Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

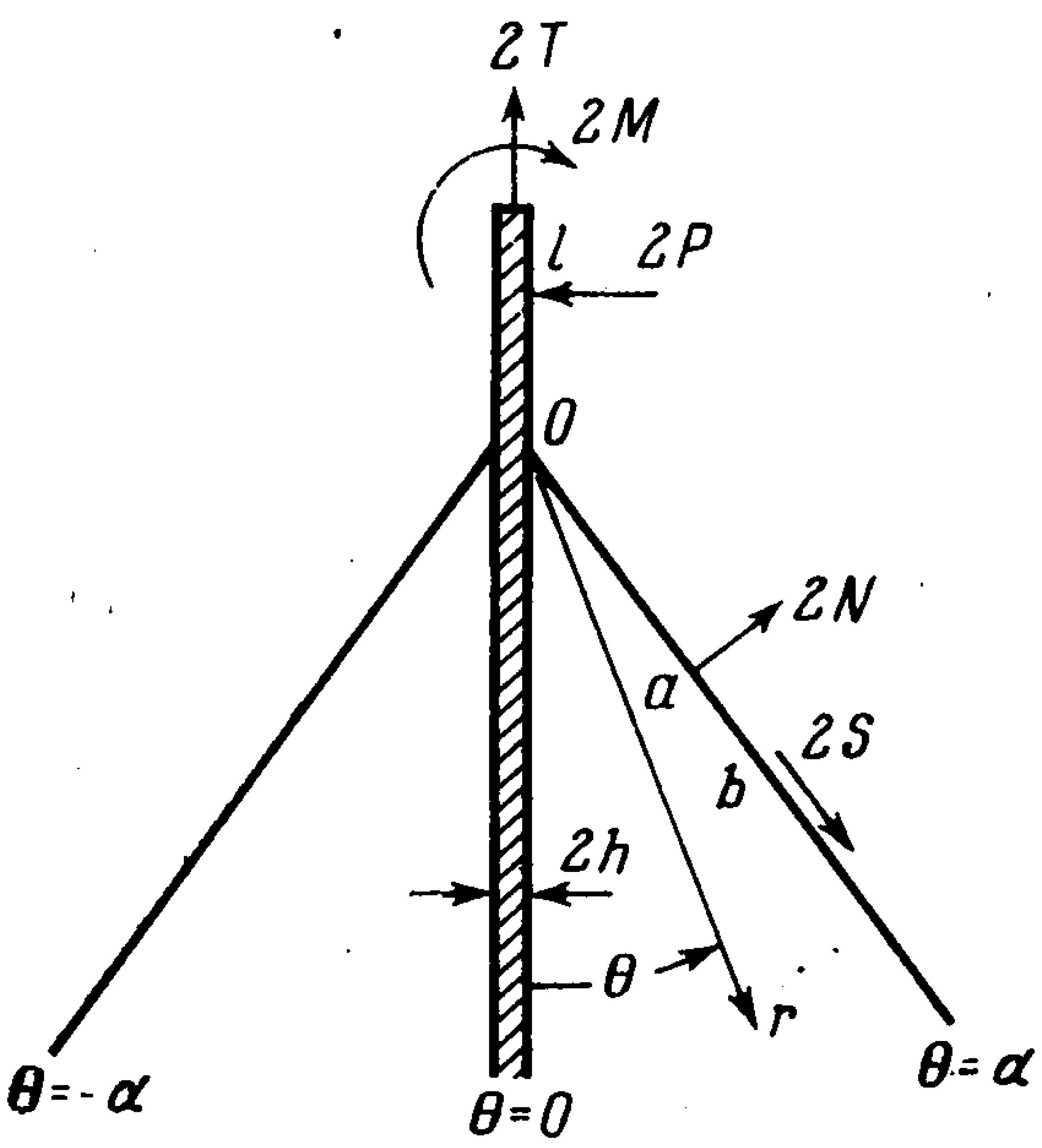
УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО КЛИНА, ПОДКРЕПЛЕННОГО БАЛКОЙ

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Рассматриваются две задачи о плоской деформации упругого бесконечного клина, подкрепленного бесконечной балкой постоянной толщины. В первой задаче балка впаяна в клин по биссектрисе и сцеплена с ним полностью. К концу балки приложены продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент, на граничных поверхностях клина заданы произвольные нормальные и касательные напряжения. Во второй задаче балка без трения прилегает к одной грани клина, произвольные усилия действуют и на клин, и на балку. Обе задачи сведены к разностным уравнениям первого порядка и решены в замкнутой форме.



