$$

Осредним последнее с учетом квазигауссовости и стационарности процесса $y(\tau)$ и придем к зависимости

$$(1.5) \quad m_y - \alpha m_y^2 + \beta m_y^3 + (3\beta m_y - \alpha)\sigma_y^2 - m_q = 0$$

Применяя к (1.4) операцию свертывания случайных спектров [10], запишем

$$(1.6) \quad [(i\omega)^2 + 2\varepsilon(i\omega) + 1 - 2\alpha m_y + 3\beta m_y^2] Y(\omega) +$$

$$+ (m_y - \alpha m_y^2 + \beta m_y^3 - m_q) \delta(\omega) +$$

$$+ (3\beta m_y - \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega_1) Y(\omega - \omega_1) d\omega_1 +$$

$$+ \beta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega_1) Y(\omega_2) Y(\omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 - Q(\omega) = 0$$

Рассмотрим (1.6) и уравнение, комплексно-сопряженное с ним. Умножим их левые части соответственно на $Y^*(\omega')$ и $Q(\omega')$ и, осредняя результаты, получим

$$(1.7) \quad L_y(i\omega)S_y(\omega) - S_{qy}(\omega) = 0, \quad L_y(-i\omega)S_{qy}(\omega) - S_q(\omega) = 0$$

$$L_y(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\varepsilon(i\omega) + g, \quad g = 1 - 2\alpha m_y + 3\beta(m_y^2 + \sigma_y^2)$$

Здесь $S_{qy}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность процессов $q(\tau)$ и $y(\tau)$.

Из системы (1.7), учитывая (1.2), имеем

$$(1.8) \quad S_y(\omega) = \frac{\sigma_q^{2\theta}}{\pi} \frac{1}{L(i\omega)L(-i\omega)}$$

$$L(i\omega) = (i\omega)^3 + \mu(i\omega)^2 + \nu(i\omega) + g\theta$$

$$\mu = 2\varepsilon + \theta, \quad \nu = g + 2\varepsilon\theta$$

Интегрируя (1.8) по ω , получим второе соотношение между m_y и σ_y^2

$$(1.9) \quad 2\varepsilon\sigma_y^2 g (\mu\theta + g) - \mu\sigma_y^2 = 0$$

Уравнения (1.5) и (1.9) образуют относительно неизвестных m_y и σ_y^2 нелинейную алгебраическую систему, содержащую члены высоких степеней; выписать явные выражения для них не удастся. Анализ результатов с помощью ЭЦВМ обнаружил, что при некоторых соотношениях между параметрами системы решение является многозначным. Естественно предполагать, что некоторые из них соответствуют неустойчивым движениям; дальнейшая задача состоит в их определении.

2. Составим уравнение возмущенного движения в линейном приближении:

$$(2.1) \quad x'' + 2\varepsilon x' + (\gamma + \zeta y_0 + 3\beta y_0^2)x = 0$$

$$\gamma = 1 - 2\alpha m_y + 3\beta m_y^2, \quad \zeta = 2(3\beta m_y - \alpha)$$

Здесь $x(\tau)$ — вариации обобщенной координаты, имеющие стохастический смысл; случайный процесс $y(\tau)$ представлен в виде суммы математического ожидания m_y и центрированной составляющей $y_0(\tau)$: $y(\tau) = m_y + y_0(\tau)$.

Выражение (2.1) является стохастическим аналогом уравнений Матье — Хилла, в котором стационарный случайный процесс $y_0(\tau)$ со спектральной плотностью (1.8) играет роль функции возбуждения или внешнего параметрического воздействия. В этом случае рассматриваемая проблема имеет много общего с параметрическими резонансами в стохастических системах [9].

