Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В. Л. Бердичевский

(Москва)

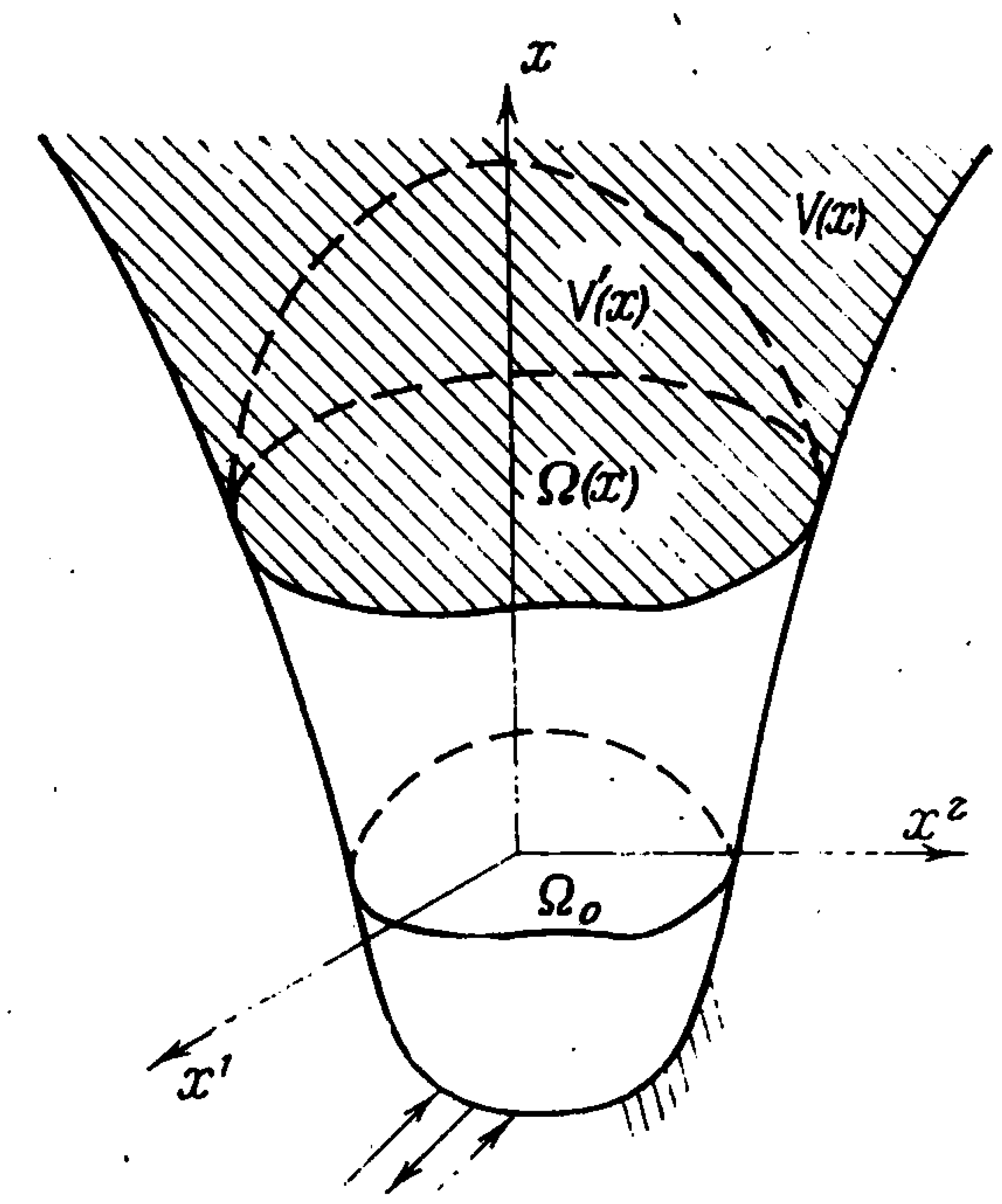
В работе Тупина [1] было доказано, что напряжения в цилиндрическом стержне, вызванные приложенной на торце самоуравновешенной нагрузкой, убывают при удалении от торца по экспоненциальному закону. Для постоянной в экспоненте была получена оценка через наименьшую собственную частоту колебаний упругого цилиндра.

Ниже дается определение скорости затухания энергии для тел произвольной формы и ее оценка через некоторые характеристики геометрии тела, в том числе через постоянные Пуанкаре и Корна поперечного сечения. В случае круглого стержня эти постоянные известны и оценка доводится до числа.

Рассматривается зависимость скорости затухания энергии от формы тела. Показано, что для тел типа конуса имеет место степенная оценка затухания энергии, которая в пределе при вырождении конуса в цилиндр переходит в экспоненциальную оценку. Из оценок для энергии вытекают аналогичные оценки для напряжений.

1. Определение скорости затухания энергии. Рассмотрим в рамках геометрически линейной теории упругое тело, вообще говоря, неоднородное, анизотропное и физически нелинейное (см. [2]). Недеформированное состояние тела отнесем к декартовой системе координат $x^\circ \equiv x$, x^α (греческие индексы α, β, γ, . . . пробегают значения 1, 2).

Пусть часть тела, лежащая в полуплоскости $x > 0$, свободна от нагрузок, а напряженное состояние вызвано какими-нибудь внешними воздействиями на часть тела, расположенную в полуплоскости $x \leqslant 0$. Дальше будут изучаться параметры, не зависящие от характера этих воздействий, поэтому, не ограничивая общности, можно принять, что деформация тела, расположенного в полуплоскости $x \geqslant 0$, вызвана некоторыми поверхностными силами, приложенными в сечении тела плоскостью $x = 0$.



Фиг. 1

Обозначим через $V(x)$ множество точек тела с абсциссой, большей x, $\Omega(x)$ — сечение тела плоскостью $x = \text{const}$, отделяющее $V(x)$ от остальной части тела (см. фиг. 1), U — упругую энергию единицы объема, E — упругую энергию тела $V(x)$

$$E = \int\limits_{V(x)} U dx^1 dx^2 dx$$

Предполагается, что область $\Omega(x)$ ограничена при каждом x.

Пусть упругое тело $V(x)$ деформировано приложенными на Ω поверхностными силами p^i, и для каждого поля поверхностных сил в результате решения задачи теории упругости вычислена соответствующая плотность упругой энергии U_p. Индекс p подчеркивает, что эта плотность зависит от приложенной нагрузки.

Рассмотрим минимальное значение отношения «поверхностной» и объемной упругих энергий

$$\gamma = \inf_{p^i}\left(\int\limits_{\Omega(x)} U_p dx^1 dx^2 \Big/ \int\limits_{V(x)} U_p dx^1 dx^2 dx\right) \tag{1.1}$$

Здесь минимум вычисляется по всем возможным значениям поверхностной нагрузки p^i.