Фиг. 1

1. Пусть в упругий клин $0 \leqslant r < \infty$, $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$ по оси $\theta = 0$ впаяна упругая балка толщины $2h$ (фиг. 1), контактные поверхности клина и балки полностью сцеплены. На свободную часть балки $\theta = \pi$ действуют продольная растягивающая сила $2T$, изгибающий момент $2M$, поперечная сила $2P$ или другая нагрузка, вызывающая в точке балки $r=0$ эквивалентные усилия. В качестве произвольной нагрузки на клин к его грани $\theta = \alpha$ приложены сосредоточенные силы: нормальная $2N$ и касательная $2S$.

Разобьем заданную нагрузку на симметричную и кососимметричную. Тогда, благодаря симметрии упругой области, решение поставленной задачи можно представить в виде суммы решений а) задачи для половины клина $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, подкрепленного стержнем толщины h, при условиях

$$v(r, 0) = 0, \quad Eh\frac{\partial^2 u(r, 0)}{\partial r^2} + \tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad \int_0^\infty \tau_{r\theta}(r, 0)\, dr = T \tag{1.1}$$

$$\sigma_\theta(r, \alpha) = N\delta(r-a), \qquad \tau_{r\theta}(r, \alpha) = S\delta(r-b) \tag{1.2}$$

и б) задачи для того же клина при условиях (1.2) и

$$u(r, 0) = 0, \quad \int_0^\infty \sigma_\theta(r, 0)\, dr = P, \quad \int_0^\infty \sigma_\theta(r, 0)\, r\, dr = M - Pl \tag{1.3}$$

$$D\frac{\partial^4 v(r, 0)}{\partial r^4} - \sigma_\theta(r, 0) = 0, \qquad D = \frac{Eh^3}{3(1-\mu^2)} \tag{1.4}$$

Здесь E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона балки, $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

Учитывая общее условие (1.2), решение обеих задач будем искать в форме интегралов Меллина [1]

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad 2G\begin{Bmatrix} u(r,\theta) \\ v(r,\theta)\end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \Bigg(\pm A(p)\Bigg[(p\pm\varkappa)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(p+1)\theta \pm \\
\pm\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(p-1)\,\theta - \Delta_1^+\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(p-1)\theta\Bigg] + B(p)\Bigg[(p\pm\varkappa)\times \\
\times\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(p+1)\theta + \Delta_1^-\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(p-1)\,\theta \pm \Delta_2^+\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(p-1)\theta\Bigg] \pm \\
\pm\frac{Na^p}{p}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}[(p-1)(\alpha-\theta)] \mp \frac{Sb^p}{p}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}[(p-1)(\alpha+\theta)]\Bigg)\frac{dp}{r^p}
\end{aligned}
$$

$$\Delta_1^{\pm} = \cos 2p\alpha \pm p\cos 2\alpha,\quad \Delta_2^{\pm} = \sin 2p\alpha \pm p\sin 2\alpha$$

где $\varkappa = 3-4\nu$, G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона клина. Чтобы перемещения в точке $r = 0$ были ограничены, за L возьмем прямую $\operatorname{Re} p = \lambda$, $-{}^1/_4 < \lambda < 0$.

