

НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Н. В. Валишвили

(Кутаиси)

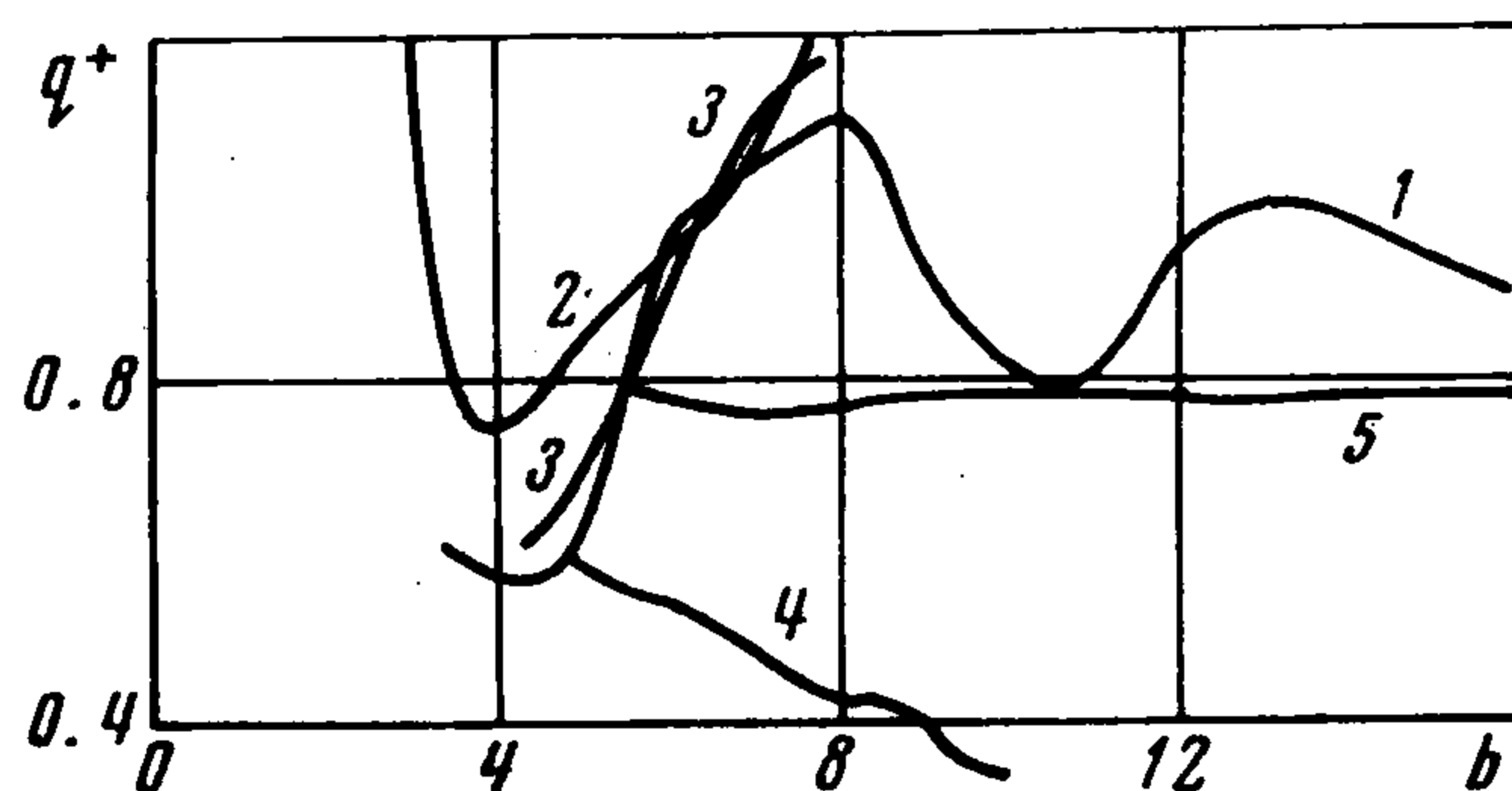
Исследуются вопросы перехода осесимметричных форм равновесия в неосесимметричные для пологих оболочек вращения. Анализируются разные варианты метода прогонки применительно к рассматриваемым задачам. В качестве примера приводятся результаты расчетов для сферических и конических оболочек.

Исследование неосесимметричной задачи устойчивости пологих сферических оболочек с жестко защемленным опорным контуром, нагруженных внешним гидростатическим давлением, начато в [1] с использованием метода Бубнова — Галеркина. В дальнейшем аналогичные исследования энергетическими методами проведены в [2,3]¹. Соответствующие результаты зависимости критических нагрузок q^+ от параметра пологости b представлены на фиг. 1 кривыми 2 и 3. Кривая 1 определяет параметр критической нагрузки, полученный решением осесимметричной задачи.

Первое исследование задачи численным методом проведено в [4]. В отличие от [1-3] считалось, что в начальной стадии форма оболочки осесимметрична, а при достижении нагрузкой некоторого предельного уровня нарушается условие единственности, и наряду с осесимметричными появляются неосесимметричные формы равновесия. Полученные результаты представлены на фиг. 1 кривой 4.

В дальнейшем аналогичные исследования проведены в [5] методом конечных разностей (кривая 5). При этом для определения основного напряженного состояния использован итерационный алгоритм [6]. Несмотря на одинаковые постановки задачи и эквивалентность разрешающих уравнений, окончательные результаты [4,5] существенно различаются. Не согласуются они и с результатами [2,3]. В дальнейшем аналогичные исследования проведены на основе другого численного алгоритма в [7]. Результаты [5,7] согласуются с точностью 6% при малых значениях b , которые и рассмотрены в [7].

