Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ, СЦЕПЛЕННЫЙ С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ, ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ СИЛ

В. П. Плевако

(Харьков)

Получено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородного изотропного слоя, упругие характеристики которого — ограниченные и интегрируемые функции одной декартовой координаты. Слой неразрывно спаян с однородным полупространством и находится под воздействием массовых сил.

Задача возникает при расчете покрытий. В более ранних работах рассматривались ее частные случаи — воздействие на открытую поверхность нормальной нагрузки. В работах [1, 2] такая задача исследована для экспоненциального закона изменения модуля упругости с глубиной при постоянном коэффициенте Пуассона, а [3] — для гиперболического. Изучалась осесимметричная деформация неоднородного слоя, покоящегося на абсолютно жестком основании. В работе [4] получено решение для несжимаемого материала с линейным законом изменения по глубине модуля сдвига, в [5, 6] — для произвольного закона при постоянном коэффициенте Пуассона. В последнем случае был применен заслуживающий внимания подход. При решении слой заменялся системой из n сцепленных между собой однородных изотропных плит одинаковой толщины, модули упругости которых определялись заданной функцией неоднородности. В пределе при $n \to \infty$ получено формально точное решение исходной задачи.

Воздействие сдвигающих нагрузок и сил, приложенных внутри слоя, ранее, по-видимому, не рассматривалось.

1. При помощи метода, разработанного в [7], систему уравнений равновесия в перемещениях для неоднородной изотропной среды, модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν которой — функции декартовой координаты z, можно расщепить на две подсистемы

$$\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\Delta S_1+\nu\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[G\left(\frac{\partial S_1}{\partial z}+u_z\right)\right]+\varphi_1=0 \tag{1.1}$$

$$\Delta G\left(\frac{\partial S_1}{\partial z}+u_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\Delta S_1+(1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]\right\}+Z=0$$

$$\left(G\nabla^2+\frac{dG}{dz}\frac{\partial}{\partial z}\right)N_1+\varphi_2=0 \tag{1.2}$$

$$X=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y},\quad Y=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь X, Y, Z — массовые силы, отнесенные к единице объема.

Компоненты u_x и u_y вектора смещений следующим образом выражаются через функции S_1 и N_1:

$$u_x=\frac{\partial S_1}{\partial x}+\frac{\partial N_1}{\partial y},\qquad u_y=\frac{\partial S_1}{\partial y}-\frac{\partial N_1}{\partial x}$$

Полагая в уравнениях (1.1) и (1.2)

$$u_z = S_2, \quad \frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\Delta S_1 + (1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] = S_3$$

$$G\left(\frac{\partial S_1}{\partial z} + u_z\right) = S_4, \qquad G\frac{\partial N_1}{\partial z} = N_2$$

получаем следующие системы:

$$\frac{\partial S_1}{\partial z} = -S_2 + \frac{1}{G}S_4, \quad \frac{dS_2}{dz} = -\frac{\nu}{1-\nu}\Delta S_1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G}S_3 \tag{1.3}$$

$$\frac{dS_3}{dz} = -\Delta S_4 - Z, \quad \frac{dS_4}{dz} = -\frac{2G}{1-\nu}\Delta S_1 - \frac{\nu}{1-\nu}S_3 - \varphi_1$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial z} = \frac{1}{G}N_2, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial z} = -G\Delta N_1 - \varphi_2 \tag{1.4}$$

Таким образом, решение любой задачи теории упругости сводится к разысканию для области, занятой телом, решений систем уравнений (1.3) и (1.4), удовлетворяющих заданным граничным условиям.

Все компоненты тензора напряжений выражаются через введенные неизвестные функции и их производные только по x и y

$$\sigma_x = 2G\left(\frac{\nu}{1-\nu}\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)S_1 + \frac{\nu}{1-\nu}S_3 + 2G\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} \tag{1.5}$$

$$\sigma_y = 2G\left(\frac{\nu}{1-\nu}\Delta + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)S_1 + \frac{\nu}{1-\nu}S_3 - 2G\frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_z = S_3, \quad \tau_{xy} = 2G\frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} - G\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)N_1$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial S_4}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = \frac{\partial S_4}{\partial y} - \frac{\partial N_2}{\partial x}$$

В цилиндрических координатах r, β, z составляющие вектора перемещений и тензора напряжений запишутся в виде

$$u_r = \frac{\partial S_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_1}{\partial \beta}, \quad u_\beta = \frac{1}{r}\frac{\partial S_1}{\partial \beta} - \frac{\partial N_1}{\partial r}, \quad u_z = S_2 \tag{1.6}$$

$$\sigma_z = S_3, \quad \sigma_r = 2G\left(\frac{\nu}{1-\nu}\Delta + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)S_1 + \frac{\nu}{1-\nu}S_3 + 2G\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial N_1}{\partial \beta}\right)$$

$$\sigma_\beta = 2G\left(\frac{\nu}{1-\nu}\Delta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)S_1 + \frac{\nu}{1-\nu}S_3 - \frac{2G}{r}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)N_1$$

$$\tau_{r\beta} = \frac{2G}{r}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right)S_1 - G\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\right)N_1$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial S_4}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_2}{\partial \beta}, \qquad \tau_{\beta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial S_4}{\partial \beta} - \frac{\partial N_2}{\partial r}$$

Полученные результаты позволяют решить ряд новых задач теории упругости неоднородных сред. Рассмотрим две из них.