Рассмотрим задачу а). Из первого условия (1.1) и из (1.5) следует

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad B(p) = (\Delta_2^+)^{-1}[A(p)(\Delta_1^+ - p + \varkappa) - Na^p p^{-1}\sin(p-1)\alpha + \\
+ Sb^p p^{-1}\cos(p-1)\alpha]
\end{aligned}
$$

Подставив (1.5), (1.6) во второе условие (1.1), получим

$$
\begin{aligned}
(1.7)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L (p+1)[F(p)A(p)+f(p)]\frac{dp}{r^{p+2}} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}(p+1)\times \\
\times A(p+1)\frac{dp}{r^{p+2}} = 0
\end{aligned}
$$

$$F(p) = \frac{Ehp\Delta_3}{2G(1+\varkappa)\Delta_2^+},\quad \Delta_3 = 4\varkappa\sin^2 p\alpha + 4p^2\sin^2\alpha - (1+\varkappa)^2$$

$$
\begin{aligned}
f(p) = \frac{Eh}{2G(1+\varkappa)}\Bigg\{\frac{\Delta_1^- + p + \varkappa}{\Delta_2^+}[Na^p\sin(p-1)\alpha - \\
- Sb^p\cos(p-1)\alpha] - Na^p\cos(p-1)\alpha + Sb^p\sin(p-1)\alpha\Bigg\}
\end{aligned}
$$

где L_1 — прямая $\operatorname{Re} p = \lambda - 1$. Допустим, что в полосе $\lambda \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \lambda + 1$ функция $pA(p)$ 1) регулярна и 2) стремится к нулю при $|\operatorname{Im} p| \to \infty$. Тогда по теореме Коши, не изменяя подынтегральной функции, можно написать в соотношении (1.7) L вместо L_1 и удовлетворить ему, решив разностное уравнение первого порядка

$$(1.8)\qquad A(p+1) = F(p)A(p) + f(p)$$

Подобные краевые задачи в полярных координатах с граничными условиями третьего рода были сведены к разностным уравнениям в работах [2-5] и др.

Согласно общему решению уравнения (1.8) [6], при $S = N = 0$, т. е. при $f(p) = 0$

(1.9) $$A(p) = \frac{C}{\sin \pi p}\left[\frac{Eh(1+\varkappa)}{2G(\sin 2\alpha + 2\alpha)}\right]^p \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a_k+p)\Gamma(1+b_k-p)\,b_k^{2p-1}}{\Gamma(b_k+p)\Gamma(1+a_k-p)\,a_k^{2p-1}}$$

$$C = {}^1/_2\pi(1+\varkappa)^{-1}T$$

Здесь $\Gamma(p)$ — гамма-функция, a_k и b_k — нули и полюса функции $F(p)$, находящиеся в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, постоянная C определяется из третьего условия (1.1), левая часть которого — меллиновская трансформанта функции $\tau_{r\theta}(r, 0)$ — равна $(1+\varkappa)pA(p)$.

Произвольная периодическая функция, в данном случае $\sin^{-1}\pi p$, выбирается из условий 1) и 2). Пользуясь формулой Стирлинга, можно обосновать абсолютную сходимость и алгебраический рост в полосе $\lambda \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \lambda + 1$ бесконечного произведения (1.9). Таким образом, условия 1) и 2) выполняются, $|A(\lambda + i\beta)| = O(|\beta|^\varepsilon e^{-\pi|\beta|})$, интегралы (1.5) абсолютно и равномерно сходятся во всей упругой области вплоть до ее левой границы.

Напряжения $\tau_{r\theta}(r, 0)$ в угловой точке клина $r = 0$ характеризуются вычетом в первом полюсе функции $A(p)$ слева от L. При $\alpha < \alpha^*$ они конечны, при $\alpha = \alpha^*$ имеют логарифмическую, а при $\alpha > \alpha^*$ степенную r^{a_1-1} особенности. Таблица значений a_1 и формула $\alpha^* = \arcsin\sqrt{1-\nu}$ приведены на стр. 149 монографии [1].