Исследование оболочек с разными условиями крепления опорного контура проводилось в [8]. Осесимметричная задача решалась на основе численного алгоритма, предусматривающего сведение нелинейной краевой задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений [9]. Уравнения, определяющие неосесимметричные решения, интегрировались численно методом начальных параметров. Значения критических нагрузок для оболочек с жестко защемленным опорным контуром, полученные в [5,8], не совпадают. Разница в результатах решения неосесимметричных задач, не превышающая 2—3%, объясняется различными значениями коэффициента Пуассона. Более существенная разница в значениях критических нагрузок q^+ для неосесимметричных задач, что в первую очередь относится к оболочкам с большими значениями параметра b . Так, например, при $b = 11$ она достигает 4.2%. Это объясняется тем, что при боль-

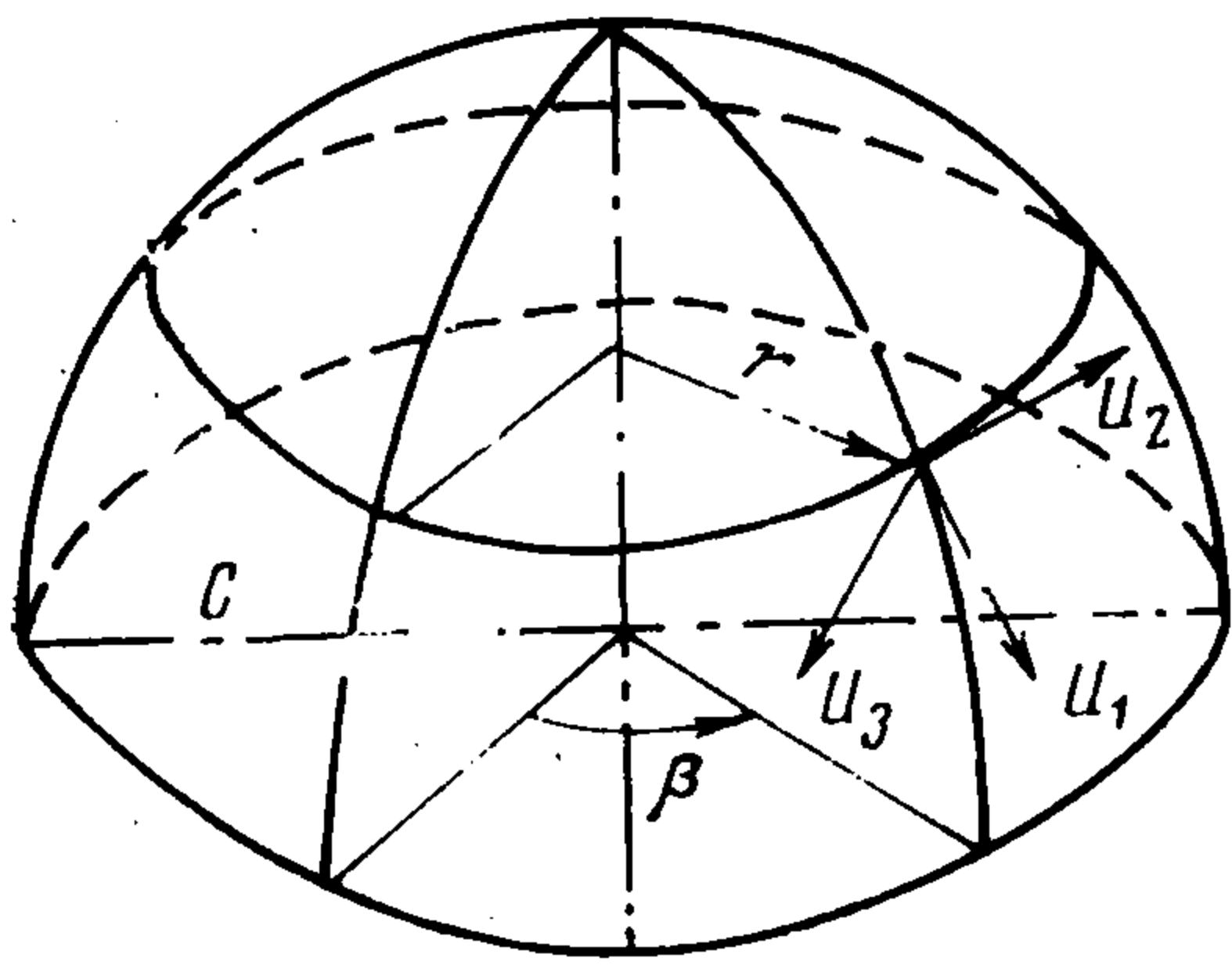


Фиг. 1

¹ Ссылки на [3,4] и их результаты заимствованы из [5].

ших b алгоритм [5] не позволяет точно определять положение предельных точек. Поэтому в указанной работе при $b \geq 9$ значения критической нагрузки приводились с точностью до первых двух значащих цифр. Аналогичные трудности характерны для многих существующих алгоритмов. Например, в [10] при $b \geq b_0$ сходящие процессы построить не удалось. Предельное значение b_0 существенно зависит от характера крепления опорного контура. Алгоритм [9] не имеет такого недостатка.

Исследование неосесимметричных задач представляет интерес именно для оболочек с большими значениями b . Для таких оболочек решение осесимметричных задач, результаты которых непосредственно используются при рассмотрении неосесимметричных задач, связано со значительными трудностями. Ниже они преодолеваются использованием алгоритма [9] в сочетании с приемом деления отрезка интегрирования на промежуточные отрезки [10]. Трудности, связанные с быстрым возрастанием решений для неосесимметричных задач, преодолеваются применением разных методов прогонки [11-15].



Фиг. 2

Деформации и изменения кривизн выражаются через компоненты вектора перемещения u (см. фиг. 2) с помощью известных соотношений [14]

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_3}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial r} \right)^2, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{r \partial \beta} + \frac{u_1}{r} - \frac{u_3}{R_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{r \partial \beta} \right)^2 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{r \partial \beta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_2}{r} \right) + \frac{\partial u_3}{r \partial \beta} \frac{\partial u_3}{\partial r}, & H_{11} &= - \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} \\ H_{22} &= - \frac{\partial^2 u_3}{r^2 \partial \beta^2} - \frac{\partial u_3}{r \partial r}, & H_{12} &= \frac{\partial u_3}{r^2 \partial \beta} - \frac{\partial^2 u_3}{r \partial r \partial \beta} \end{aligned}$$