Очевидно, что постоянная γ зависит только от геометрии области $V(x)$ и упругих постоянных и имеет размерность (длина)$^{-1}$. Если положение тела относительно системы координат фиксировано, то γ становится функцией x.

Функция $\gamma(x)$ определяет скорость затухания упругой энергии. Это вытекает из следующего утверждения.

Пусть упругое тело $V_0 \equiv V(0)$ деформировано самоуравновешенными поверхностными силами, приложенными на $\Omega_0 \equiv \Omega(0)$. Тогда для упругой энергии $E(x)$ части $V(x)$ тела V_0 имеет место оценка

$$E(x) \leqslant E(0) \exp\left(-\int\limits_0^x \gamma(x)\, dx\right) \tag{1.2}$$

Действительно, из (1.1) следует, что для любого x

$$\gamma(x) E(x) \leqslant \int\limits_{\Omega(x)} U dx^1 dx^2 \tag{1.3}$$

Используя формулу

$$\frac{dE}{dx} = -\int\limits_{\Omega} U dx^1 dx^2 \tag{1.4}$$

соотношение (1.3) можно переписать в виде дифференциального неравенства

$$\gamma(x) E(x) + \frac{dE(x)}{dx} \leqslant 0$$

из которого следует (1.2).

Замечания. 1°. В случае полубесконечного однородного упругого цилиндра постоянная γ, очевидно, полностью определяется геометрией поперечного сечения цилиндра и упругими постоянными и не зависит от x. Поэтому

$$E(x) \leqslant E(0)\, e^{-\gamma x} \tag{1.5}$$

2°. В работе [1] оценка, соответствующая (1.5), имеет вид

$$E(x) \leqslant E(0) \exp\left[-\frac{x-l}{s(l)}\right], \qquad s(l) = \left(\frac{\mu}{\rho\omega_0^2(l)}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

$$\mu^* = \frac{\mu_M^2}{\mu_m}$$

Здесь $\omega_0(l)$ — наименьшая частота собственных колебаний цилиндра высоты l, μ_M и μ_m — соответственно максимальный и минимальный модули упругости, ρ — плотность, l — произвольная длина, не превосходящая полудлины стержня. При выводе (1.6) было неявно использовано, что $x > l$. Неравенства (1.2), (1.5) имеют место для любых $x \geqslant 0$.

3°. Известно [1], что из оценки упругой энергии вытекает поточечная оценка для напряжений, поэтому достаточно рассмотреть вопрос о скорости затухания упругой энергии. Скорость затухания напряжений для линейно-упругого тела в два раза меньше скорости затухания упругой энергии.

4°. Выбор в качестве семейства поверхностей $\Omega(x)$ плоскостей $x = \mathrm{const}$ не является существенным. Можно было бы взять любое другое семейство поверхностей, отделяющих область приложения нагрузки от остальной части тела. Например, при вычислении скорости затухания напряжений, вызванных самоуравновешенной нагрузкой, приложенной на компактном участке границы полупространства, в качестве поверхностей $\Omega(x)$ естественно взять полусферы. Выбор поверхностей диктуется возможностью получать оценки для γ.

В определенных выше терминах существо принципа Сен-Венана заключается в утверждении: γ отлична от нуля и «не слишком мала». «Доказательство» принципа Сен-Венана сводится к построению «достаточно хороших» оценок γ снизу.

Более аккуратная формулировка принципа Сен-Венана наталкивается на трудности, связанные с введением «критерия малости» γ. Например, для стержней в качестве «критерия малости», по существу, берется условие $\varepsilon L^{-1} < \gamma$, где L — диаметр поперечного сечения стержня, ε — число порядка единицы. Вместе с тем можно показать, что для стержней фиксированного диаметра γ может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора поперечного сечения.

Подобные опровергающие примеры имеются для всех известных формулировок принципа Сен-Венана. Разумеется, как только изучены количественные характеристики затухания напряжений типа γ, потребность в каких-либо эвристических формулировках отпадает.

В связи с изложенным возникает ряд вопросов.

1) Какова фактическая скорость затухания энергии (или напряжений) в цилиндрических стержнях с простейшими формами поперечных сечений?

2) Как оценить скорость затухания энергии в цилиндрическом стержне через параметры, более доступные, чем собственная частота колебаний, например, через геометрические характеристики поперечного сечения ?[1].

3) Как оценить скорость затухания энергии в телах, геометрическая форма которых содержит больше произвольных параметров, чем у стержня, например, в телах типа конуса?

4) Какова скорость затухания энергии в тонких телах типа пластин и оболочек?

5) Какова скорость затухания «энергии» для произвольных эллиптических систем? [2]

Этот круг вопросов почти не изучен. Неизвестна даже скорость затухания энергии в стержне круглого поперечного сечения.

В последнее время отдельные результаты получены в работах [4–7]. Результаты данной работы относятся к вопросам 2) и 3).

---

[1] Примером такого типа оценок могут служить оценки жестокости кручения стержня, электростатической емкости тела и наименьшей собственной частоты колебаний мембраны, полученные в работе [3].

[2] Ясно, что принцип Сен-Венана имеет место не только в теории упругости. Например, для потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости в предыдущем изложении надо сделать следующие изменения: упругая энергия → кинетическая энергия, напряжения → скорость, нагрузка самоуравновешена на Ω → расход жидкости через Ω равен нулю.

2. Предположения относительно упругой энергии. Обозначим через $w \equiv w^0$, w^α проекции перемещений на оси x, x^α, через ε_{ij} — компоненты тензора деформаций: $\varepsilon_{ij} = w_{(i,j)}$. Здесь круглыми скобками в индексах отмечается операция симметрирования, запятой — дифференцирование по x^i, латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2. При написании компонент векторов и тензоров индекс нуль обычно опускается, так что $w^\circ \equiv w$, $\varepsilon_{0\alpha} \equiv \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon_{00} \equiv \varepsilon$ и т. п.

Упругую энергию единицы объема U и компоненты тензора напряжений p^{ij} удобно считать безразмерными, относя их к модулю сдвига μ (для анизотропного тела μ — любой из модулей упругости).

Упругая энергия U для каждой частицы тела с координатами x^i по условию является выпуклой, дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций $U = U(x^i, \varepsilon_{ij})$:

Не ограничивая общности, можно принять, что

$$U(x^i, 0) = 0, \qquad \partial U / \partial\varepsilon_{ij}|_{\varepsilon_{ij}=0} = 0 \tag{2.1}$$

Из выпуклости U по ε_{ij} следует неравенство

$$U \leqslant \varepsilon_{ij}\partial U / \partial\varepsilon_{ij} \tag{2.2}$$

Предположим, что упругую энергию U можно ограничить сверху и снизу квадратичными формами по компонентам тензора деформаций

$$\begin{gathered}{}^1/_2\,(A_1\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + A_2\varepsilon^2 + 2A_3\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha) \leqslant U(x^i, \varepsilon_{ij}) \leqslant \\ \leqslant {}^1/_2\,(B_1\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\alpha\beta} + B_2\varepsilon^2 + 2B_3\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha)\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $A_1, \ldots, B_3$ — постоянные, не зависящие от координат.