Далее стохастическая устойчивость будет отождествляться с устойчивостью по Ляпунову совокупности математических ожиданий и моментных функций второго порядка для компонентов марковского процесса. Чтобы поведение системы могло считаться марковским процессом, оно должно описываться дифференциальными уравнениями первого порядка, а воздействие должно быть дельта-коррелированным. Выражение (2.1) не удовлетворяет этим условиям, но путем введения достаточно обширной совокупности «координат» процесс возмущенного движения можно привести к марковскому типу.

Второму условию можно удовлетворить, рассматривая $y_0(\tau)$ как результат прохождения белого шума $z(\tau)$ с интенсивностью $s = 2\sigma_y^2\theta$ через фильтр

$$(2.2) \quad y_0''' + \mu y_0'' + \nu y_0' + g\theta y_0 = z$$

Первое условие выполняется, если от (2.1) и (2.2) перейти к следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(2.3) \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = -2\varepsilon x_2 - (\gamma + \zeta x_3 + 3\beta x_3^2)x_1$$

$$x_3' = x_4, \quad x_4' = x_5, \quad x_5' = -\mu x_5 - \nu x_4 - g\theta x_3 + z$$

Тогда имеем марковский векторный процесс $x(\tau)$ с компонентами

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = y_0, \quad x_4 = y_0', \quad x_5 = y_0''$$

Далее стохастическая устойчивость проверяется по детерминистической линейризованной системе

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{m}} &= A\mathbf{m} \\ \mathbf{m} &= \{m_1, m_2, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}, m_{22}, m_{23}, m_{24}, m_{25}\} \end{aligned}$$

где A — матрица постоянных коэффициентов, $\mathbf{m}(\tau)$ — вектор моментных функций первого и второго порядков с одиннадцатью компонентами, определяемыми в результате следующих осреднений:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} m_i(\tau) &= \langle x_i(\tau) \rangle, \quad m_{ij}(\tau) = \langle x_i(\tau) x_j(\tau) \rangle \\ i &= 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

Остальные моментные функции относятся только к стационарному процессу $y_0(\tau)$; поэтому в определении устойчивости они не участвуют. Выпишем те, которые необходимы для дальнейших выкладок

$$\begin{aligned} m_3 = m_4 = m_5 = m_{34} &= 0, \quad m_{33} = \sigma_y^2 \\ m_{35} &= \frac{\sigma_q^2 \theta}{g\theta - \mu\nu} \end{aligned}$$

Часть из них вычислена с помощью (1.8).

Используя (2.3), (2.5) и коммутативность операций дифференцирования и осреднения, можно составить все уравнения, входящие в систему (2.4)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{m}_i &= \langle \dot{x}_i \rangle, \quad \dot{m}_{ij} = \langle \dot{x}_i x_j \rangle + \langle x_i \dot{x}_j \rangle \\ i &= 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

Моментные функции третьего и четвертого порядков, содержащиеся в правых частях (2.6), исключаются из дальнейшего рассмотрения с помощью гипотезы квазигауссовости. После отбрасывания нелинейных членов матрица A принимает вид

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g & -2\varepsilon & 0 & 0 & -\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & -2\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g\theta & -\nu & -\mu & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2g & 0 & 0 & 0 & -4\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta\sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & -2\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & -2\varepsilon & 1 \\ -\eta & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & -g & 0 & -g\theta & -\nu & -2\varepsilon - \mu \end{vmatrix}$$

$$(\eta = \zeta m_{35}, \quad \zeta = 6\beta m_{35}, \quad g_1 = g + 6\beta\sigma_y^2)$$