Из общих положений теории оболочек и линейных соотношений упругости следуют выражения для усилий и моментов

$$(2) \quad \begin{aligned} N_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}) - \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\beta_1 + \nu_2 \beta_2), & N_{12} &= Gh \varepsilon_{12} \\ N_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}) - \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\beta_2 + \nu_1 \beta_1), & M_{12} &= \frac{Gh^3}{6} H_{12} \\ M_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)} (H_{11} + \nu_2 H_{22}) - \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\gamma_1 + \nu_2 \gamma_2) \\ M_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12 (1 - \nu_1 \nu_2)} (H_{22} + \nu_1 H_{11}) - \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\gamma_2 + \nu_1 \gamma_1) \\ \beta_i &= \alpha_i \int_{-h/2}^{h/2} t dz, & \gamma_i &= \alpha_i \int_{-h/2}^{h/2} t z dz \end{aligned}$$

Запишем уравнения равновесия, пренебрегая в первых двух из них, как обычно, для пологих оболочек поперечными силами [14]

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial (rN_{11})}{r\partial r} + \frac{\partial N_{12}}{r\partial\beta} - \frac{N_{22}}{r} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} &= 0 \\ \frac{\partial N_{22}}{r\partial\beta} + \frac{\partial (rN_{12})}{r\partial r} + \frac{N_{12}}{r} - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2} &= 0 \\ \frac{\partial (rQ_1)}{r\partial r} + \frac{\partial Q_2}{r\partial\beta} + \left(\frac{1}{R_1} - H_{11}\right) N_{11} + \left(\frac{1}{R_2} - H_{22}\right) N_{22} - \\ - 2H_{12}N_{12} + q - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2} &= 0 \\ \frac{\partial (rM_{11})}{r\partial r} + \frac{\partial M_{12}}{r\partial\beta} - \frac{M_{22}}{r} - Q_1 &= 0, \quad \frac{\partial (rM_{12})}{r\partial r} + \frac{\partial M_{22}}{r\partial\beta} + \frac{M_{12}}{r} - Q_2 = 0 \end{aligned}$$

Введем следующие расчетные параметры:

$$(4) \quad \begin{aligned} M_{ij}^* &= \eta \frac{M_{ij}R_0}{E_0h_0}, \quad N_{ij}^* = \sqrt{\eta} \frac{N_{ij}R_0}{E_0h_0^2}, \quad u_i^* = \eta^{3/4} \sqrt{\frac{R_0}{h_0}} \frac{u_i}{h_0}, \\ u_3^* &= \sqrt{\eta} \frac{u_3}{h_0} \\ Q_i^* &= \eta^{3/4} \sqrt{\frac{h_0}{R_0}} \frac{Q_i R_0^2}{E_0h_0^3}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \sqrt{\eta} \frac{R_0}{h_0} \varepsilon_{ij}, \quad H_{ij}^* = R_0 H_{ij}, \quad r^* = b \frac{r}{c} \\ q^* &= \frac{\sqrt{\eta}}{4} \frac{q}{E_0} \left(\frac{R_0}{h_0}\right)^2, \quad \tau^* = \sqrt{\frac{E_0g}{\gamma R_0^2}} \tau, \quad \lambda_i = \frac{R_0}{R_i}, \quad b = \sqrt[4]{\eta} \frac{C}{\sqrt{R_0h_0}} \\ \beta_i^* &= \sqrt{\eta} \frac{R_0}{hh_0} \beta_i, \quad \gamma_i^* = 12 \frac{R_0}{h^3} \gamma_i, \quad a_{i1} = \frac{E_i h}{E_0h_0} \\ a_{i3} &= \frac{E_i h^3}{E_0h_0^3}, \quad a_1 = \frac{Gh}{E_0h_0}, \quad a_3 = \frac{Gh^3}{E_0h_0^3} \\ \eta &= 12(1 - \nu_1\nu_2) \end{aligned}$$

где E_0, h_0 — характерные модуль упругости и толщина, R_0 — радиус кривизны у опорного контура в окружном направлении, c — радиус опорного контура. В дальнейшем звездочку в обозначениях опускаем.

Преобразуем (1) — (3) с учетом (4). В результате получим

$$(5) \quad \begin{aligned} \left(\frac{u_1}{r}\right)' &= -\frac{1+\nu_2}{r} \frac{u_1}{r} - \frac{\nu_2}{r} \left(\frac{u_2}{r}\right)' + \frac{\lambda_1 + \nu_2\lambda_2}{r} u_3 - \\ - \frac{\theta^2}{2r} + \frac{1-\nu_1\nu_2}{ra_{11}} N_{11} - \frac{\nu_2}{2r^3} u_3^{\cdot\cdot 2} + \frac{\beta_1 + \nu_2\beta_2}{r} \\ \left(\frac{u_2}{r}\right)' &= -\frac{1}{r} \left(\frac{u_1}{r}\right)' - \frac{\theta}{r^2} u_3^{\cdot} + \frac{N_{12}}{a_{1r}} \\ \theta' &= -\frac{\nu_2}{r^2} u_3^{\cdot\cdot} - \frac{\nu_2}{r} \theta - \frac{M_{11}}{[a_{23}]} - (\gamma_1 + \nu_2\gamma_2), \quad u_3' = \theta \\ N_{11}' &= \frac{a_{21}}{r} \frac{u_1}{r} + \frac{a_{21}}{r} \left(\frac{u_2}{r}\right)' - \frac{a_{21}\lambda_2}{r} u_3 - \frac{1-\nu_2}{r} N_{11} - \\ - \frac{N_{12}}{r} + \frac{a_{21}u_3^{\cdot 2}}{2r^3} - \frac{a_{21}\beta_2}{r} - \frac{h}{\sqrt[4]{\eta}R_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} \\ N_{12}' &= -\frac{a_{21}}{r} \left(\frac{u_1}{r}\right)' + \frac{a_{21}\lambda_2}{r} u_3^{\cdot} - \\ - \frac{a_{21}}{r^2} u_3^{\cdot} u_3^{\cdot\cdot} - \frac{\nu_2}{r} N_{11}^{\cdot} - \frac{2}{r} N_{12} + \frac{h}{\sqrt[4]{\eta}R_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S' = & -\frac{S}{r} - \frac{\nu_2}{r^2} M_{22}'' + \frac{1-\nu_1\nu_2}{r^4} (a_{23}u_3'''' - 4a_3u_3'') + \\
& + \frac{1-\nu_1\nu_2}{r^3} (a_{23} + 4a_3)\theta'' - \left(\lambda_1 - \frac{\nu_2}{r^2} u_3'' - \right. \\
& - \frac{\nu_2}{r} \theta - \frac{M_{11}}{a_{13}} - \gamma_1 - \nu_2\gamma_2 \Big) N_{11} - \left(\lambda_2 + \frac{u_3''}{r^2} + \frac{\theta}{r} \right) \times \\
& \times \left[\nu_2 N_{11} + a_{21} \left(\frac{u_2}{r} \right)' + a_{21} \frac{u_1}{r} - a_{21}\lambda_2 u_3 + \frac{a_{21}}{2r^2} u_3'^2 \right] + \\
& + \frac{h}{n_0} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - 4q, \quad M_1' = \frac{1-\nu_1\nu_2}{r^2} (4a_3\theta'' - a_{23}\theta) - \frac{M_{11}}{r} - \\
& - \frac{1-\nu_1\nu_2}{r^3} (a_{23} + 4a_3) u_3'' - \frac{1-\nu_1\nu_2}{r} a_{23}\gamma_2, \quad S = Q_1 + \frac{M_{12}}{r}
\end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначена производная по r , точкой — производная по β .