Введем функцию $U^*(x^i, p^{ij})$ — преобразование Юнга функции $U(x^i, \varepsilon_{ij})$ по переменным ε_{ij}

$$U^*(x^i, p^{ij}) = \sup_{\varepsilon_{ij}}\,[p^{ij}\varepsilon_{ij} - U(x^i, \varepsilon_{ij})] \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует

$$\begin{gathered}{}^1/_2\,(B_1^{-1}p_{\alpha\beta}p^{\alpha\beta} + B_2^{-1}p^2 + 2B_3^{-1}p_\alpha p^\alpha) \leqslant U^*(x^i, p^{ij}) \leqslant \\ \leqslant {}^1/_2(A_1^{-1}p_{\alpha\beta}p^{\alpha\beta} + A_2^{-1}p^2 + 2A_3^{-1}p_\alpha p^\alpha)\end{gathered} \tag{2.5}$$

В частности, если U — квадратичная форма по ε_{ij}, то подстановка в U выражений компонент тензора деформаций ε_{ij} через компоненты тензора напряжений $p^{ij} = \partial U / \partial\varepsilon_{ij}$ приведет к соотношению $U(x^i, \varepsilon_{ij}(p^{kl})) = U^*(x^i, p^{ij})$, и (2.5) дает оценку упругой энергии через квадратичные формы по компонентам тензора напряжений.

Обозначим через B постоянную в неравенстве

$$p^2 + p_\alpha p^\alpha \leqslant BU \tag{2.6}$$

Если U — квадратичная форма по ε_{ij}, то

$$B^{-1} = {}^1/_2 \min(B_2^{-1}, 2B_3^{-1})$$

В случае однородного изотропного тела

$$U = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{\mu}(\varepsilon + \varepsilon_\alpha{}^\alpha)^2 + 2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha\right]$$

поэтому можно положить

$$A_1 = 2\alpha, \quad A_2 = 2 + \frac{\lambda}{\mu}\frac{1-\alpha}{\lambda/\mu + 1 - \alpha} = 2\,\frac{1+\nu-(1-\nu)\alpha}{1-(1-2\nu)\alpha}, \quad A_3 = 2$$

$$B_1 = 2\max\left\{1{,}1 + \beta\frac{\lambda}{\mu}\right\}, \quad B_2 = 2 + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\beta}{\beta-1} =$$

$$= 2\left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{\beta}{\beta-1}\right], \quad B_3 = 2$$

$$(0 < \alpha \leqslant 1, \quad 1 < \beta < +\infty)$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе, ν — коэффициент Пуассона, α, β — произвольные параметры, изменяющиеся в указанных пределах. В частности, при $\alpha = 1$, $\beta = 3/2$, $\nu \geqslant 0$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 2, \qquad B_1 = B_2 = 2 + 3\frac{\lambda}{\mu}, \qquad B_3 = 2$$

$$B = 4\left(1 + \frac{3\lambda}{2\mu}\right)$$

3. **Постоянные b и b_n.** Неравенство (1.6) дает оценку снизу постоянной γ через собственную частоту колебаний упругого цилиндра. Дальше будут рассмотрены оценки γ через другие характеристики тела, в том числе через постоянные b и b_n.

Постоянная b. Рассмотрим в некоторой ограниченной области V векторное поле w^i. Для всех векторных полей w^i, удовлетворяющих ограничениям

$$\int_V w^i d\tau = 0, \qquad \int_V (w_{i,j} - w_{j,i})\, d\tau = 0 \tag{3.1}$$

имеет место неравенство

$$b\int_\Omega w_i w^i d\sigma \leqslant \int_V U d\tau \tag{3.2}$$

где Ω — часть границы ∂V области V, постоянная b — наилучшая постоянная в неравенстве (3.2). Очевидно, что b зависит только от V, Ω и упругих модулей.

Неравенство (3.2) следует из (2.3) и неравенств Пуанкаре [3,8] (3.3), Эрлиха [9] (3.4) и Корна [10–13] (3.5)

$$\Lambda_P{}^2\int_V u^2 d\tau \leqslant \int_V u_{,i}u^{,i} d\tau, \qquad \int_V u\, d\tau = 0 \tag{3.3}$$

$$\int_{\partial V} u^2 d\sigma \leqslant A\left(\int_V u_{,i}u^{,i}d\tau + \int_V u^2 d\tau\right) \tag{3.4}$$

$$\int_V w_{i,j}w^{i,j} d\tau \leqslant K\int_V U d\tau \tag{3.5}$$

Неравенство Корна выполняется для функций, удовлетворяющих второму из ограничений (3.1).

Замечания. 1°. Если V — цилиндр высоты h, Ω — основание цилиндра, то

$$b \to 0 \quad \text{при } h \to 0 \text{ и } h \to +\infty \tag{3.6}$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим поля перемещений (ось цилиндра параллельна оси x, основание цилиндра Ω лежит в плоскости $x = 0$)

$$w = u_0 \cos \frac{2\pi x}{h}, \quad w^\alpha = 0, \quad u_0 = \text{const}, \quad h \to +\infty \tag{3.7}$$

$$w = u(x^\alpha), \quad w_\alpha = -u_{,\alpha}\left(x - \frac{h}{2}\right), \quad \int_\Omega u(x^\alpha)\, d\sigma = 0 \tag{3.8}$$

$$\int_\Omega u_{,\alpha} d\sigma = 0, \quad h \to 0$$

Очевидно, что условия (3.1) для полей перемещений (3.7) и (3.8) выполнены. Подставляя (3.7) и (3.8) в (3.2) и заменяя U на большую квадратичную форму, согласно (2.3), получим для b оценки сверху

$$b \leqslant B_2\pi^2 / h, \quad h \to \infty$$

$$b \leqslant \frac{B_1 h^3}{24} \int_\Omega u_{,\alpha\beta} u^{,\alpha\beta} d\sigma \Big/ \int_\Omega \left(u^2 + \frac{h^2}{4} u_{,\alpha} u^{,\alpha}\right) d\sigma, \quad h \to 0$$

из которых следует (3.6).

2°. Свойство b (3.6) позволяет ожидать, что из всех областей V с фиксированным основанием Ω можно выбрать область с максимальным значением b.