2. Неоднородный слой $0 \leqslant z \leqslant h$, неразрывно сцепленный с однородным изотропным полупространством, находится под воздействием массовых сил $Z = Z(r, \beta, z)$ (фиг. 1). Изменение упругих свойств слоя с глубиной характеризуется функциями $G^{(1)} = G^{(1)}(z)$ и $\nu^{(1)} = \nu^{(1)}(z)$. Модуль сдвига и коэффициент Пуассона полупространства - $G^{(2)}$ и $\nu^{(2)}$.

Необходимо определить напряжения и деформации в рассматриваемом неоднородном теле.

Для законности дальнейших операций функции $G^{(1)}$ и $\nu^{(1)}$ будем считать ограниченными и интегрируемыми по Риману в интервале $[0, h]$, а $Z(r, \beta, z)$ может быть представлена в виде двойного разложения в ряд Фурье по координате β и интеграл Ханкеля по r

$$(2.1)\qquad Z(r,\beta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta}\int_0^\infty g(z,\alpha,m)\,J_m(\alpha r)\,\alpha d\alpha$$

$$g(z,\alpha,m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty Z(r,\beta,z)\,J_m(\alpha r)\,re^{-im\beta}drd\beta$$

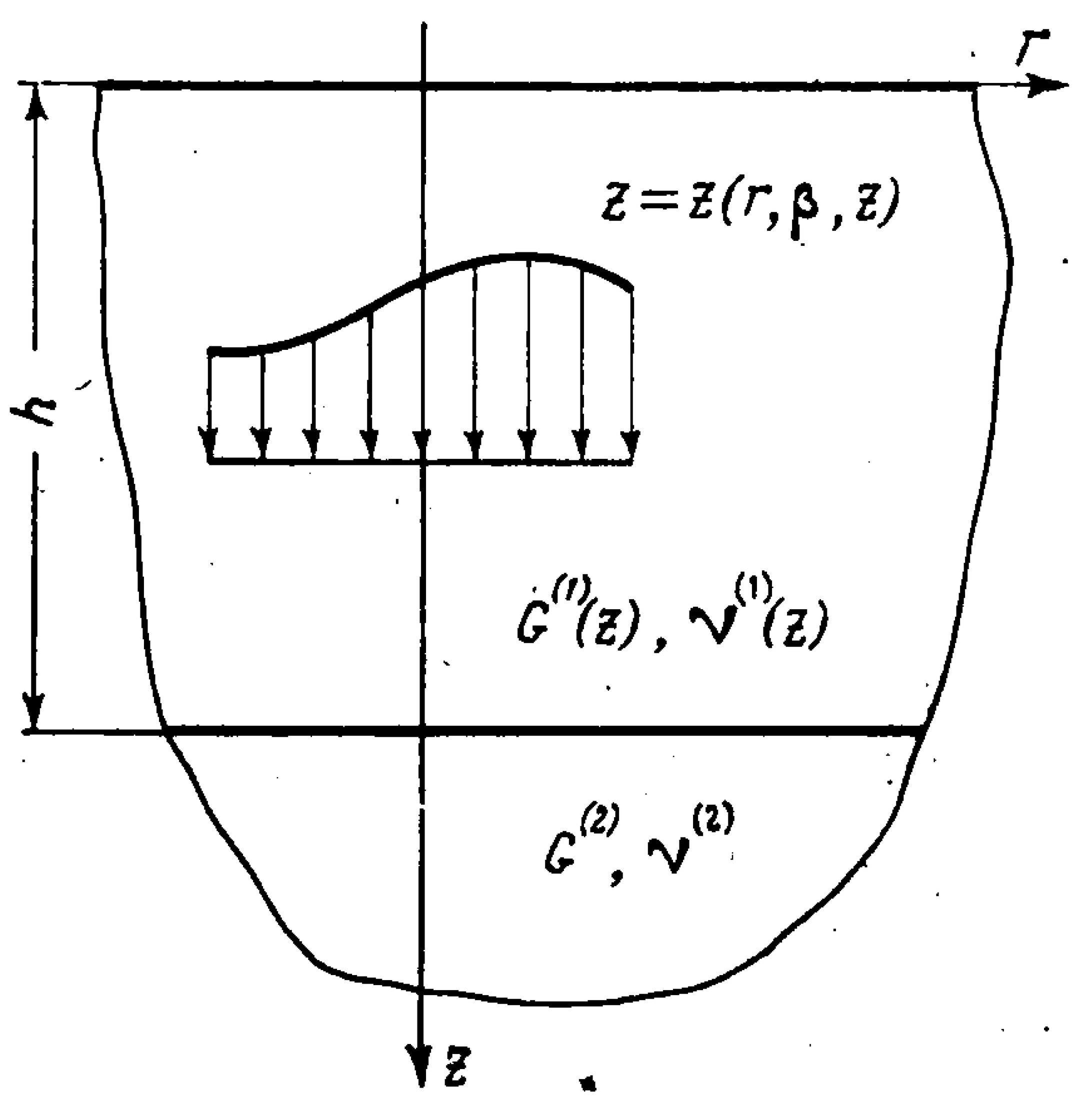
Здесь $J_m(\alpha r)$ — функция Бесселя первого рода порядка m.