Начальному невозмущенному состоянию оболочки соответствует осесимметричная форма равновесия. Функции, определяющие ее, зависят только от r , обозначаются нулевым индексом и определяются решением системы (5), которую целесообразно привести к виду

$$\begin{aligned}
(6) \quad \varepsilon_{22}' &= -\frac{1+\nu_2}{r} \varepsilon_{22}^\circ - \left(\lambda_2 + \frac{\theta^\circ}{2r} \right) \theta^\circ + \frac{1-\nu_1\nu_2}{a_{11}r} N_{11}^\circ + \frac{\beta_1 + \nu_2\beta_2}{r} \\
N_{11}' &= \frac{a_{21}}{r} \varepsilon_{22}^\circ - \frac{1-\nu_2}{r} N_{11}^\circ - \frac{a_{21}}{r} \beta_2, \quad \theta' = -\frac{\nu_2}{r} \theta^\circ - \frac{M_{11}^\circ}{a_{23}} - \\
& - \gamma_1 - \nu_2\gamma_2 \\
M_{11}' &= -\frac{1-\nu_1\nu_2}{r^2} a_{23}\theta^\circ + Q_1^\circ - \frac{1-\nu_1\nu_2}{r} a_{23}\gamma_2 \\
Q_1^\circ &= -r \left(\lambda_2 + \frac{\theta_0}{r} \right) N_{11}^\circ - \frac{4}{r} \int_0^r q r dr + \frac{A_0}{r}
\end{aligned}$$

Постоянная A_0 определяется из условия равновесия центральной части оболочки. В частности, при внешнем гидростатическом давлении $q = \text{const}$

$$Q_1^\circ = -r \left(\lambda_2 + \frac{\theta^\circ}{r} \right) N_{11}^\circ - 2qr$$

Возмущенное состояние, характеризуемое малыми отклонениями от начальной равновесной формы, представим в виде

$$\begin{aligned}
(7) \quad \frac{u_1}{r} &= \frac{u_1^\circ}{r} + x_1, \quad \frac{u_2}{r} = x_2, \quad u_3 = u_3^\circ + x_3, \quad \theta = \theta^\circ + x_4 \\
N_{11} &= N_{11}^\circ + x_5, \quad N_{12} = x_6, \quad S = Q_1^\circ + x_7, \quad M_{11} = M_{11}^\circ + x_8
\end{aligned}$$

Подстановка (7) в систему (5) и ее линеаризация с учетом малости x_s приводит к системе уравнений, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
x_s &= \sum_{k=0}^{\infty} x_s^k e^{i\omega k \tau} \sin k\beta \quad (s \neq 2,6) \\
x_s &= \sum_{k=0}^{\infty} x_s^k e^{i\omega k \tau} \cos k\beta \quad (s = 2,6)
\end{aligned}$$

В результате преобразований для каждого номера k (индекс в обозначениях опускаем) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 (8) \quad x_1' &= -\frac{1+v_2}{r} x_1 + \frac{v_2 k}{r} x_2 + \frac{\lambda_1 + v_2 \lambda_2}{r} x_3 - \frac{\theta^\circ}{r} x_4 + \frac{1-v_1 v_2}{a_{11} r} x_5 \\
 x_2' &= -\frac{k}{r} x_1 - \frac{k \theta^\circ}{r^2} x_3 + \frac{x_6}{r a_1}, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = \frac{k^2 v_2}{r^2} x_3 - \\
 &\quad - \frac{v_2}{r} x_4 - \frac{x_8}{a_{23}} \\
 x_5' &= \frac{a_{21}}{r} x_1 - \frac{k a_{21}}{r} x_2 - \frac{a_{21} \lambda_2}{r} x_3 - \frac{1-v_2}{r} x_5 + \frac{k}{r} x_6 - \frac{h r \omega_k^2}{\sqrt[4]{\eta R_0}} x_1 \\
 x_6' &= -\frac{a_{21} k}{r} x_1 + \frac{a_{21} k^2}{r} x_2 + \frac{\lambda_2 a_{21} k}{r} x_3 - \frac{v_2 k}{r} x_5 - \frac{2}{r} x_6 - \frac{h r \omega_k^2 k}{\sqrt[4]{\eta R_0}} x_2 \\
 x_7' &= -a_{21} \left(\lambda_2 + \frac{\theta^\circ}{r} \right) x_1 + a_{21} k \left(\lambda_2 + \frac{\theta^\circ}{r} \right) x_2 + \\
 &\quad + \left[\frac{1-v_1 v_2}{r^3} (k^2 a_{23} + 4a_3) k^2 + a_{21} \lambda_2 \left(\lambda_2 + \frac{\theta^\circ}{r} \right) + \right. \\
 &\quad + \left. \frac{a_{21} k^2 \varepsilon_2^0}{r^2} - \frac{h}{h_0} \omega_k^2 \right] x_3 - \left[\frac{1-v_1 v_2}{r^3} (a_{23} + 4a_3) k^2 + \right. \\
 &\quad + \left. \frac{a_{23} \varepsilon_2^0}{r} \right] x_4 + \left(\frac{M_{11}}{a_{13}} - \lambda_1 - v_2 \lambda_2 + \gamma_1 + v_2 \gamma_2 \right) x_5 - \frac{x_7}{r} + \\
 &\quad + \left(\frac{N_{11}^\circ}{a_{13}} + \frac{v_2 k^2}{r^2} \right) x_8 \\
 x_8' &= \frac{1-v_1 v_2}{r^3} (a_{23} + 4a_3) k^2 x_3 - \frac{1-v_1 v_2}{r^2} \times \\
 &\quad \times (a_{23} + 4k^2 a_3) x_4 + x_7 - \frac{1-v_2}{r} x_8
 \end{aligned}$$