Постоянная b_n. Обозначим через b_n наилучшую постоянную в неравенстве

$$b_n \int_\Omega w_n^2 d\sigma \leqslant \int_V U d\tau, \qquad w_n = w^i n_i \tag{3.9}$$

Здесь n_i — компоненты вектора нормали к границе области V. Поле вектора перемещений надо подчинить еще условиям, исключающим твердые движения. Ясно, что этих условий должно быть меньше, чем для неравенства (3.2). Например, если Ω — область, лежащая в плоскости $x = \text{const}$, то в качестве таких условий можно взять ограничения

$$\int_V (w_{,\alpha} - \partial w_\alpha / \partial x)\, d\tau = 0, \qquad \int_V w\, d\tau = 0 \tag{3.10}$$

Замечание. Рассмотрение неравенства (3.9) на полях перемещений (3.7) и (3.8) показывает, что для b_n имеет место свойство (3.6).

4. Оценка скорости затухания энергии через постоянную b. Пусть внешние силы, приложенные на Ω_0, вызывают в сечении тела $\Omega(x)$ поверхностные нагрузки p^i. Обозначим через $V'(x)$ подобласть области $V(x)$ с основанием $\Omega(x)$, для которой постоянная b известна и принимает как можно большее значение, и рассмотрим деформацию тела $V'(x)$ поверхностными силами p^i. Для упругой энергии E' тела $V'(x)$, согласно (2.2), (3.2) и уравнениям равновесия $p^{ij}_{,j} = 0$, $p^{ij} n_j = p_i$, имеем

$$E' = \int_{V'} U d\tau \leqslant \int_{V'} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} d\tau = \int_{V'} p^{ij} w_{i,j} d\tau = \int_{\Omega(x)} p^i w_i dx^1 dx^2 \tag{4.1}$$

Если прибавить к вектору перемещений в (4.1) вектор, соответствующий твердому движению, то левая часть равенства не изменится, так как упругая энергия инвариантна относительно трансляций и поворотов, а правая часть не изменится за счет того, что нагрузка самоуравновешена на $\Omega(x)$. Этот произвол используем для того, чтобы удовлетворить ограничению (3.1). По неравенству Коши — Буняковского

$$\int_\Omega p^i w_i d\sigma \leqslant \Big(\int_\Omega p_i p^i d\sigma\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega w_i w^i d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_\Omega p_i p^i d\sigma\Big)^{1/2} (b^{-1}E')^{1/2}$$

Отсюда

$$bE' \leqslant \int_\Omega p_i p^i d\sigma \tag{4.2}$$

С другой стороны (см. [14], более общее утверждение доказано в дополнении) $E \leqslant E'$. Используя (2.6), из (4.2) получим

$$bE \leqslant \int_\Omega p_i p^i d\sigma \leqslant B \int_\Omega U d\sigma \tag{4.3}$$

Неравенство (4.3) приводит к следующей оценке для γ:

$$b / B \leqslant \gamma \tag{4.4}$$

Замечание. Для изотропного тела с $\lambda \geqslant 0$ постоянная B дается формулой

$$B = 4\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\,\frac{\beta}{\beta - 1}\right)$$

где β — произвольное число между 1 и $+\infty$. Поскольку b и γ не зависят от β, в качестве B можно взять $\inf B(\beta) = 4(1 + \lambda / 2\mu)$. Из этой формулы следует, что оценка (4.4) ухудшается при бо́льших λ / μ, так как $B \to \infty$ при $\lambda / \mu \to \infty$.

По-видимому, это не связано с существом дела. Отметим, что таким же свойством обладает оценка (1.6). Действительно, для наименьшей собственной частоты колебаний можно написать

$$1 / (\rho\omega_0^2) \leqslant R / \mu_m$$

где постоянная R не зависит от упругих модулей и определяется только геометрией тела. Поэтому

$$s(l) \leqslant R^{1/2} \mu_M / \mu_m$$

и оценка (1.6) соответствует неравенству

$$R^{-1/2} \mu_m / \mu_M \leqslant \gamma$$

Для изотропного тела $\mu_m = 2\mu$, $\mu_M = 3\lambda + 2\mu$, и оценка для γ ухудшается при увеличении λ / μ.

5. Оценка скорости затухания энергии через b_n. Проблема вычисления b, так же как проблема вычисления ω_0 в оценке (1.6), представляют собой сложные задачи. В связи с этим интересна оценка γ через b_n, поскольку постоянную b_n искать проще, чем b.

Дальше для получения более точных оценок примем, что тело физически линейно (U — квадратичная форма по компонентам тензора деформаций). Под $V'(x)$ будем понимать подобласть $V(x)$, для которой постоянная b_n известна и принимает возможно большее значение.

Аналогично п. 4 имеем

$$(5.1)\quad E' = \frac{1}{2}\int\limits_{V'(x)} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij}\, d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(x)} p^i w_i d\sigma = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(pw + p^\alpha w_\alpha)\, d\sigma$$

Произвол в выборе вектора перемещений используем для того, чтобы удовлетворить ограничениям (3.10), а также соотношениям

$$(5.2)\qquad \int\limits_{\Omega} w_\alpha d\sigma = 0, \qquad \int\limits_{\Omega}(w_{\alpha,\beta} - w_{\beta,\alpha})\, d\sigma = 0$$

Для двумерных векторных полей, подчиненных условиям (5.2), имеет место неравенство

$$(5.3)\qquad \Lambda_e^2 \int\limits_{\Omega} w_\alpha w^\alpha d\sigma \leqslant \int\limits_{\Omega} \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} d\sigma$$

Оно следует из двумерных аналогов неравенств (3.3) и (3.5).

Из (5.1) при помощи (3.9), (5.3) и неравенства Коши — Буняковского находим

$$(5.4)\qquad 2E' \leqslant \Big(\int\limits_{\Omega} p^2 d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega} w^2 d\sigma\Big)^{1/2} + \Big(\int\limits_{\Omega} p_\alpha p^\alpha d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{\Omega} w_\alpha w^\alpha d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(2B_2\int\limits_{\Omega} U d\sigma\Big)^{1/2}(b_n^{-1}E')^{1/2} + \Big(B_3\int\limits_{\Omega} U d\sigma\Big)^{1/2}\Big(\Lambda_e^{-2}\int\limits_{\Omega} 2A_1^{-1} U d\sigma\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha E' + \Big(\frac{1}{2}\alpha^{-1}B_2 b_n^{-1} + (2B_3A_1^{-1})^{1/2}\Lambda_e^{-1}\Big)\int\limits_{\Omega} U d\sigma$$

где α — произвольный положительный параметр. Из (5.4)

$$E \leqslant E' \leqslant (2-\alpha)^{-1}(1/_2\alpha^{-1}B_2b_n^{-1} + (2B_3A_1^{-1}\Lambda_e^{-2})^{1/2})\int\limits_{\Omega} U d\sigma$$

Минимизируя множитель в правой части по α и подставляя результат в (1.1), придем к следующей оценке снизу для γ:

$$(5.5)\qquad \frac{8b_n}{B_2}\Big[1 + \Big(1 + \frac{4b_n}{B_2\Lambda_e}\Big(\frac{2B_3}{A_1}\Big)\Big)^{1/2}\Big]^{-2} \leqslant \gamma$$

В левой части (5.5) от x зависит b_n и Λ_e.