Недавно в работе [5] найдено новое, замечательное по своей простоте и эффективности каноническое решение однородного уравнения (1.8). В данном случае с некоторым дополнением оно приобретает следующий вид:

(1.10) $$A_0(p) = Q^p \cos^{-1}({}^1/_2\pi p)\Gamma(p)X_1(p), \quad Q = Eh\varkappa[G(1+\varkappa)]^{-1}$$

$$X(p) = K^{-1}(p)Y(p) \quad (-1 < \operatorname{Re} p \leqslant 0), \qquad X(p) = Y(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leqslant 1)$$

$$Y(p) = \exp\left\{\frac{1}{2i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{ctg}\pi(t-p)\ln K(t)\,dt\right\}$$

$$K(p) = -\frac{F(p)}{Qp}\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}$$

В отличие от (1.9) здесь, во-первых, не нужно вычислять значений полюсов и нулей функции $F(p)$, во-вторых, интеграл (1.10) имеет экспоненциальную сходимость, а бесконечное произведение (1.9) — только степенную. Однако полное решение в работе [5] из-за сведения однородной задачи теории упругости (в [5] сила приложена только к концу стержня, т. е. $N = S = 0$) к неоднородному разностному уравнению получается громоздким и выражается не двух-, а трехкратными интегралами. Таким образом, наиболее экономное решение дает, видимо, способ (1.5) — (1.8), (1.10), применимый также и к пространственным задачам.

Вернемся к неоднородному уравнению (1.8). Решение его запишем в виде

(1.11) $$A(p) = A_0(p)[C + \cos \pi p\, Z(p)]$$

Подставив (1.11) в (1.8), получим разностное уравнение

$$Z(p+1) = -Z(p) - g(p) \tag{1.12}$$

которое в силу формул Сохоцкого — Племеля имеет решение

$$Z(p) = W(p) - g(p) \quad (-1 < \operatorname{Re} p \leqslant 0), \quad Z(p) = W(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leqslant 1) \tag{1.13}$$

$$W(p) = \frac{1}{2i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{g(t)\,dt}{\sin(t-p)\pi}$$

Из третьего условия (1.1)

$$\lim_{p\to 0} \{(1+\varkappa)\,pA_0(p)[C + \cos \pi p\, Z(p)]\} = T$$

и из (1.10) получим

$$C = T(1+\varkappa)^{-1}X^{-1}(0) - Z(0) \tag{1.14}$$

Справедливость условий 1) и 2) следует из свойств интегралов типа Коши и из оценки $|f(\lambda_1 + i\beta)| = O(|\beta| e^{-\alpha|\beta|})$ при $\lambda \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda + 1$.

В работе [5] неоднородное уравнение решено иным способом.

Рассмотрим задачу б). В силу первого условия (1.3)

$$A(p) = -(\Delta_2^-)^{-1}[B(p)(\Delta_1^- + p + \varkappa) + \mathrm{Na}^p p^{-1} \cos(p-1)\alpha - Sb^p p^{-1} \sin(p-1)\alpha]$$

Условие (1.4) можно по аналогии с (1.7) записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L (p+3)[F_1(p)F_2(p)B(p) + f(p)] \frac{dp}{r^{p+4}} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} (p+3)B(p+3) \frac{dp}{r^{p+4}} = 0 \tag{1.15}$$

$$F_1(p) = Qp(p+1)(p+2), \quad F_2(p) = -\Delta_3(2\varkappa\Delta_2^-)^{-1}, \quad Q = DG^{-1}\varkappa(1+\varkappa)^{-1}$$

$$f(p) = {}^1/_2 Q\varkappa^{-1}(p+1)(p+2)\{[\mathrm{Na}^p \cos(p-1)\alpha - Sb^p \sin(p-1)\alpha](\Delta_2^-)^{-1} + Na^p \sin(p-1)\alpha + Sb^p \cos(p-1)\alpha\}$$

Здесь контур L_1 — прямая $\operatorname{Re} p = \lambda - 3$.