Особо следует рассмотреть два исключительных случая. При $k = 0$ будет $x_2 = x_6 = 0$. Если учитываются только нормальные составляющие сил инерции, то при $k = 1$ будет $x_6 = -x_5$. Если силы инерции вообще не учитываются, например, решается задача устойчивости в статической постановке, то при $k = 1$ седьмое уравнение системы можно привести к виду

$$(9) \quad x_7 = -\frac{N_{11}^\circ}{r} x_3 - N_{11}^\circ x_4 - r \left(\lambda_2 + \frac{\theta^\circ}{r} \right) x_5 + \frac{x_8}{r}$$

В отмеченных случаях порядок системы снижается. В общем случае ($k \geq 2$) система (8) может быть записана в виде

$$(10) \quad X' = AX$$

где X — вектор-столбец с координатами x_s , A — квадратная матрица размерности 8×8 .

Задача о переходе осесимметричных форм равновесия в неосесимметричные заключается в определении матрицы A , для которой система (10) наряду с тривиальным имеет нетривиальное решение. Сама матрица зависит от параметра нагрузки, температуры и частоты. Таким образом, по существу, решается задача определения собственных чисел и собственных векторов линейного дифференциального оператора (10).

При проведении исследований предварительно решаем нелинейную краевую задачу для системы (6) с помощью алгоритма [9]. Для оболочек

с большими значениями параметра b возникают трудности из-за наличия возрастающих решений. Поэтому алгоритм используется в сочетании с приемом деления отрезка интегрирования на промежуточные отрезки.

При численной реализации алгоритма отрезок интегрирования $[\Delta, b]$ делили на четыре части. При этом использовались условия непрерывности разрешающих функций в точках деления и краевые условия. В результате нелинейная краевая задача сводилась к системе 14 нелинейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных. Полученные результаты использовались при параллельном интегрировании системы (6) и (10) для установления критических значений параметров.

Рассмотрим различные методы интегрирования системы (10) применительно к замкнутым в вершине оболочкам. Для незамкнутых оболочек методика изменяется несущественно из-за других начальных условий.

Интегрирование (10) можно осуществить методом начальных параметров. Для этого вектор X и матрицу A представим в виде

$$(11) \quad X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Bmatrix}$$

Здесь X_1 — вектор перемещений, X_2 — вектор усилий, A_{ij} — матрицы размерности 4×4 .

При $r = 0$ имеется особенность, поэтому интегрирование системы (10) осуществляем из точки, близкой к вершине $r = \Delta$. В окрестности $r \in [0, \Delta]$ имеем $X_1 \approx 0$. Поэтому четыре линейно-независимых решения системы получаем, взяв следующие начальные значения векторов:

$$(12) \quad X_1^n(\Delta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad X_2^1(\Delta) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad X_2^2(\Delta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad X_2^3(\Delta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$X_2^4(\Delta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

Общее решение системы

$$X = \sum_{n=1}^4 C_n X^n$$

Из условия крепления опорного контура при $r = b$ получим четыре линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_n , которые для оболочки с жестко заземленным опорным контуром имеют вид

$$(13) \quad \sum_{n=1}^4 C_n X_1^n(b) = 0$$

Система (12) имеет нетривиальное решение, если выполняется условие

$$|X_1^1(b) \quad X_1^2(b) \quad X_1^3(b) \quad X_1^4(b)| = 0$$

Это условие определяет критические значения нагрузки, температуры или частоту собственных колебаний системы для оболочки с жестко за-

щемленным опорным контуром. При других видах крепления контура условие формулируется аналогично.

Таким образом, удастся получить решение задач для сферических и конических оболочек при $b \leq 10 \div 12$ и $k \leq 10 \div 12$. При больших b в процессе интегрирования возникают трудности из-за наличия возрастающих решений и, что еще серьезнее, из-за того, что векторы X^n в процессе интегрирования становятся почти линейно-зависимыми. Эти трудности преодолеваются разбиением отрезка интегрирования на m промежуточных отрезков, ортонормированием полученных векторов в этих точках и использованием результатов в качестве начальных для продолжения интегрирования на последующем участке [11].

С увеличением b и k резко возрастает m . Так, при $b = 18$ и $k = 13 \div 18$ достаточно взять $m = 5 \div 10$, в то время как при $b = 42$ и $k = 35 \div 50$ будет $m = 160 \div 320$. При чрезмерном увеличении m имеется опасность потери точности. Поэтому необходима проверка результатов другими методами.

В силу линейности задачи для векторов усилий и перемещений выполняется условие (звездочка означает транспонирование)

$$(14) \quad B^* X = 0$$

Здесь B^* — прямоугольная матрица размерности 8×4 . Для транспонированной матрицы B дифференциальное уравнение имеет вид [13]

$$(15) \quad B' = B (B^* B)^{-1} B^* A^* B - A^* B$$

Можно доказать, что

$$(16) \quad B^* B = \text{const}$$

Условие (16) свидетельствует о целесообразности интегрирования (15) вместо исходной системы (10).