Замечания. 1°. Для изотропного тела в формуле (5.5) следует положить $B_3 = 2$, взять максимальное значение $A_1 = 2$ и минимальное значение $B_2 = 2 + \lambda / \mu$, так как правая часть (5.5) — убывающая функция по B_2 и возрастающая функция по A_1

$$(5.6)\qquad \frac{4b_n(1-2\nu)}{1-\nu}\Big[1 + \Big(1 + \frac{2\sqrt{2}\, b_n(1-2\nu)}{(1-\nu)\Lambda_e}\Big)^{1/2}\Big]^{-2} \leqslant \gamma$$

2°. Постоянную Λ_e можно оценить через постоянную Пуанкаре (3.3) и постоянную Корна K области Ω

$$(5.7)\qquad \Lambda_e^{-2} \leqslant \Lambda_P^{-2}K$$

Здесь под постоянной Корна понимается наилучшая постоянная в неравенстве

$$(5.8)\qquad \int\limits_{\Omega} w_{\alpha,\beta}w^{\alpha,\beta} d\sigma \leqslant K\int\limits_{\Omega} \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} d\sigma$$

Функции w_α в (5.8) удовлетворяют второму из ограничений (5.2). Используя (5.7), (5.6) можно переписать в виде

$$\frac{4(1-2\nu)\,b_n}{1-\nu}\left[1+\left(1+\frac{2\sqrt{2K}\,b_n(1-2\nu)}{(1-\nu)\Lambda_P}\right)^{1/2}\right]^{-2}\leqslant\gamma \tag{5.9}$$

6. Оценка b_n для стержня. Рассмотрим цилиндрический стержень высоты h $(0\leqslant x\leqslant h)$ с поперечным сечением Ω. Начало системы координат x^α возьмем в центре тяжести поперечного сечения. Введем обозначения

$$u(x^\alpha)=\int_0^h wx(h-x)\,dx\Big/\int_0^h x(h-x)\,dx \tag{6.1}$$

$$\psi^\alpha(x^\beta)=\int_0^h w^\alpha\left(x-\frac{h}{2}\right)dx\Big/\int_0^h\left(x-\frac{h}{2}\right)^2dx$$

При построении оценки b_n удобно вместо ограничений на компоненты вектора перемещений (3.10) наложить ограничения

$$\int_\Omega u\,d\sigma=0,\qquad\int_\Omega(u_{,\alpha}-\psi_\alpha)\,d\sigma=0 \tag{6.2}$$

Очевидно, что предыдущие рассуждения не зависят от вида ограничений, исключающих твердые движения.

6.1. Докажем неравенство

$$\int_\Omega w_0^2\,d\sigma\leqslant(1+\alpha)\int_\Omega u^2d\sigma+\frac{13}{35}(1+\alpha^{-1})\,h\int_\Omega\int_0^h\varepsilon^2d\sigma dx \tag{6.3}$$

где $w_0=w(0,\,x^\alpha)$, α — произвольное положительное число.

Действительно

$$w(x,x^\alpha)-w_0=\int_0^x\varepsilon dx,\qquad\varepsilon\equiv\frac{\partial w}{\partial x}$$

Умножая на $6(h-x)x\,/\,h^3$ и интегрируя по x, получим

$$w_0=u-6h^{-3}\int_0^h(h-x)\,x\left(\int_0^x\varepsilon d\xi\right)dx=$$

$$=u-h\int_0^1(1-3\xi^2+2\xi^3)\,\varepsilon(h\xi,x^\alpha)\,d\xi$$

Возводя обе части в квадрат и используя неравенство Коши — Буняковского, придем к соотношению

$$w_0^2\leqslant(1+\alpha)\,u^2(x^\alpha)+(1+\alpha^{-1})\,\frac{13h}{35}\int_0^h\varepsilon^2dx$$

интегрирование которого по области Ω дает (6.3).

6.2. В работе [15] было показано, что точную оценку снизу упругой энергии цилиндрического тела (пластины или стержня) дает упругая энергия модели Рейсснера. Соответствующее неравенство применительно к рассматриваемому случаю перепишем в виде

$$I \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^h [A_1 \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + 2A_3\varepsilon_\alpha \varepsilon^\alpha]\, d\sigma dx \tag{6.4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[A_1 \frac{h^3}{12}\psi_{(\alpha,\beta)}\psi^{(\alpha,\beta)} + A_3 \frac{5h}{12}(u_{,\alpha} + \psi_\alpha)(u^{,\alpha} + \psi^\alpha)\right] d\sigma$$

6.3. Обозначим через m наилучшую постоянную в неравенстве

$$\int_\Omega u^2 d\sigma \leqslant mI \tag{6.5}$$

Здесь u и ψ_α удовлетворяют ограничениям (6.2).

6.4. Из (6.3) — (6.5) получим

$$\int_\Omega w_0^2 d\sigma \leqslant (1+\alpha)m\cdot \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^h [A_1\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + 2A_3\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha]\, d\sigma dx +$$

$$+ \frac{13}{35}(1+\alpha^{-1})\, h\cdot 2A_2^{-1}\int_\Omega \int_0^h \frac{1}{2} A_2 \varepsilon^2 d\sigma dx \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{(1+\alpha)\,m,\ \frac{26h}{35A_2}(1+\alpha^{-1})\right\}\int_\Omega \int_0^h U d\sigma dx$$

Минимизируя коэффициент в правой части по α, приходим к следующей оценке:

$$\left(m + \frac{26h}{35A_2}\right)^{-1} \leqslant b_n \tag{6.6}$$

Осталось оценить постоянную m через более доступные характеристики поперечного сечения.

6.5. Обозначим через $\varkappa$ наилучшую постоянную в неравенстве

$$\left(\int_\Omega u_{,\alpha} x_\beta e^{\alpha\beta} d\sigma\right)^2 \leqslant \varkappa \int_\Omega u_{,\alpha}u^{,\alpha} d\sigma \cdot \int_\Omega x_\alpha x^\alpha d\sigma \tag{6.7}$$

Здесь $e^{\alpha\beta}$ — двумерный символ Леви-Чивита. Очевидно, что в случае, когда Ω — круг, $\varkappa = 0$.

6.6. Обозначим через Λ наилучшую постоянную в неравенстве

$$\Lambda^2 \int_\Omega u^2 d\sigma \leqslant \int_\Omega \left(u_{,\alpha}u^{,\alpha} + \frac{3}{1-\varkappa} c_\alpha c^\alpha\right) d\sigma \tag{6.8}$$

где

$$\int_\Omega u d\sigma = 0, \qquad \Omega c_\alpha = \int_\Omega u_{,\alpha} d\sigma \tag{6.9}$$

Буквой Ω обозначается также площадь области Ω. Очевидно, что

$$\Lambda^{-2} \leqslant \Lambda_P^{-2} \tag{6.10}$$

6.7. Сделаем в неравенстве (6.5) замену $\psi^\alpha \to \psi'^\alpha$

(6.11) $$\psi^\alpha = c^\alpha + \omega e^{\alpha\beta} x_\beta + \psi'^\alpha$$

(6.12) $$\omega = \frac{1}{2\Omega} \int_\Omega e^{\alpha\beta} \psi_{\alpha,\beta} d\sigma$$

где c^α определено по формуле (6.9).