Если во втором интеграле (1.15) подынтегральная функция удовлетворяет условиям 1) и 2) в полосе $\lambda - 3 \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \lambda$, то контур L_1 можно снова сдвинуть и получить на L разностное уравнение

$$B(p+3) = F_1(p)F_2(p)B(p) + f(p) \tag{1.16}$$

Находя каноническое решение $B_0(p)$ однородного уравнения (1.16) с коэффициентом $F_1(p)$ методом Барнса [6], с коэффициентом $F_2(p)$ — методом Р. Д. Банцури [5], получим

$$B_0(p) = Q^{1/3p} \sin \frac{\pi p}{6} \Gamma(p) X(p) \tag{1.17}$$

$$X(p) = K^{-1}(p)Y(p) \quad (-3 < \operatorname{Re} p \leqslant 0), \quad X(p) = Y(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leqslant 3)$$

$$Y(p) = \exp\left\{\frac{1}{6i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-p)}{3} \ln K(t)\,dt\right\}$$

$$K(p) = F_2(p) \operatorname{tg} \frac{\pi p}{6}$$

Каноническое решение $B_{10}(p)$ однородного уравнения

$$B_1(p+3) = -F_1(p)F_2(p)B_1(p)$$

выражается формулой $B_{10}(p) = B_0(p)\cos({}^1/_3\,\pi p)$. Учитывая ограничения 1), 2) и условия равновесия балки (1.3), общее решение неоднородного уравнения (1.16) запишем в виде

$$B(p) = B_0(p)\left(C_1 \operatorname{ctg}\frac{\pi p}{3} + C_2\right) + B_{10}(p)Z(p)\operatorname{ctg}\frac{\pi p}{3} \tag{1.18}$$

Подставив (1.18) в (1.16), получим

$$Z(p+3) = -Z(p) - g(p) \tag{1.19}$$

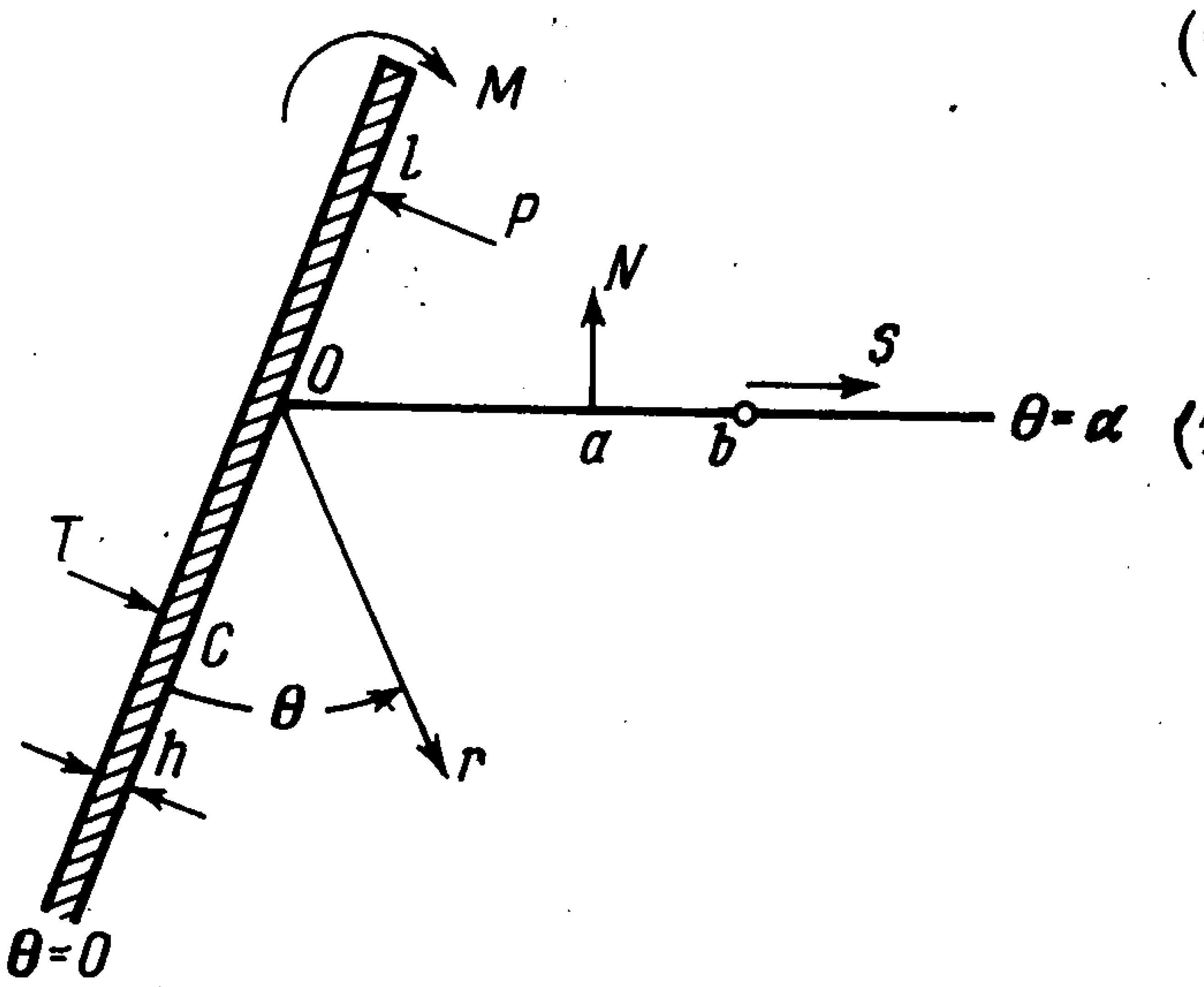
$$g(p) = -B_{10}^{-1}(p+3)f(p)\operatorname{tg}\frac{\pi p}{3}$$