Для замкнутых в вершине оболочек в силу (12) имеем

$$(17) \quad B^* (\Delta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Если принять во внимание (16) и (17), то уравнение (15) запишется в виде

$$(18) \quad B' = B B^* A^* B - A^* B$$

Таким образом, для матричного уравнения (18) имеем начальное условие (17). Для формулировки условий на опорном контуре представим матрицу B^* в виде

$$B^* = (B_1^* B_2^*)$$

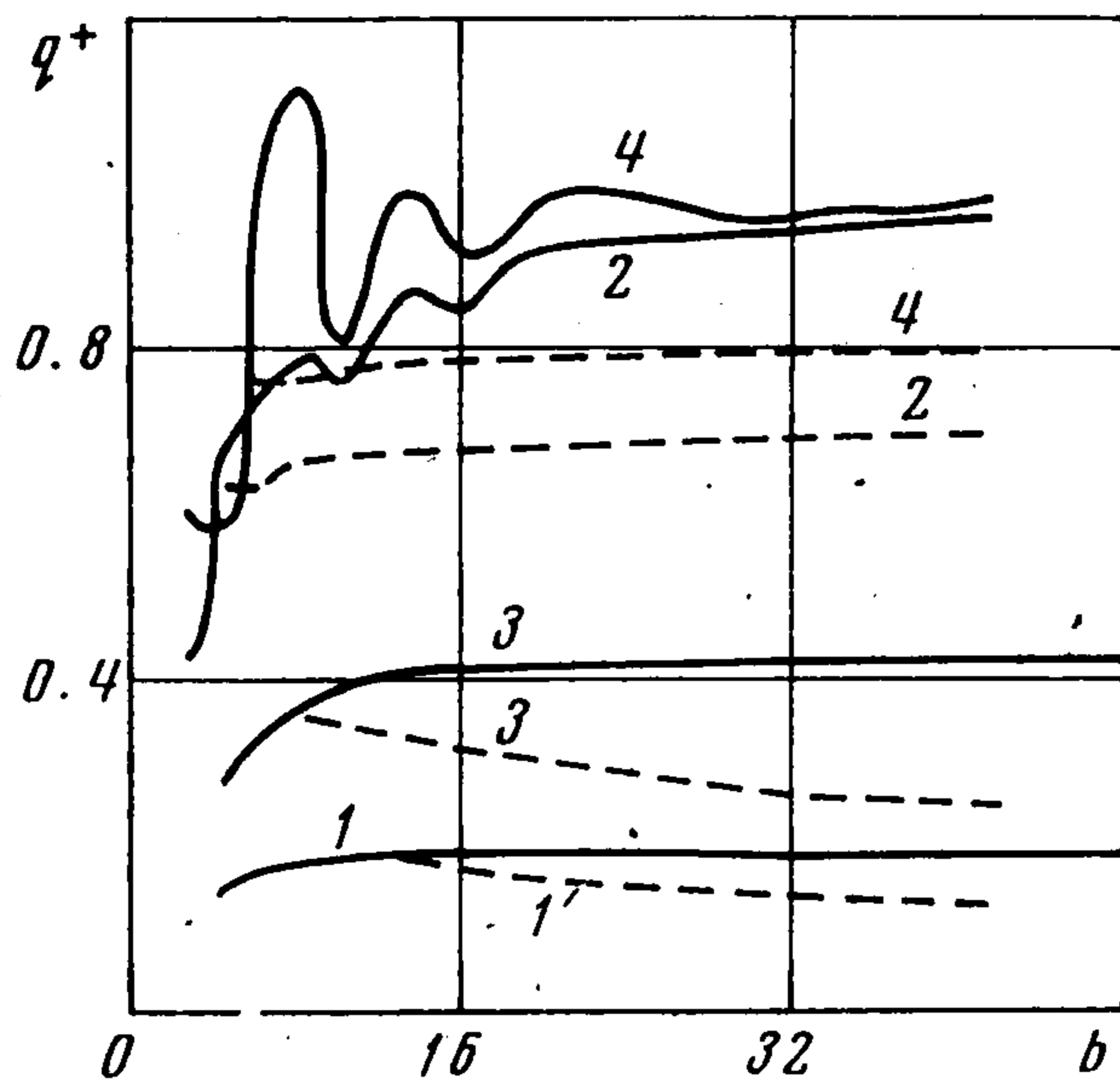
где B_1^* и B_2^* — квадратные матрицы размерности 4×4 . Из соотношений (11) и (14) следует

$$B_1^* X_1 + B_2^* X_2 = 0$$

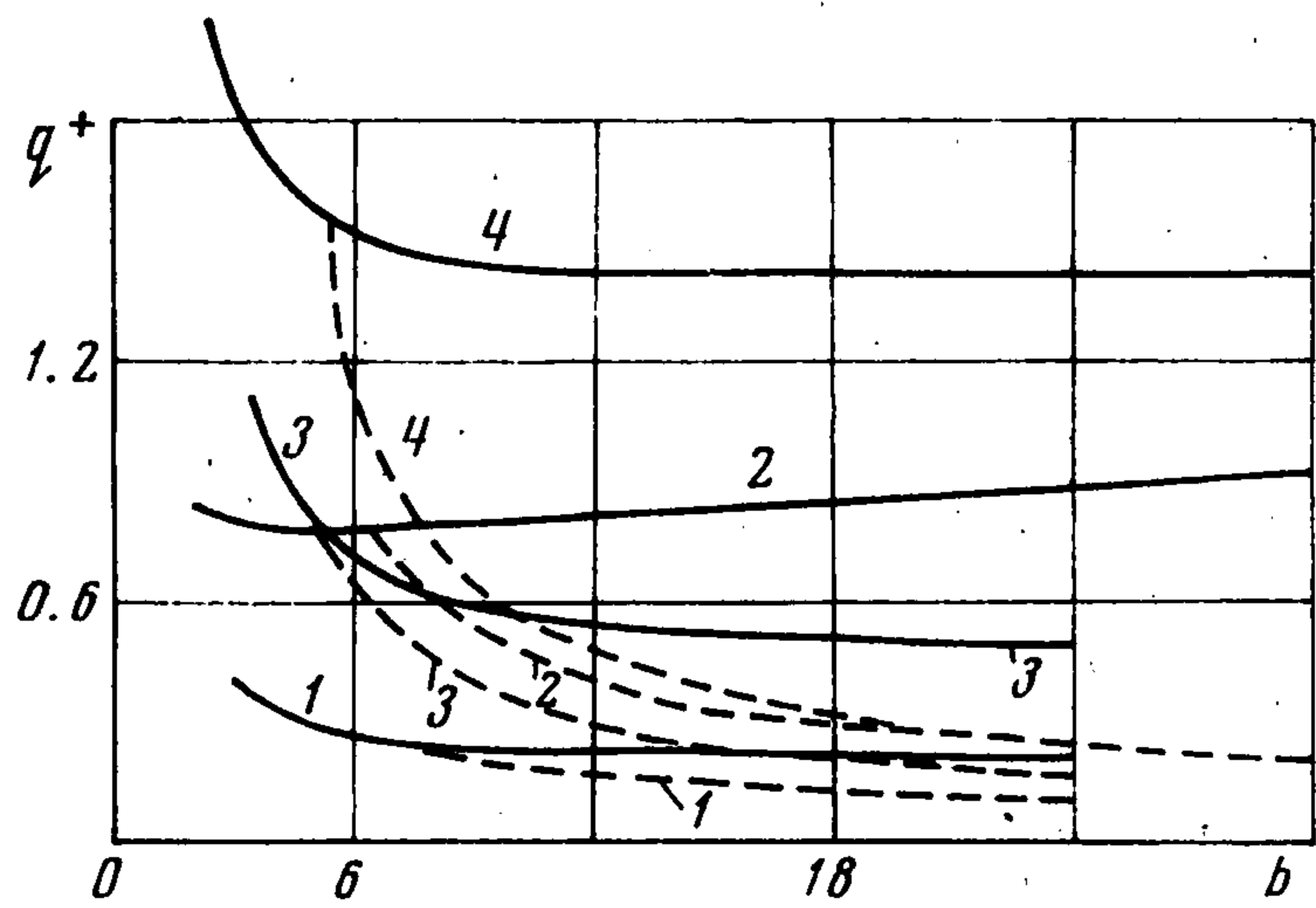
Для оболочек с жестко защемленным контуром условие существования нетривиального решения запишется в виде $B_2^* (b) = 0$. Аналогичный вид имеют условия и при других характерах крепления контура (трудности при реализации алгоритма не возникают).