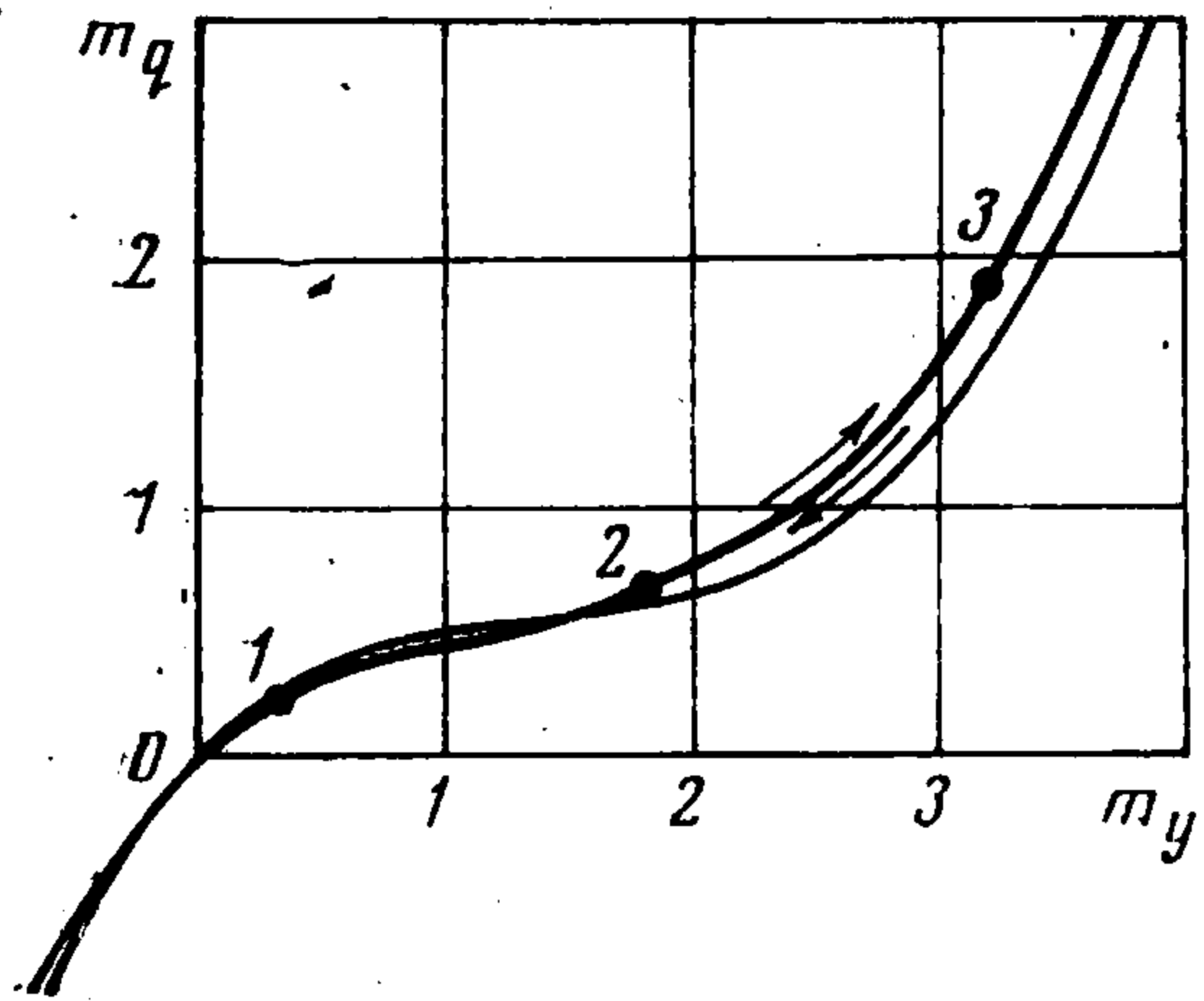
Далее анализ устойчивости сводится к отысканию корней характеристического уравнения