Аналогично решению (1.13)

$$Z(p) = W(p) - g(p) \quad (-3 < \operatorname{Re} p \leqslant 0), \tag{1.20}$$

$$Z(p) = W(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leqslant 3)$$

$$W(p) = \frac{1}{6i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{g(t)\,dt}{\sin{}^1/_3\pi(t-p)}$$



Фиг. 2

Интегральные условия (1.3), левые части которых суть трансформанты функции $\sigma_\theta(r, 0)$ в точках $p = 0$, и $p = 1$, дают следующие два уравнения для вычисления постоянных C_1 и C_2:

$$^1/_2\,(1+\varkappa)X(0)[C_1 + Z(0)] = -P$$

$$^1/_2\,(1+\varkappa)Q^{1/3}Y(1)\left[\frac{C_1}{\sqrt{3}} + C_2 + \frac{W(1)}{2\sqrt{3}}\right] = Pl - M$$

Проверка условий 1) и 2) благодаря экспоненциальному убыванию функций $g(p)$ и $B(p)$ при $|\operatorname{Im} p| \to \infty$ здесь не вызывает трудностей.

Характер напряжений $\sigma_\theta(r, 0)$ в угловой точке клина определяется вычетом функции $(1+\varkappa)pr^{-p-1}B(p)$ в первом полюсе слева от L. Поскольку нули функций $F_2(p)$ и $F(p)$ совпадают, как и в задаче а) $\sigma_\theta(r, 0) = O(r^{\alpha_1-1})$ при $\alpha > \alpha^*$.

2. Рассмотрим более сложный вариант нагрузки, приложенной к балке в зоне контакта. Пусть упругий клин $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$ подкреплен со стороны $\theta = 0$ балочной плитой постоянной толщины h (фиг. 2). Трение между балкой и клином отсутствует, свободные части клина $\theta = \alpha$ и балки $\theta = \pi$ нагружены, как в задаче б), на балку в точке $r = c$, $\theta = 0$ действует нормальная сила T.

Эта задача определяется условиями (1.2) и условиями

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \quad D_1\frac{\partial^4 v(r, 0)}{\partial r^4} - \sigma_\theta(r, 0) = T\delta(r - c), \quad D_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{2.1}$$

$$\int_0^\infty \sigma_\theta(r, 0)\,dr = P - T, \quad \int_0^\infty \sigma_\theta(r, 0)\,r\,dr = M - Pl - Tc \tag{2.2}$$

Решение ее будем искать в форме (1.5), где в силу (2.1)

$$B(p) = (\Delta_2^+ p)^{-1}[A(p)p(\Delta_1^+ - p - 1) - Na^p \sin(p-1)\alpha + Sb^p \cos(p-1)\alpha]$$