Граничные условия задачи на поверхности слоя ($z = 0$) имеют вид

$$(2.2)\qquad \sigma_z^{(1)} = \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{\beta z}^{(1)} = 0$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс 1 относится к слою, а 2 — к полупространству.

В плоскости контакта слоя с полупространством ($z = h$) граничными условиями являются условия полного сцепления. Это значит, что должны выполняться следующие равенства:



Фиг. 1

$$(2.3)\qquad u_r^{(1)}=u_r^{(2)},\quad u_\beta^{(1)}=u_\beta^{(2)},\quad u_z^{(1)}=u_z^{(2)},\quad \sigma_z^{(1)}=\sigma_z^{(2)}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}=\tau_{rz}^{(2)},\qquad \tau_{\beta z}^{(1)}=\tau_{\beta z}^{(2)}$$

Из условия задачи следует, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Кроме того, положим $N_1 = N_2 = 0$. Решение задачи, таким образом, состоит в разыскании для полупространства и слоя таких решений системы (1.3), которые позволили бы удовлетворить граничным условиям (2.2) и (2.3).

Решение системы (1.3) ищем в виде

$$(2.4)\qquad \begin{Vmatrix} S_1^{(n)} \\ S_2^{(n)} \\ S_3^{(n)} \\ S_4^{(n)} \end{Vmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta}\int_0^\infty J_m(\alpha r) \begin{Vmatrix} \frac{1}{\alpha}s_1^{(n)}(z,\alpha,m) \\ s_2^{(n)}(z,\alpha,m) \\ \alpha s_3^{(n)}(z,\alpha,m) \\ s_4^{(n)}(z,\alpha,m) \end{Vmatrix} d\alpha \qquad (n=1,2)$$

где $s_j^{(n)}(z, \alpha, m)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — подлежащие определению функции.

Подставляя $S_j^{(n)}$ из (2.4) и Z из (2.1) в уравнения (1.3), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $s_j^{(n)}(z, \alpha, m)$, которые в матричной форме имеют вид

$$5)\qquad dS^{(n)}/dz = \alpha A^{(n)}S^{(n)} - g^{(n)}D \qquad (n=1,2)$$

$$A^{(n)}(G^{(n)}, \nu^{(n)}) = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & \dfrac{1}{G^{(n)}} \\ \dfrac{\nu^{(n)}}{1-\nu^{(n)}} & 0 & \dfrac{1-2\nu^{(n)}}{2(1-\nu^{(n)})G^{(n)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{2G^{(n)}}{1-\nu^{(n)}} & 0 & -\dfrac{\nu^{(n)}}{1-\nu^{(n)}} & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$S^{(n)} = \left\| \begin{matrix} s_1^{(n)}(z, \alpha, m) \\ \cdot \\ \cdot \\ s_4^{(n)}(z, \alpha, m) \end{matrix} \right\|, \quad D = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad \begin{matrix} g^{(1)} = g(z, \alpha, m) \\ g^{(2)} = 0 \end{matrix}$$

Определяя по зависимостям (1.6) составляющие тензора напряжений и вектора смещений и подставляя их в граничные условия (2.2) и (2.3), получим

$$s_3^{(1)}(0, \alpha, m) = s_4^{(1)}(0, \alpha, m) = 0 \tag{2.6}$$

$$s_j^{(1)}(h, \alpha, m) = s_j^{(2)}(h, \alpha, m) \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Кроме того, из условия ограниченности на бесконечности напряжений и перемещений следует, что функции $s_j^{(2)}(z, \alpha, m)$ должны быть ограниченными при $z \to \infty$.

Таким образом, пространственная задача теории упругости сведена к краевым задачам для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (2.5).

Обозначим через $\Omega_0^z(\alpha A^{(1)})$ матрицант однородной системы, соответствующей системе (2.5) при $n = 1$. Тогда решение неоднородной системы с граничными условиями $S^{(1)}|_{z=0} = S_0$ запишется в виде

$$S^{(1)} = \Omega_0^z(\alpha A^{(1)}) S_0 - KD \tag{2.7}$$

$$K = \int_0^z \Omega_t^z(\alpha A^{(1)}) g(t, \alpha, m)\, dt$$

Решение значительно упрощается, если массовые силы можно представить в виде ($\delta(z - h_1)$ — дельта-функция Дирака)

$$Z = \delta(z - h_1) f(r, \beta) \tag{2.8}$$

$$f(r, \beta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta} \int_0^\infty g(\alpha, m) J_m(\alpha r)\, \alpha d\alpha$$

Т. е. это случай, когда массовые силы представляют собой нагрузку $f(r, \beta)$, приложенную внутри слоя на уровне $z = h_1$ и действующую в направлении оси z.