Согласно второму ограничению (6.2) и (6.11), (6.12), функции ψ'^α удовлетворяют условию

(6.13) $$\int_\Omega \psi'^\alpha d\sigma = 0, \quad \int_\Omega (\psi'_{\alpha,\beta} - \psi'_{\beta,\alpha})\, d\sigma = 0$$

Поэтому, в силу (5.3)

(6.14) $$\int_\Omega \psi_{(\alpha,\beta)} \psi^{(\alpha,\beta)} d\sigma = \int_\Omega \psi'_{(\alpha,\beta)} \psi'^{(\alpha,\beta)} d\sigma \geqslant \Lambda_e^2 \int_\Omega \psi_\alpha' \psi'^\alpha d\sigma$$

Следовательно

(6.15) $$I \geqslant \frac{5hA_3}{24} \int_\Omega \left[\frac{B_1 h^2 \Lambda_e}{5A_3} \psi_\alpha' \psi'^\alpha + (u_{,\alpha} + c_\alpha + \omega e_{\alpha\beta} x^\beta + \psi_\alpha')^2 \right] d\sigma \geqslant$$
$$\geqslant A \int_\Omega (u_{,\alpha} + c_\alpha + \omega e_{\alpha\beta} x^\beta)^2\, d\sigma$$
$$A = \frac{5A_1 A_3 h^3 \Lambda_e}{24\,(5A_3 + A_1 h^2 \Lambda_e^2)}$$

Минимизируя правую часть (6.15) по ω и используя (6.7) и (6.8), получим

$$I \geqslant A \left[\int_\Omega (u_{,\alpha} u^{,\alpha} + 3c_\alpha c^\alpha)\, d\sigma - \left(\int_\Omega u_{,\alpha} x_\beta e^{\alpha\beta} d\sigma \right)^2 \Big/ \int_\Omega x_\alpha x^\alpha d\sigma \right] \geqslant$$
$$\geqslant A\,(1 - \varkappa) \int_\Omega \left(u_{,\alpha} u^{,\alpha} + \frac{3}{1-\varkappa} c_\alpha c^\alpha \right) d\sigma \geqslant A\,(1 - \varkappa)\, \Lambda^2 \int_\Omega u^2 d\sigma$$

Отсюда находим

(6.16) $$m \leqslant A^{-1} (1 - \varkappa)^{-1}\ \Lambda^{-2}$$

(6.17) $$\frac{1}{2} \left(\frac{12\,(5A_3 + B_1 h^2 \Lambda_e^2)}{5A_1 A_3 h^3 \Lambda_e^2 \Lambda^2 (1 - \varkappa)} + \frac{13h}{35A_2} \right)^{-1} \leqslant b_n$$

Максимизация левой части (6.17) по h приводит к соотношению вида

(6.18) $$\Lambda_P \varphi \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_P}, \frac{\Lambda_e}{\Lambda_P}, \varkappa \right) \leqslant b_n$$

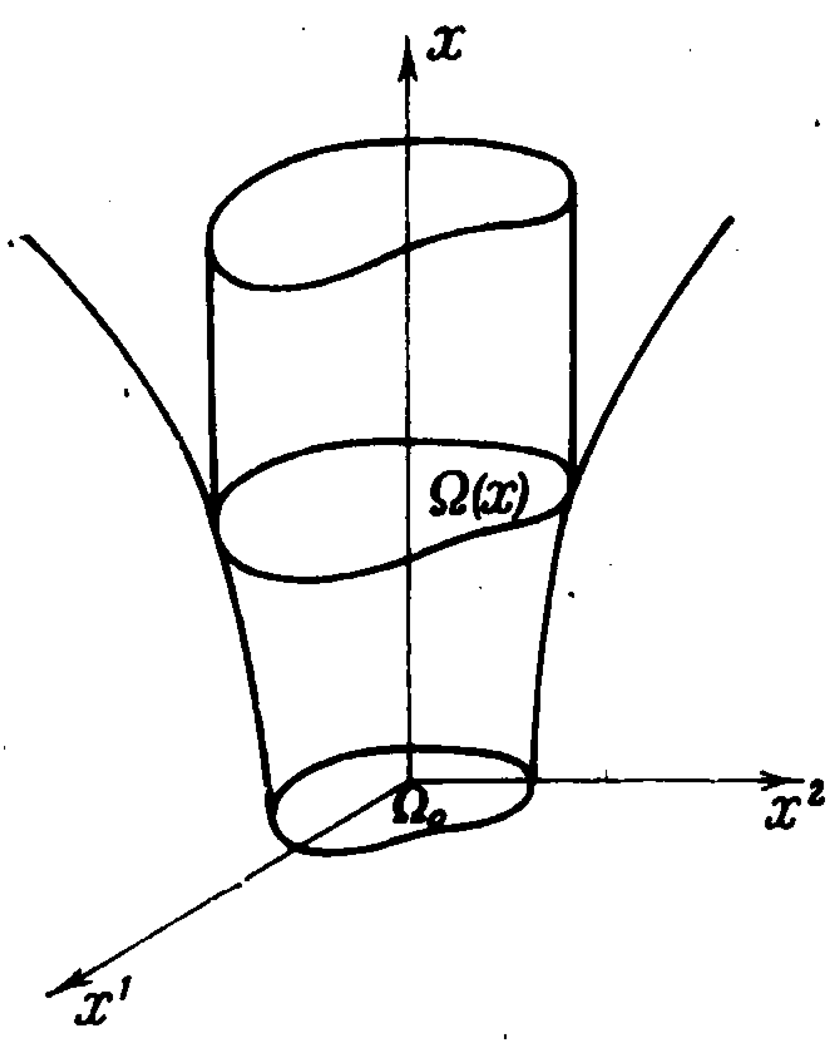
Замечание. Из формулы (6.18) вытекает существенное свойство постоянной b_n: b_n можно оценить снизу величиной, уменьшающейся в λ раз при растяжении в λ раз поперечного сечения цилиндра. Этот факт следует из того, что при растяжении поперечного сечения постоянные Λ, Λ_e, Λ_P получают множители $1/\lambda$, а постоянная $\varkappa$ не меняется. Согласно (5.5) аналогичным свойством обладает γ.

7. Оценка скорости убывания энергии в полубесконечном круглом изотропном однородном стержне. Для стержня круглого поперечного сечения $\varkappa = 0$, а постоянные Пуанкаре и Корна известны

$$\Lambda_P = jr^{-1}, \qquad K = 4$$

Здесь $j = 1.845$ — первый нуль производной бесселевой функции $J_1(x)$, r — радиус поперечного сечения. Постоянная Корна вычислена в работе [16].