функция $A_1(p)$ должна удовлетворять в полосе $\lambda \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \lambda + 3$ условиям 1) и 2), а на контуре L — разностному уравнению

$$A_1(p+3) = F_1(p)F_2(p)A_1(p) + f(p) \tag{2.3}$$

Здесь

$$A_1(p) = 2F_2^{-1}(p)[pA(p) - f(p)], \quad F_1(p) = Q(p+1)(p+2)\times(p+3) \tag{2.4}$$

$$Q = {}^1/_4\, D_1 G^{-1}(1+\varkappa), \quad F_2(p) = {}^1/_2 \Delta_2^+ \Delta_4^{-1}, \quad \Delta_4 = \sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha$$

$$f(p) = {}^1/_4\, \Delta_4^{-1}\{(\Delta_1^- + p - 1)[Na^p \sin(p-1)\alpha - Sb^p \cos(p-1)\alpha] - \Delta_2^+[Na^p \cos(p-1)\alpha - Sb^p \sin(p-1)\alpha\} - Tc^{p+3}$$

Решение задачи (2.3) подобно (1.18) имеет вид

$$A_1(p) = A_{10}(p)\left[C_1 \operatorname{ctg}\frac{\pi p}{3} + C_2 + Z(p)\cos\frac{\pi p}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi p}{3}\right] \tag{2.5}$$

$$A_{10}(p) = Q^{1/3 p}\sin\frac{\pi p}{6}\Gamma(p+1)X(p)$$

Здесь функция $X(p)$ выражается формулами (1.17), $F_2(p)$ и Q — формулами (2.4), функция $Z(p)$ имеет вид (1.20), где

$$g(p) = \operatorname{tg}({}^1/_3\,\pi p) f(p)[A_{10}(p+3)\cos({}^1/_3\,\pi p)]^{-1} \tag{2.6}$$

Из условий (2.2) получим

$$C_1 = \frac{2(P-T) - Z(0)}{X(0)}, \quad C_2 = \frac{2(M - Pl - Tc)}{Q^{1/3}Y(1)} - \frac{C_1}{\sqrt{3}} - \frac{W(1)}{2\sqrt{3}}$$

Наличие нагрузки на балку делает функцию $f(p)$ неубывающей на бесконечности в полосе $\lambda \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \lambda + 3$ (за счет слагаемого Tc^{p+3}) и требует для проверки условия 2) более строгой оценки функции $A_1(p)$. Если $\operatorname{Re} p > 0$, то, согласно (2.5) и (1.20), функция $Z(p)$, а с ней и $A_1(p)$ убывают экспоненциально, когда $|\operatorname{Im} p| \to \infty$. Если же $\operatorname{Re} p \leqslant 0$, то требуемый результат следует из (2.4) — (2.6) и (1.20)

$$|A_1(i\beta + \lambda_1)| = |A_{10}(i\beta + \lambda_1)A_{10}^{-1}(i\beta + \lambda_1 + 3)|\,O(1) = O(|\beta|^{-3}) \quad (\lambda_1 \leqslant 0)$$

В этой задаче $\alpha^* = {}^1/_2\,\pi$. При $\alpha < \alpha^*$ имеем $\sigma_\theta(0, 0) = O(1)$, при $\alpha > \alpha^*$ и $r \to 0$ имеем $\sigma_\theta(r, 0) = O(r^{a_1 - 1})$, где a_1 — первый положительный нуль функции Δ_2^+. Если $\alpha = \pi$, ${}^3/_2\,\pi$, 2π, то соответственно $a_1 = {}^1/_2$, ${}^1/_3$, ${}^1/_4$.

Для полуплоскости, при $\alpha = \pi$ рассмотренная задача решена другим методом в работе [7].

Поступила 30 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
2. *Koiter W. T.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, No. 2.
3. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Некоторые задачи теории теплопроводности для клиновидных тел. II. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 9.
4. *Васильев Б. А.* Решение стационарной задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничных условиях 3-го рода. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 3.
5. *Банцури Р. Д.* Контактная задача для клина с упругим креплением. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4.
6. *Barnes E. W.* The linear finite differences equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1904, vol. 2.
7. *Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.