$$(2.7) \quad \det(A - \lambda E) = 0$$

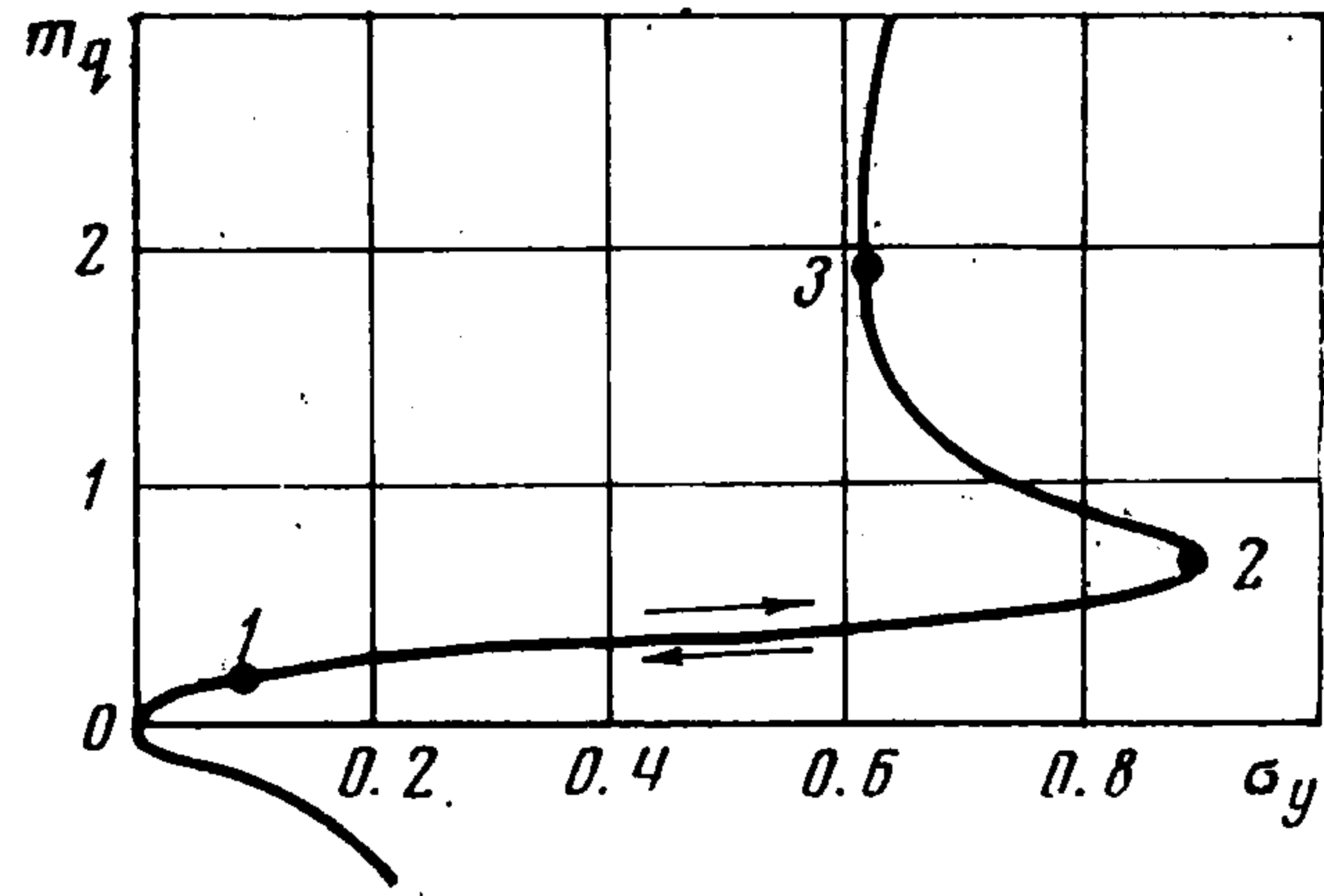
где λ — характеристический показатель, E — единичная матрица. Вследствие большого порядка матрицы A вывод аналитических выражений затруднителен. Анализ полученных результатов производился численными методами на ЭЦВМ.