Вопрос о нахождении собственных векторов, соответствующих найденным собственным числам, оператора (10) решается просто и поэтому не обсуждается.

Рассмотрена задача о переходе осесимметричных форм равновесия в неосесимметричные для изотропных сферических и конических оболочек



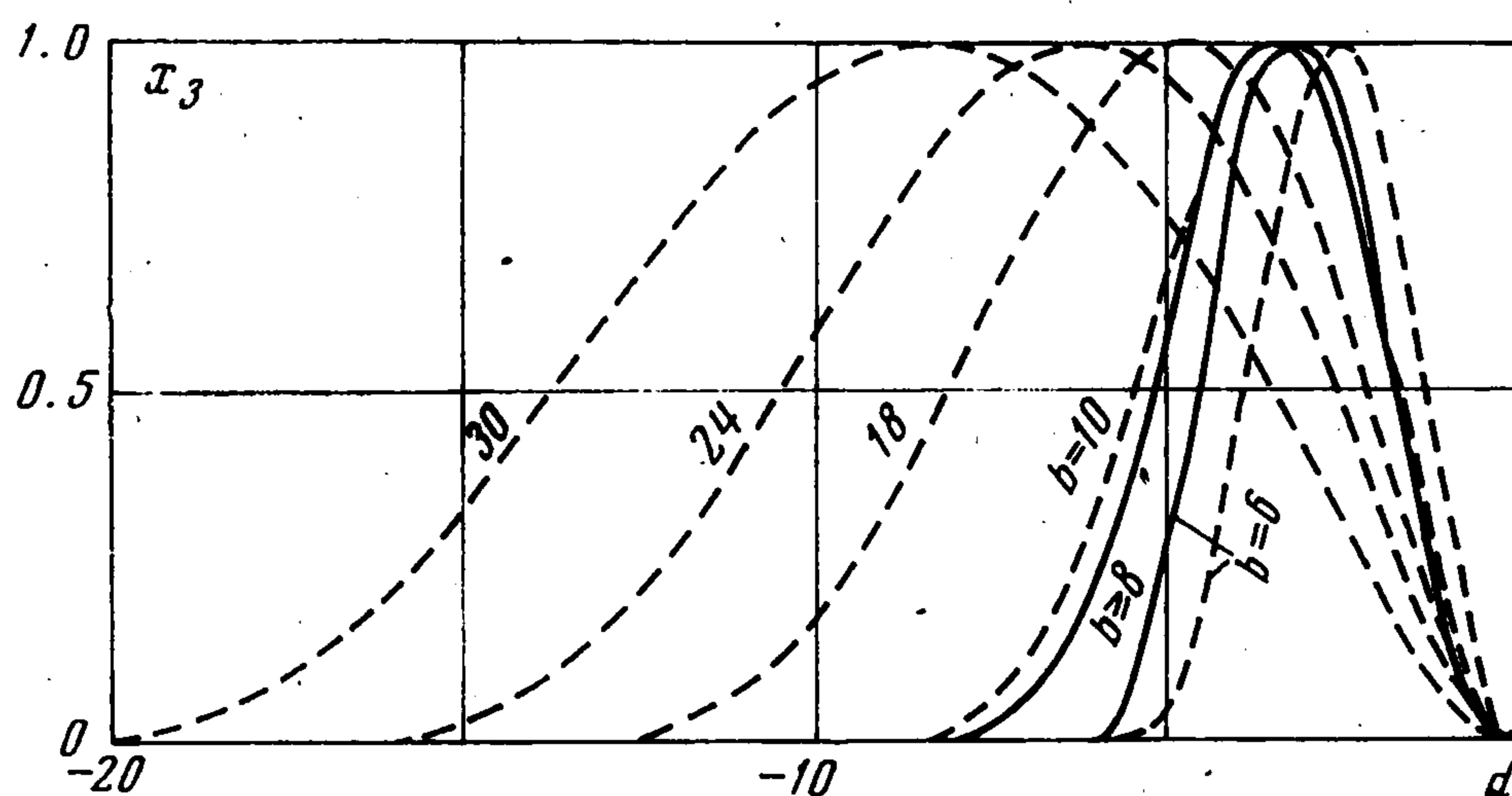
Фиг. 3



Фиг. 4

постоянной толщины при действии внешнего давления постоянной интенсивности. Графики зависимости параметра критической нагрузки q^+ от параметра пологости b представлены на фиг. 3 для сферических и на фиг. 4 для конических оболочек. Сплошные линии построены по результатам решения осесимметричной задачи, а пунктирные линии определяют значение минимальной критической нагрузки, соответствующей переходу осесимметричных форм равновесия в неосесимметричные. Для оболочек с разными условиями крепления опорного контура принята нумерация: шарнирно подвижная — задача 1, шарнирно неподвижная — задача 2, подвижная защемленная — задача 3, жестко защемленная — задача 4. Численные значения q^+ для сферических оболочек приводятся в таблице.