Тогда, заменяя в формуле (2.7) $g(t, \alpha, m)$ на $\delta(t - h_1)\, g(\alpha, m)$ и осуществляя интегрирование, получим

$$K = \begin{cases} 0, & z < h_1 \\ \Omega_{h_1}^z(\alpha A^{(1)})\, g(\alpha, m), & z \geqslant h_1 \end{cases} \tag{2.9}$$

В частном случае, когда нагрузка приложена к поверхности неоднородного слоя, в формуле (2.9) необходимо положить $h_1 = 0$.

Для вычисления при известном матриканте компонентов вектора смещений и тензора напряжений необходимо, очевидно, знать все элементы матрицы-столбца S_0. Элементы третьей и четвертой строки, согласно условиям (2.6), равны нулю. Остальные два — $s_1^{(1)}(0, \alpha, m)$ и $s_2^{(1)}(0, \alpha, m)$ — могут быть определены из граничных условий при $z = h$. Для этого необходимо иметь решение системы (2.5) для полупространства ($n = 2$).

Ограниченное на бесконечности решение принимаем в виде

$$(2.10)\quad s_1^{(2)} = -\frac{1}{2G^{(2)}}[(1-2\nu^{(2)})C_1 + 2(1-\nu^{(2)})C_2 - \alpha(z-h)(C_1+C_2)]\,e^{-\alpha(z-h)}$$

$$s_2^{(2)} = -\frac{1}{2G^{(2)}}[2(1-\nu^{(2)})C_1 + (1-2\nu^{(2)})C_2 + \alpha(z-h)(C_1+C_2)]\,e^{-\alpha(z-h)}$$

$$s_3^{(2)} = [C_1 + \alpha(z-h)(C_1+C_2)]\,e^{-\alpha(z-h)}$$

$$s_4^{(2)} = [C_2 - \alpha(z-h)(C_1+C_2)]\,e^{-\alpha(z-h)}$$

Здесь и в дальнейшем $C_k (k = 1, 2, \ldots)$ — функции от m и параметра α, которые подлежат определению из граничных условий (2.6).

Введем следующие обозначения:

$$(2.11)\qquad S^{(1)}|_{z=h} = \left\| \begin{array}{c} s_1^{(1)}(h, \alpha, m) \\ s_2^{(1)}(h, \alpha, m) \\ \hdashline s_3^{(1)}(h, \alpha, m) \\ s_4^{(1)}(h, \alpha, m) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} U_1(h) \\ \hdashline U_2(h) \end{array} \right\|$$

$$S_0 = \left\| \begin{array}{c} s_1^{(1)}(0, \alpha, m) \\ s_2^{(1)}(0, \alpha, m) \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} U_1(0) \\ \hdashline 0 \end{array} \right\|$$

$$KD|_{z=h} = \left\| \begin{array}{c} k_1(h, \alpha, m) \\ k_2(h, \alpha, m) \\ \hdashline k_3(h, \alpha, m) \\ k_4(h, \alpha, m) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} K_1 \\ \hdashline K_2 \end{array} \right\|, \quad \Omega_0^h(\alpha A^{(1)}) = \left\| \begin{array}{cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{array} \right\|$$

Здесь $\Omega_{kl} (k = 1, 2;\ l = 1,2)$ — клетки размером 2×2 матрицы $\Omega_0^h(\alpha A^{(1)})$.

Полагая в формулах (2.7) и (2.10) $z = h$, из граничных условий (2.6) находим все неизвестные функции параметров m и α

$$(2.12)\qquad U_1(0) = (\Omega_{11} + M\Omega_{21})^{-1}(K_1 + MK_2)$$
$$C = \Omega_{21}U_1(0) - K_2$$

$$(2\qquad M = \frac{1}{2G^{(2)}} \left\| \begin{array}{cc} 1-2\nu^{(2)} & 2(1-\nu^{(2)}) \\ 2(1-\nu^{(2)}) & 1-2\nu^{(2)} \end{array} \right\|, \quad C = \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\|$$

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния неоднородного слоя и полупространства сводится в конечном счете, к вычислению несобственных интегралов.

Приведем формулы для определения перемещений в неоднородном слое и полупространстве

$$u_r^{(n)} = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta}\int_0^\infty \left[J_{m+1}(\alpha r) - \frac{m}{\alpha r} J_m(\alpha r)\right] s_1^{(n)}(z, \alpha, m)\, d\alpha \tag{2.13}$$

$$u_\beta^{(n)} = i\sum_{m=-\infty}^{+\infty} m e^{im\beta}\int_0^\infty \frac{1}{\alpha r} J_m(\alpha r)\, s_1^{(n)}(z, \alpha, m)\, d\alpha$$

$$u_z^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta}\int_0^\infty J_m(\alpha r)\, s_2^{(n)}(z, \alpha, m)\, d\alpha \qquad (n = 1, 2)$$

Если массовые силы Z не зависят от угловой координаты β, то знак суммы во всех формулах нужно отбросить, так как $g(z, \alpha, m) = 0$ для всех $m \neq 0$, и от рядов остается лишь по одному члену, каждый из которых соответствует случаю $m = 0$.