3. При следующих фиксированных параметрах системы: $\theta = 0.02$, $\varepsilon = 0.01$, $\sigma_q / m_q = 0.4$ рассмотрены два случая коэффициентов нелинейности: 1) $\alpha = 0.652$, $\beta = 0.155$ (фиг. 1, 2), 2) $\alpha = 0.460$, $\beta = 0.055$ (фиг. 3, 4). Второй случай соответствует оболочке, имеющей одно неустойчивое и два устойчивых положения равновесия при статическом нагружении.

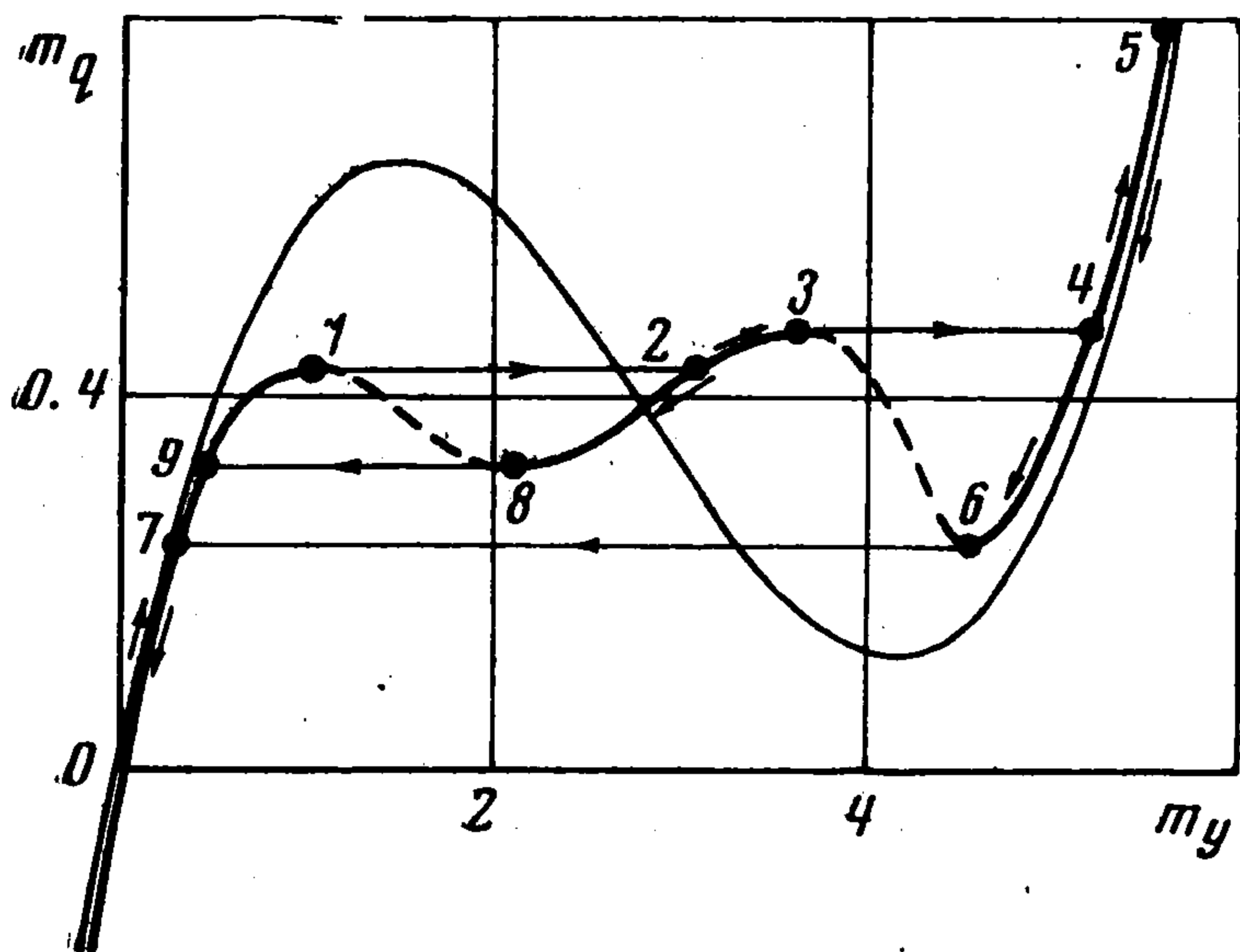
Вначале с помощью (1.5) и (1.9) построены графики $m_q - m_y$ (фиг. 1, 3) и $m_q - \sigma_y$ (фиг. 2, 4). Для сравнения на фиг. 1, 3 тонкой линией нанесены кривые статических прогибов $q - y$. Затем достаточно большое количество точек проверялось на