В случае однородного изотропного стержня $A_3 = 2$, а постоянные A_1 и A_2 можно менять как функции параметра α (см. п. 2), максимизируя левую часть (6.17) по α. Дальше для простоты положим $\alpha = 1$, $A_1 = A_2 = 2$. Кроме того, заменим постоянную Λ^{-2}, согласно (6.10), на Λ_P^{-2}.



Фиг. 2

Окончательно получим следующую оценку b_n через Λ_P, Λ_e, h:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{6(5+h^2\Lambda_e^2)}{5h^3\Lambda_e^2\Lambda_P^2}+\frac{13h}{70}\right]^{-1}\leqslant b_n$$

или через Λ_P, K и h

$$\frac{1}{2}\left[\frac{6(5K+h^2\Lambda_P^2)}{5h^3\Lambda_P^4}+\frac{13h}{70}\right]^{-1}\leqslant b_n \tag{7.1}$$

Максимизируя левую часть по h, получим

$$^1/_7\Lambda_P \leqslant b_n \tag{7.2}$$

Неравенства (5.9) и (7.1) дают оценку снизу скорости затухания для произвольной самоуравновешенной на торце нагрузки, в частности

$$0.35r^{-1}\leqslant\gamma,\quad \nu=0;\qquad 0.27r^{-1}\leqslant\gamma,\quad \nu={}^1/_4$$
$$0.22r^{-1}\leqslant\gamma,\quad \nu={}^1/_3$$

В соответствии с замечанием п. 4 оценка ухудшается при увеличении $\nu = {}^1/_2\ (1+\mu/\lambda)^{-1}$.

Скорость затухания энергии для произвольной нагрузки неизвестна. В ряде работ вычисляется скорость затухания для приложений на торце осесимметрической нагрузки (см. [17, 18]). Соответствующие результаты можно рассматривать как оценку γ сверху

$$\gamma\leqslant 5r^{-1},\quad \nu=0;\qquad \gamma\leqslant 5.4r^{-1},\quad \nu={}^1/_4$$

8. Скорость затухания энергии в телах типа конуса. Рассмотрим тела, сечения которых плоскостями $x = \mathrm{const}$ подобны (см. фиг. 2), т. е.

$$\Omega(x) = \{x,\ x^\alpha : x^\alpha = \lambda(x)x_0^\alpha,\ x_0^\alpha\in\Omega_0\},\quad \lambda(0)=1$$

Примем также, что $\lambda(x)$ — неубывающая функция x. Тогда для области $V(x)$ можно в качестве подобласти $V'(x)$ взять цилиндр с основанием $\Omega(x)$, а в качестве постоянной b_n в формуле (5.9) — постоянную b_n соответствующего цилиндра. Согласно (5.9) и замечанию п. 6

$$b_n(0)/\lambda(x)\leqslant b_n(x),\qquad \gamma(0)/\lambda(x)\leqslant\gamma(x)$$

Следовательно, для таких тел

$$E(x)\leqslant E(0)\exp\left[-\gamma(0)\int_0^x\frac{dx}{\lambda(x)}\right]$$

В случае конического тела, вершина которого находится в точке с координатами $(-x_0,\ 0,\ 0)$, $\lambda(x) = 1 + x/x_0$, поэтому

$$E(x)\leqslant E(0)(1+x/x_0)^{-x_0\gamma(0)} \tag{8.1}$$

При $x_0 \to \infty$ конус превращается в цилиндр, а оценка (8.1) переходит в экспоненциальный закон затухания (1.5).

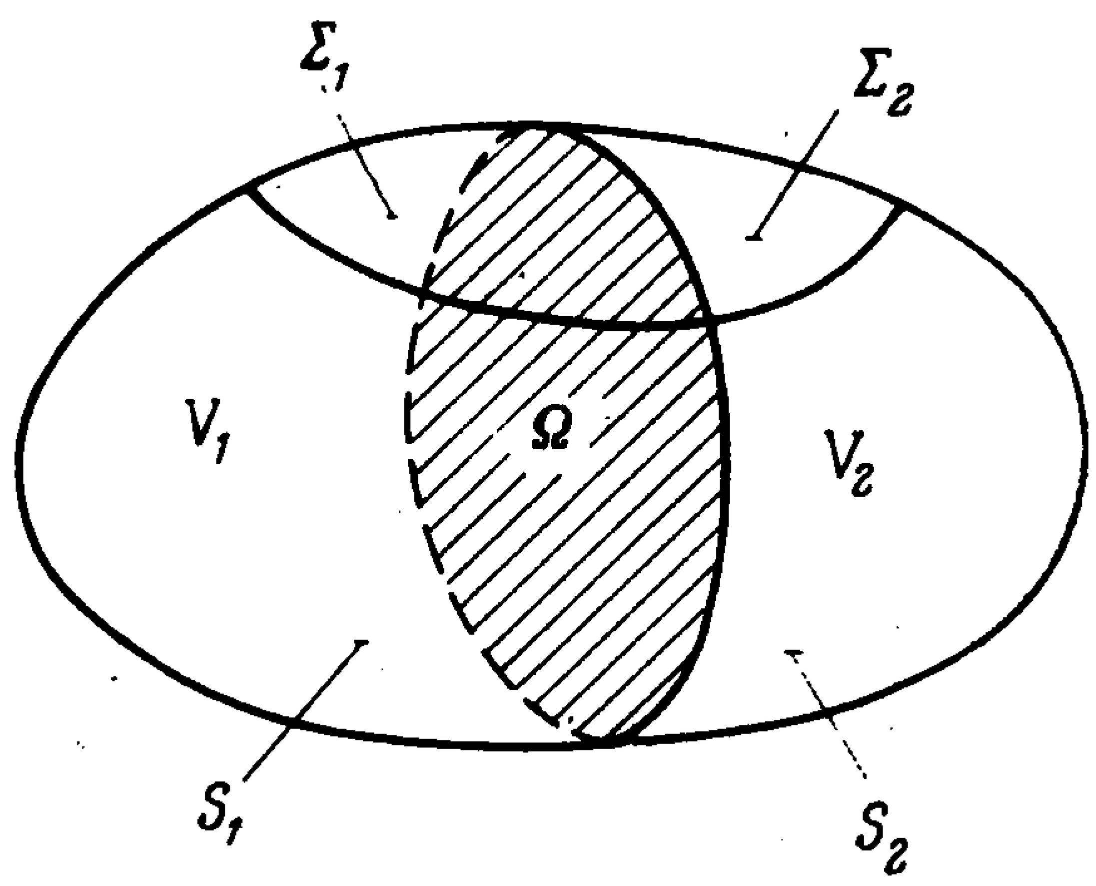
9. Дополнение. Об упругой энергии склеенных тел. Известно, что при склейке тела, деформированного некоторыми поверхностными силами, с недеформированным телом вдоль свободной от нагрузок поверхности суммарная упругая энергия уменьшается. Ниже сформулированы некоторые обобщения.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I = E - \int\limits_V F_\alpha u^\alpha dx - \int\limits_{\partial V} f_\alpha u^\alpha d\sigma$$

$$dx = dx^1 \ldots dx^n$$

$$E = \int\limits_V U\left(x^i, u^\alpha, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\right) dx$$