3. Остановимся теперь на вопросе нахождения матриканта однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (2.5) при $n = 1$.

Если модуль сдвига и коэффициент Пуассона слоя постоянны, то постоянны и элементы матрицы $A^{(1)}$. Матрицант, который обращается в E при $z = z_0$, причем E — единичная матрица, имеет вид [8]

$$\Omega_{z_0}^{z}(\alpha A^{(1)}) = e^{A^{(1)}\alpha(z-z_0)} \tag{3.1}$$

Вычисление элементов этой матрицы, как известно, не представляет трудности.

Подставляя выражение (3.1) в формулы п. 2, придем к задаче о равновесии под действием массовых сил Z однородного слоя, сцепленного с полупространством.

Частный случай этой задачи рассматривался в работе [9], где исследовалось напряженно-деформированное состояние упругого слоя, который покоится на жестком основании и находится под воздействием расположенной внутри него сосредоточенной силы P.

Формулы этой работы можно получить из приведенных выше, если дополнительно положить $G^{(2)} \to \infty$, а в выражении (2.9) принять

$$g(\alpha, m) = \begin{cases} P/(2\pi), & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

Матрицант однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (2.5), выражается через матричную экспоненту и в случае, когда модуль сдвига слоя меняется с глубиной по экспоненциальной зависимости вида

$$G^{(1)}(z) = G_0 e^{2bz}$$

при постоянном коэффициенте Пуассона.

Покажем это, для чего введем новое неизвестное T с помощью преобразования

$$(3.2)\qquad S^{(1)} = FT, \quad F(z,b) = \left\| \begin{matrix} e^{-bz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-bz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{bz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{bz} \end{matrix} \right\|$$

В результате придем к следующему матричному уравнению:

$$(3.3)\qquad dT/dz = BT, \qquad B = F^{-1}\left(\alpha A^{(1)} F - \frac{dF}{dz}\right)$$

$$B(\alpha, b, G_0, \nu^{(1)}) = \left\| \begin{matrix} b & -\alpha & 0 & \frac{\alpha}{G_0} \\ \frac{\alpha\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)}} & b & \frac{\alpha(1-2\nu^{(1)})}{2(1-\nu^{(1)})G_0} & 0 \\ 0 & 0 & -b & \alpha \\ \frac{2\alpha G_0}{1-\nu^{(1)}} & 0 & -\frac{\alpha\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)}} & -b \end{matrix} \right\|$$

Элементы матрицы B постоянны и поэтому имеем

$$(3.4)\qquad \Omega_{z_0}^{\ z}(\alpha A^{(1)}) = Fe^{B(z-z_0)}F^*, \qquad F^* = F^{-1}\big|_{z=z_0}$$

Положим теперь, что интервал $[0, h]$ изменения переменной z точками $z_1, z_2, \ldots$ можно разбить на участки, в пределах которых модуль сдвига постоянен или меняется по экспоненциальной зависимости, а коэффициент Пуассона $\nu^{(1)} = \text{const}$.

Чтобы получить решение однородной системы дифференциальных уравнений в этом случае, нужно воспользоваться следующим свойством матриканта [8]:

$$(3.5)\qquad \Omega_{z_0}^{\ z}(\alpha A^{(1)}) = \Omega_{z_{n-1}}^{z}(\alpha A^{(1)})\,\Omega_{z_{n-2}}^{z_{n-1}}(\alpha A^{(1)}) \ldots \Omega_{z_0}^{z_1}(\alpha A^{(1)})$$
$$(0 \leqslant z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z \in [0, h])$$

Входящие в формулу (3.5) матрицы $\Omega_{z_{k-1}}^{z_k}(\alpha A^{(1)})$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $z_n = z)$, согласно изложенному выше, могут быть представлены с помощью матричных экспоненциальных функций.

В качестве примера использования полученных результатов рассмотрим задачу, которая возникает при расчете реконструируемых дорожных одежд.

Неоднородный слой, упругие характеристики которого меняются с глубиной по зависимости, показанной на фиг. 2, неразрывно спаян с однородным упругим полупространством и находится под воздействием нормальных к поверхности сил q, которые равномерно распределены на площади круга радиуса δ. Необходимо определить перемещение $u_z^{(1)}$ точки, лежащей в начале координат.