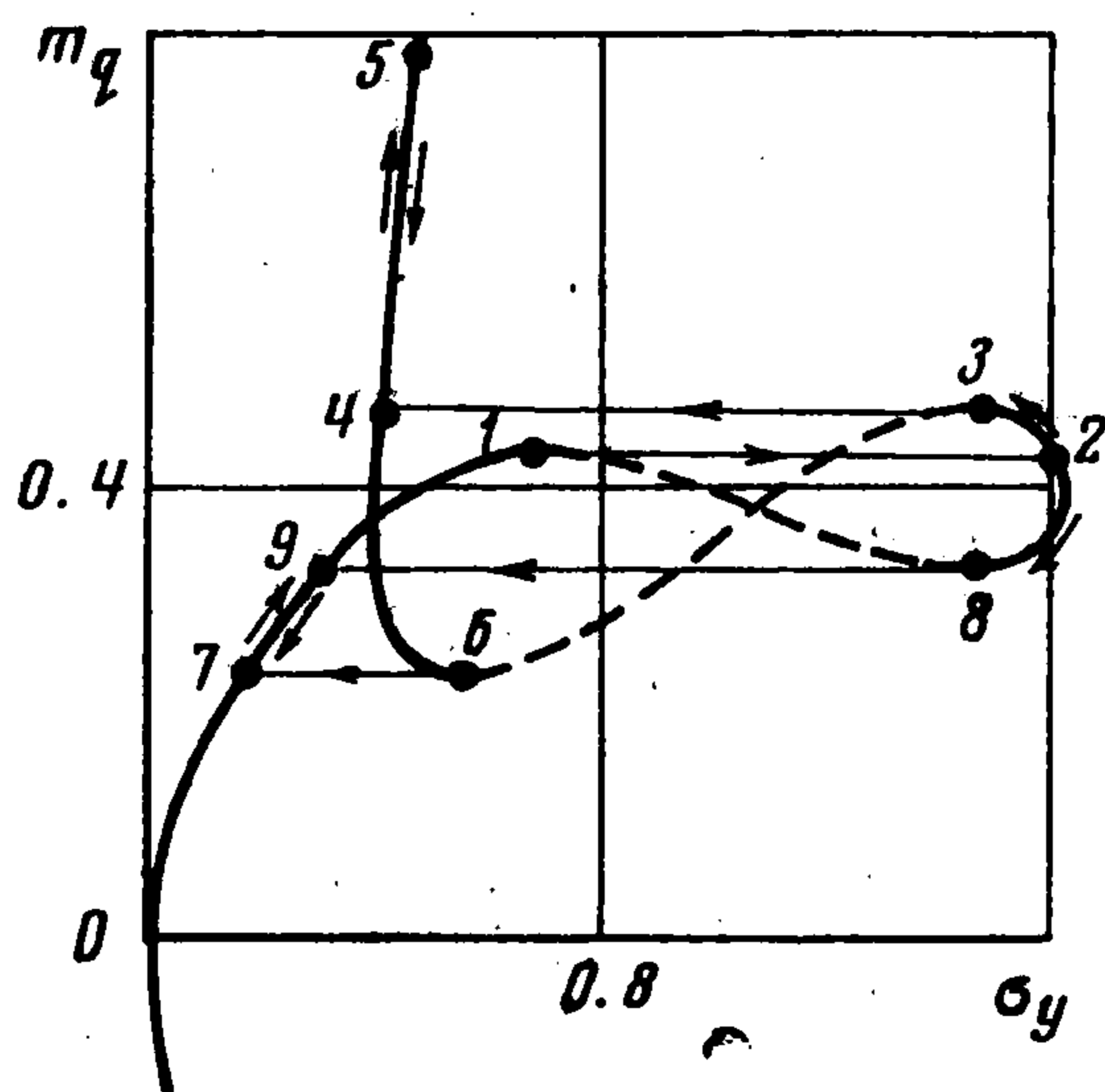
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