b	Номер задачи							
	1		2		3		4	
	k	$q^+ \cdot 10^3$	k	$q^+ \cdot 10^3$	k	$q^+ \cdot 10^3$	k	$q^+ \cdot 10^3$
4	0	137	0	663	0	—	0	564
6	0	165	0	743	0	311	0	972
6			2	651			2	764
6			3	631			3	819
6			4	675			4	920
10	0	179	0	752	0	386	0	811
10			5	676	3	344	4	804
10			6	660	4	338	5	768
10			7	672	5	351	6	772
18	0	187	0	898	0	413	0	920
18	6	165	11	687	8	301	11	791
18	7	163	12	681	9	301	12	785
18	8	164	13	682	10	302	13	786
30	0	192	0	940	0	425	0	951
30	11	143	22	691	14	261	21	794
30	12	143	23	691	15	261	22	793
30	13	144	24	693	16	263	23	793
42	0	193	0	958	0	430	0	968
42	15	127	29	797	16	244	30	803
42	16	127	30	695	17	241	31	798
42	17	129			18	241	32	798



Фиг. 5

При малых значениях параметра пологости, $b < b_0$, вплоть до потери устойчивости, реализуются осесимметричные формы равновесия. Однако при $b \geq b_0$ осесимметричные формы равновесия не являются единственными и возможны неосесимметричные формы. Предельное значение параметра $b = b_0$ зависит от геометрии срединной поверхности и характера крепления опорного контура оболочки. Это нетрудно понять, если учесть, что причиной смены форм равновесия является большой уровень окружающей сжимающих усилий у опорного контура, который в первую очередь зависит от названных выше факторов.

Характер крепления опорного контура сильно влияет на значение критической нагрузки.

Для сферической оболочки с подвижным опорным контуром (задачи 1 и 3) критическая нагрузка q^+ с увеличением параметра b уменьшается при больших b примерно в 1.5 раза. Иная картина наблюдается для оболочек с неподвижным опорным контуром (задачи 2 и 4), для которых критическая нагрузка при больших b практически постоянная. Для таких оболочек решение осесимметричной задачи дает завышенное (примерно в 1.5 раза) значение критической нагрузки.

Иная картина наблюдается для конических оболочек. При всех рассмотренных видах крепления опорного контура с увеличением параметра b критическая нагрузка уменьшается (фиг. 4). Так, например, для оболочки с жестко заземленным опорным контуром и параметром пологости $b = 30$ учет неосесимметричных форм приводит к снижению q^+ примерно в семь раз.

С увеличением b увеличивается и номер гармоники k_+ , которой соответствует минимальная критическая нагрузка. Однако при этом устанавливается примерно постоянное значение $l_+ = 2\pi b/k_+$, т. е. существует некоторая предельная длина волны формы потери устойчивости, при которой критическая нагрузка минимальна. При больших b близкие гармоники имеют примерно одинаковые значения l_+ , поэтому минимальная критическая нагрузка может одновременно реализоваться для нескольких гармоник.

Формы потери устойчивости оболочек с жестко заземленным опорным контуром приводятся на фиг. 5: при $k = k_+$ для сферических — сплошными, а для конических — пунктирными линиями. (x_3 — параметр неосесимметричного составляющего нормального перемещения, $d = r - b$). Аналогичная картина имеет место и для оболочек с другими условиями крепления опорного контура.

Для сферических оболочек формы равновесия, реализуемые при минимальных критических нагрузках, различаются только при малых значениях b , а при больших b они практически совпадают. Не зависят они и от k_+ (как уже отмечалось, минимальная критическая нагрузка может реализоваться для нескольких номеров гармоник).

Зона краевого эффекта небольшая, за исключением оболочек с подвижным опорным контуром.

Иная картина наблюдается для конических оболочек, для которых зона краевого эффекта независимо от условия крепления опорного контура, как правило, велика. При этом если минимальная критическая нагрузка имеет место при нескольких значениях k_+ , то соответствующие формы равновесия незначительно, но отличаются.

Свободные колебания сферических оболочек при конечных перемещениях исследованы численными методами в [16].

Поступила 15 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Grigoljuk E. J. On the unsymmetrical snapping of shells of revolution. Proc. IUTAM Sympos. on the theory of thin elastic shells, Amsterdam, Delft North Holland Publishing Co., 1960.
2. Gjelsvik, Bodner. Non-symmetrical snap buckling of spherical caps. Proc. Amer. Soc. Civil. Engineers, J. Engng Mech. Div., 1962, vol. 88, No. 5.
3. Parmeter R. D., Fung Y. C. On the influence of non-symmetrical modes on the buckling of shallow spherical shell. 1962, NASA TND-1510.
4. Weinitschke H. J. Asymmetric buckling of clamped shallow spherical shell. 1962, NASA TND-1510.
5. Huang N. G. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. J. Appl. Mech. Trans. ASME, Ser. E, 1964, vol. 31, No. 3.
6. Budiansky B. Buckling of clamped shallow spherical shells. Proc. of the Sympos. on the theory of thin elastic shells. Amsterdam, Delft, North Holland Publishing, Co., 1959.
7. Шилькрут Д. И., Герлаку И. Д. Определение критических нагрузок осесимметрично нагруженных пологих, геометрически нелинейных оболочек вращения с учетом несимметричных форм равновесия. В сб.: Вопросы нелинейной теории оболочек и стержней. Кишинев, 1969.
8. Валишвили Н. В. Несимметричное деформирование и устойчивость пологих оболочек вращения. В сб.: Теория пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.
9. Валишвили Н. В. Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
10. Weinitschke H. On the stability problem for shallow spherical shells. J. Math. and Phys., 1960, vol. 38, No. 4.
11. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.
12. Григолюк Э. И., Мальцев В. П., Мясников В. И., Фролов А. Н. Об одном методе решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1.
13. Абрамов А. А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3.
14. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
15. Weinitschke H. Asymmetric buckling of shallow spherical shells. J. Math. and Phys., 1965, vol. 44, No. 1.
16. Валишвили Н. В. Свободные колебания пологих оболочек вращения при конечных перемещениях. М., «Наука», 1973.