$\frac{G_0}{G_1}$	$\frac{G_2}{G_1}$	$\frac{G_2}{G_3}$	$\frac{G_3}{G_4}$	$\frac{z_1}{\delta}$	$\frac{z_2-z_1}{\delta}$	$\frac{h-z_2}{\delta}$	W	R
4	3	2	4	3	1	2	3.16	2.48
4	3	2	4	1	1	2	2.78	3.27
4	3	2	4	3	$^3/_2$	4	4.13	2.29
4	3	4	8	1	1	2	5.87	6.92
4	3	4	8	1	$^1/_2$	2	6.09	8.20
4	3	4	8	2	1	3	6.60	5.18
4	3	2	8	1	1	2	3.83	4.51
2	$^1/_3$	1	2	$^1/_3$	0	1	2.23	7.87
2	$^1/_3$	1	4	$^1/_3$	0	1	3.59	12.7
2	$^1/_3$	1	$^1/_3$	$^1/_3$	$^1/_2$	1	1.30	3.35

Матрицант однородной системы, соответствующей системе (2.5), согласно выражениям (3.1), (3.4) и (3.5), имеет вид

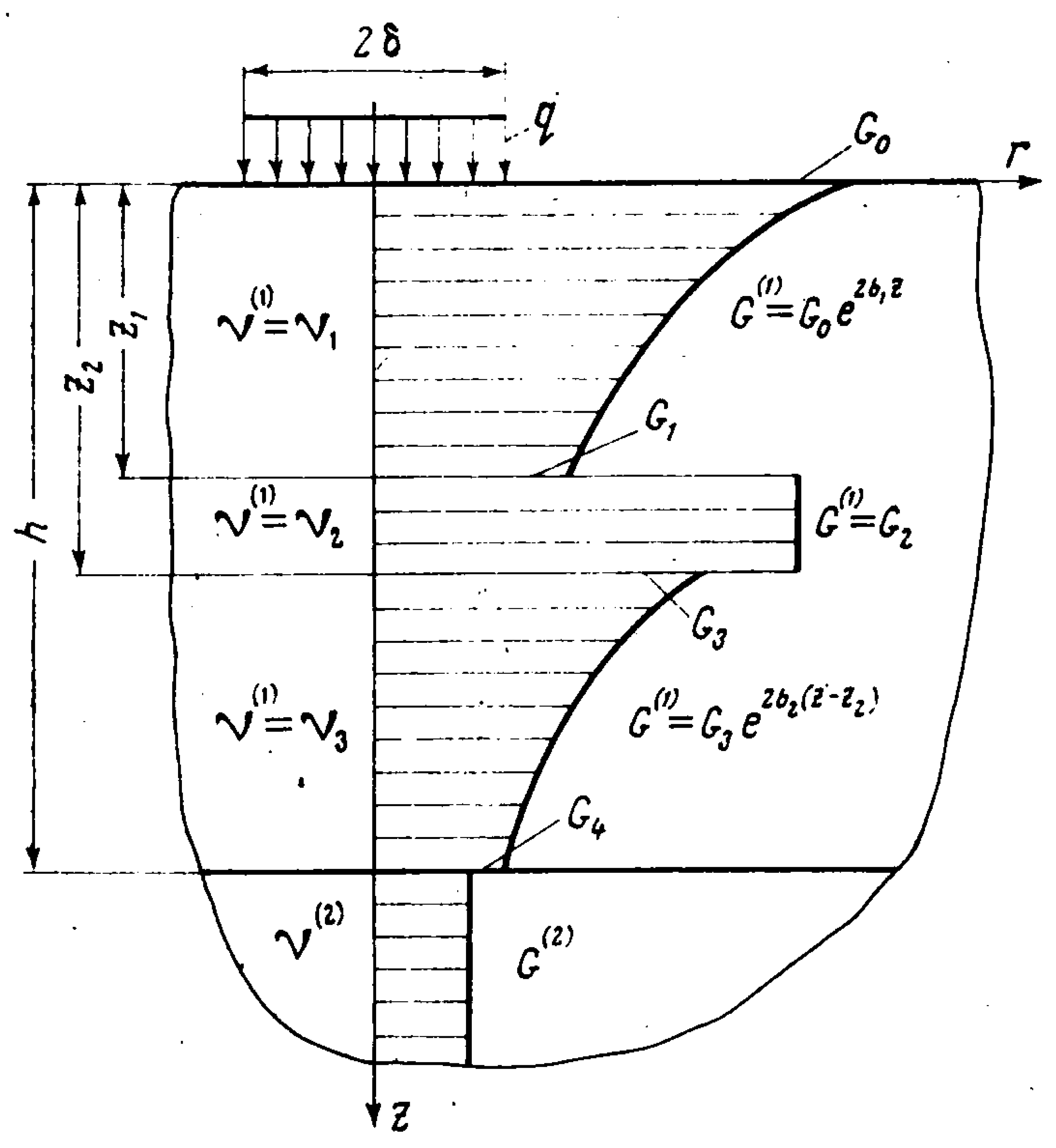
$$\Omega_0^{\,z}(\alpha A^{(1)}) = \begin{cases} V(z), & 0 \leqslant z \leqslant z_1 \\ \Omega_{z_1}^{\,z}(\alpha A^{(1)})\, V(z_1), & z_1 < z \leqslant z_2 \\ \Omega_{z_2}^{\,z}(\alpha A^{(1)})\, \Omega_{z_1}^{\,z_2}(\alpha A^{(1)})\, V(z_1), & z_2 < z \leqslant h \end{cases} \tag{3.6}$$

$$V(z) = F(z,\ b_1)e^{B_1 z}, \qquad B_1 = B(\alpha,\ b_1,\ G_0,\ \nu_1)$$

$$\Omega_{z_1}^{\,z}(\alpha A^{(1)}) = e^{A\alpha(z-z_1)}, \qquad A = A^{(1)}(G_2,\ \nu_2)$$

$$\Omega_{z_2}^{\,z}(\alpha A^{(1)}) = F(z-z_2,\ b_2)e^{B_2(z-z_2)}, \qquad B_2 = B(\alpha,\ b_2,\ G_3,\ \nu_3)$$