устойчивость по уравнению (2.7). Полученные корни во всех случаях удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова об устойчивости в первом приближении.

Для первой оболочки неустойчивость не обнаружена; для второй — ниспадающие участки кривых, отмеченные пунктиром, соответствуют неустойчивым движениям.

В первом случае математическое ожидание и стандарт смещений изменяются плавно при повышении и (или) понижении m_q . Проследим за поведением оболочки при росте средней нагрузки от нуля. Начальный участок 0—1, соответствующий сравнительно малым значениям m_q , m_y , σ_y , при достижении оболочкой наименьшей жесткости сменяется участком быстрого нарастания математического ожидания и стандарта смещений (1—2). Дальнейший рост нагрузки вызывает падение σ_y и замедление приращений m_y (2—3). За точкой 3 значения m_y и σ_y монотонно возрастают. При уменьшении m_q имеем смену состояний в обратной последовательности. При отрицательных m_q значения m_y и σ_y намного меньше из-за большей жесткости оболочки.

Во втором случае поведение системы — более сложное. В начальной период нагружения здесь наблюдаются колебания преимущественно около первого устойчивого равновесного положения (участок 0—1) с малыми значениями математического ожидания и стандарта смещений. В точке 1 это состояние скачкообразно сменяется коле-

баниями с охватом обоих устойчивых положений равновесия (участок 8—2—3). Значения m_y и σ_y резко возрастают. Дальнейшее повышение m_q приводит к перескоку 3—4, означающему переход к колебаниям преимущественно около прощелкнутого состояния; стандарт смещений сильно падает из-за возросшей жесткости. Уменьшение m_q на участке 3—2—8 приводит к обратной смене колебаний с охватом устойчивых равновесных положений на колебания около первого устойчивого положения (перескок 8—9); но это явление происходит при значительно меньших значениях m_q . Аналогичная картина наблюдается при уменьшении нагрузки на участке 5—4—6. Здесь колебания около прощелкнутого состояния скачком 6—7 сменяются на колебания около первого устойчивого положения.

Переходы от одних устойчивых стационарных режимов к другим, отмеченные на фиг. 3, 4 стрелками, наиболее вероятны при достаточно медленных изменениях m_q . Иные варианты вследствие случайной природы нагрузки не исключаются, но они, очевидно, будут менее вероятными.

Поступила 2.I. 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука» 1972.
2. Мишенков Г. В. О вынужденных нелинейных колебаниях упругих панелей. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 4.
3. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 3.
4. Кильдибеков И. Г. Исследование нелинейных колебаний пластинок. В сб.: Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.
5. Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г. Вероятностные характеристики поведения цилиндрической оболочки при действии акустической нагрузки. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 3.
6. Вольмир А. С., Даниленко А. Ф. Нелинейные колебания пологой цилиндрической панели под действием порывов ветра. Строительная механика и расчет сооружений, 1972, № 2.
7. Диментберг М. Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 5.
8. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
9. Болотин В. В., Москвин В. Г. О параметрических резонансах в стохастических системах. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 4.
10. Макаров Б. П. Послекритические деформации неидеальных сферических оболочек. В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, Литовск. н.-и. ин-т научн.-техн. информации и техн.-экон. исследований, 1971.