Используя матрицант (3.6), по формулам (2.12) и (2.7) можно найти все элементы матриц S_0 и $S^{(1)}$, после чего задача сведется к вычислению несобственного интеграла для компоненты $u_z^{(1)}$ при $z = r = 0$.



Фиг. 2

Некоторые из численных результатов, полученные на ЭЦВМ М-20, представлены в таблице. Вычисления велись для случая $G^{(2)}=G_4$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu^{(2)} = {}^1/_3$.

В предпоследней графе приведены значения безразмерной величины $W = u_z^{(1)} G_0 h \,/\, P$, где $P = \pi\delta^2 q$ — равнодействующая внешней нагрузки. В последней графе — величина R, которая характеризует деформационную способность исследуемой упругой системы. Она показывает, во сколько раз максимальная осадка однородного полупространства с модулем G_0 от воздействия той же нагрузки будет меньше, чем у рассматриваемого неоднородного тела.

В случае, когда модуль сдвига слоя меняется с глубиной по зависимости вида

$$G^{(1)} = G_0(1 + cz)^b \tag{3.7}$$

а коэффициент Пуассона $\nu^{(1)} = \text{const}$, элементы матриципанта удается представить с помощью специальных функций.

Покажем это, для чего введем функцию ψ такую, что

$$s_1^{(1)} = \frac{\alpha}{2G^{(1)}}\left[(1-\nu^{(1)})\frac{d^2}{dz^2} + \alpha^2\nu^{(1)}\right]\psi, \qquad s_3^{(1)} = \alpha^3\psi \tag{3.8}$$

$$s_2^{(1)} = \left[\frac{\alpha^2}{G^{(1)}}\frac{d}{dz} - \frac{d}{dz}\left(\frac{1-\nu^{(1)}}{2G^{(1)}}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\alpha^2\nu^{(1)}}{2G^{(1)}}\right)\right]\psi, \qquad s_4^{(1)} = \alpha^2\frac{d\psi}{dz}$$

Подставляя выражения (3.8) в однородную систему дифференциальных уравнений, соответствующую системе (2.5), найдем уравнение для функции ψ

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\left[\frac{1-\nu^{(1)}}{G^{(1)}}\left(\frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2\right)\psi\right] + \alpha^2\psi\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G^{(1)}}\right) = 0 \tag{3.9}$$

Общее решение этого уравнения для модуля сдвига вида (3.7) приведено в работах [7, 10]. С его помощью по формулам (3.8) нетрудно найти функции $s_j^{(1)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ и, следовательно, построить фундаментальную матрицу системы (2.5) при $g^{(1)} = 0$. Четырьмя произвольными постоянными следует распорядиться таким образом, чтобы фундментальная матрица обращалась в единичную при $z = z_0$. Согласно определению она и будет матрицантом.

Легко получить решение уравнения (3.9) и в случае, когда модуль сдвига меняется по закону $G_{(z)}^{(1)} = G_0 / (1 + cz)$, а коэффициент Пуассона — произвольная функция координаты z. Оно имеет вид

$$\psi = C_1e^{\alpha z} + C_2e^{-\alpha z} + C_3\left[e^{\alpha z}\int_0^z\chi(t)\,dt - e^{-\alpha z}\int_0^z\chi(t)\,e^{2\alpha t}dt\right] +$$

$$+ C_4\left[e^{-\alpha z}\int_0^z\chi(t)\,dt - e^{\alpha z}\int_0^z\chi(t)\,e^{-2\alpha t}dt\right], \quad \chi(z) = G^{(1)}(z)/[1-\nu^{(1)}(z)]$$

Рассмотрим теперь наиболее общий случай изменения упругих свойств, когда модуль сдвига и коэффициент Пуассона слоя — ограниченные и интегрируемые по Риману функции координаты z.

В этом случае матрицант $\Omega_{z_0}{}^z(\alpha A^{(1)})$ можно найти, если воспользоваться следующим представлением оператора [8]:

$$\Omega_{z_0}{}^z(\ldots) = E + \int_{z_0}^z(\ldots)dz + \int_{z_0}^z(\ldots)dz\int_{z_0}^z(\ldots)dz + \ldots \tag{3.10}$$

Применяя этот оператор к матрице $\alpha A^{(1)}$ и взяв достаточное число слагаемых, можно обеспечить любую наперед заданную точность. Однако в большинстве случаев проще воспользоваться представлением матрицанта в виде мультипликативного интеграла [8]

$$(3.11)\qquad \Omega_{z_0}{}^{z}(\alpha A^{(1)}) = \int\limits_{z_0}^{z}\!\!\!\frown (E + \alpha A^{(1)}dz)$$

Для его вычисления разобьем интервал $[z_0, z]$ на j произвольных частей, введя промежуточные точки $z_1, z_2, \ldots, z_{j-1}$ и положив $\Delta^* z_k = z_k - z_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, j;\ z_j = z)$. Кроме того, в интервале $[z_{k-1}, z_k]$ выберем промежуточную точку ζ_k $(k = 1, 2, \ldots, j)$ и обозначим

$$A^{(1)}\big|_{z=\zeta_k} = A_k$$

Так как мультипликативный интеграл определяется следующими интегральными произведениями [8]:

$$(3.12)\qquad \int\limits_{z_0}^{z}\!\!\!\frown (E + \alpha A^{(1)}dz) = \lim_{\substack{\Delta^* z_k \to 0 \\ j \to \infty}} [e^{\alpha A_j \Delta^* z_k} \ldots e^{\alpha A_2 \Delta^* z_2} e^{\alpha A_1 \Delta^* z_1}]$$

$$(3.13)\qquad \int\limits_{z_0}^{z} (E + \alpha A^{(1)}dz) = \lim_{\substack{\Delta^* z_k \to 0 \\ j \to \infty}} (E + \alpha A_j \Delta^* z_j) \ldots (E + \alpha A_1 \Delta^* z_1)$$

то любое из них может быть использовано для приближенного вычисления матриканта, если j придавать конечные значения.

Формулы (3.12) и (3.13) особенно удобны тем, что идеально приспособлены для счета на ЭЦВМ.

Как уже говорилось, частный случай рассмотренной задачи обсуждался в работах [5, 6], где исследовались осадки неоднородного слоя, покоящегося на жестком основании, от воздействия приложенной к граничной поверхности нормальной осесимметричной нагрузки. Предполагалось, что коэффициент Пуассона постоянен, а модуль упругости $E(z)$ непрерывно меняется с глубиной.

Окончательная формула для вычисления осадок представлена несобственным интегралом некоторой функции, для нахождения которой необходимо вычислить мультипликативный интеграл в форме, подобной (3.13).

Однако, сравнивая матрицу $A^{(1)}$ с соответствующей матрицей из работ [5, 6], можно заключить, что элементы последней сложнее для вычислений и содержат производные $dE(z) / dz$. Это обстоятельство говорит о том, что и в данной частной задаче рассмотренному выше решению следует отдать предпочтение из-за его большей простоты.

4. Укажем путь решения аналогичной задачи при воздействии на слой массовых сил X.

Частный случай этой задачи — воздействие на граничную поверхность сдвигающей нагрузки — представляет интерес при расчете дорожных одежд на силовые воздействия.

Для решения нужно положить, что функция $X = X(r, \beta, z)$ представима в виде двойного разложения в ряд Фурье по координате β и интеграл Ханкеля по r, т. е. в виде выражения (2.1), если в нем заменить Z на X.

Тогда из формул (1.2) найдем

$$\varphi_1 = -\partial\Psi / \partial x, \qquad \varphi_2 = -\partial\Psi / \partial y$$

$$\Psi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\beta} \int\limits_0^\infty g(z, \alpha, m) J_m(\alpha r) \frac{d\alpha}{\alpha}$$

Форма записи функций φ_1 и φ_2 подсказывает, в каком виде нужно разыскивать функции S_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, N_1, N_2, чтобы добиться в системах (1.3), (1.4) разделения переменных. Это позволит свести исходную пространственную задачу теории упругости к краевым задачам для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Дальнейший ход решения подобен изложенному выше.

Поступила 23 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган Б. И., Зинченко В. Д.* Напряженное состояние неоднородного слоя, покоящегося на упругом полупространстве. Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура, 1960, № 3.
2. *Плевако В. П., Батраков О. Т., Медведкова Н. А.* Совершенствование расчета нежестких дорожных одежд. Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура, 1973, № 5.
3. *Плевако В. П.* Напряженное состояние неоднородного слоя, покоящегося на упругом полупространстве. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 4.
4. *Gibson R. E., Brown P. T., Andrews K. R. F.* Some results concerning displacements in a non-homogeneous elastic layer. Z. angew. Math. und Phys., 1971, Bd 22, Nr 5.
5. *Шевляков Ю. А., Наумов Ю. А., Чистяк В. Н.* К расчету неоднородных оснований. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 9.
6. *Наумов Ю А., Чистяк В. Н.* Осадка неоднородного слоя. Сб. тр. механ.-матем. фак. по заказам пром-сти. Днепропетр. ун-т, вып. 1, 1971.
7. *Плевако В. П.* К теории упругости неоднородных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.
9. *Шехтер О. Я., Приходченко О. Е.* Распределение напряжений и перемещений в упругом слое при действии внутри него сосредоточенных сил. Основания, фундаменты и механика грунтов, 1964, № 5.
10. *Плевако В. П.* Деформации неоднородного полупространства под действием поверхностной нагрузки. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 6.