Фиг. 3

Здесь греческие индексы пробегают значения $1, \ldots, m$, латинские — $1, \ldots, n$, V — область n-мерного пространства, F_α, f_α — заданные функции x^i. Минимум ищется по всем функциям u^α, принимающим на части Σ границы ∂V области V заданные значения

$$u^\alpha = \varphi^\alpha \quad \text{на } \Sigma$$

Пусть область V разбита на две подобласти V_1 и V_2 с границами ∂V_1 и ∂V_2. Обозначим через Σ_1 и Σ_2, S_1 и S_2 части поверхностей Σ и ∂V, принадлежащие соответственно ∂V_1 и ∂V_2, через Ω — гиперповерхность, разделяющую V_1 и V_2 (см. фиг. 3) и составим функционалы (p_α — произвольно заданные функции)

$$I_1 = E_1 - \int\limits_{V_1} F_\alpha u^\alpha dx - \int\limits_{S_1} f^\alpha u^\alpha d\sigma - \int\limits_{\Omega} p_\alpha u^\alpha d\sigma$$

$$I_2 = E_2 - \int\limits_{V_2} F_\alpha u^\alpha dx - \int\limits_{S_2} f_\alpha u^\alpha d\sigma + \int\limits_{\Omega} p_\alpha u^\alpha d\sigma$$

$$E_1 = \int\limits_{V_1} U dx, \qquad E_2 = \int\limits_{V_2} U dx, \qquad I = I_1 + I_2$$

Поскольку сумма минимумов не превосходит минимума суммы

$$\inf_{u^\alpha} I = \inf_{u^\alpha} (I_1 + I_2) \geqslant \inf_{u^\alpha} I_1 + \inf_{u^\alpha} I_2$$

получим (минимальные значения функционалов отмечены нулевым индексом)

$$I_1^\circ + I_2^\circ \leqslant I^\circ \tag{9.1}$$

9.1. Рассмотрим два линейно-упругих тела V_1 и V_2, деформированных поверхностными и объемными силами. Некоторые участки Σ_1 и Σ_2 поверхностей тел V_1 и V_2 могут быть жестко закреплены ($u^\alpha |_{\Sigma_1, \Sigma_2} = 0$). Пусть границы ∂V_1 и ∂V_2 тел V_1 и V_2 содержат поверхности Ω_1 и Ω_2, представляющие при наложении две стороны некоторой поверхности Ω, а силы, действующие в точках, соответствующих одна другой при наложении, равны и противоположны по направлению. Тогда сумма упругих энергий тел V_1 и V_2 меньше упругой энергии тела, полученного в результате склейки V_1 и V_2 вдоль Ω. (Тела называются склеенными вдоль Ω, если u^α непрерывны при переходе через Ω.)

Действительно, в линейной теории упругости функционалы E, E_1 и E_2 квадратичны и имеют смысл энергии. При условии жесткой заделки

$$I^\circ = -E^\circ, \qquad I_1^\circ = -E_1^\circ, \qquad I_2^\circ = -E_2^\circ.$$

Сформулированное утверждение вытекает из неравенства (9.1).

9.2. Рассмотрим два упругих тела V_1 и V_2, деформированных заданными на участках поверхности Σ_1 и Σ_2 перемещениями. Пусть границы ∂V_1 и ∂V_2 тел V_1 и V_2 содержат поверхности Ω_1 и Ω_2, представляющие при наложении две стороны некоторой поверхности Ω. Тогда сумма упругих энергий тел V_1 и V_2 больше упругой энергии тела, полученного в результате склейки V_1 и V_2 вдоль Ω.

Это утверждение следует непосредственно из (9.1), так как в рассматриваемом случае $I^\circ = E^\circ$, $I = E_1^\circ$, $I_2^\circ = E_2^\circ$.

Замечания. 1°. Если тела V_1 и V_2 деформированы поверхностными и объемными силами и заданными на границе ненулевыми перемещениями, то энергия склеенных тел может быть как больше, так и меньше суммы энергий тел до склейки.

2°. При выводе (9.1) не использовано свойство выпуклости U. Известное доказательство теоремы о склейке упругих тел основано на принципе Кастильяно [14], при конструировании которого выпуклость U существенна [19]. Отметим, что в геометрически нелинейной теории упругости U не является выпуклой функцией градиента перемещений.

3°. Утверждения 9.1 и 9.2 с некоторыми терминологическими изменениями (см. сноску на стр. 853) переносятся на ряд других задач механики, в том числе на задачи об установившихся потенциальных движениях идеальной несжимаемой жидкости и задачи установившейся теплопроводности. Эти утверждения позволяют сводить оценку упругой энергии (или соответственно кинетической энергии и диссипации) тела со сложными геометрическими очертаниями к оценке для тела с простой геометрической формой.

Поступила 30 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Toupin R. A.* Saint-Venant's principle. Arch. Ration Mech. and Analysis, 1965, vol. 18, No. 2.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
3. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. Физматгиз, 1962.
4. *Roseman J. J.* A pointwise estimate for the stress in a cylinder and its application to Saint-Venant's principle, Arch. Ration Mech. Analysis, 1966, vol. 21, No. 1.
5. *Knowles J. K.* On Saint-Venant's principle in the two-dimensional linear theory of elasticity. Arch. Ration Mech. Analysis, 1966, vol. 21, No. 1.
6. *Roseman J. J.* The principle of Saint-Venant in linear and nonlinear plane elasticity. Arch. Ration Mech. Analysis, 1967, vol. 26, p. 142.
7. *Knowles J. K., Horgan C. O.* On the exponential decay of stress in circular elastic cylinders subject to axisymmetric selfequilibrated end loads, Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, p. 33.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике, М., «Наука», 1970.
9. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М., «Мир», 1965.
10. *Korn A.* Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen, Bull. Internat., Cracovic Akad. Umiedet, Classe des sciences mathematiques et naturelles, 1909, 705—724.
11. *Friedrichs K. O.* On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. Math., 1947, vol. 48, No. 2, p. 441—471.
12. *Мясников В. П., Мосолов П. П.* Доказательство неравенства Корна. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 1.
13. *Horgan O., Knowles J. K.* Eigenvalue problems associated with Korn's inequalities. Arch. Ration. Mech. Analysis, 1971, vol. 40, No. 5.
14. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
15. *Бердичевский В. Л.* Одно энергетическое неравенство в теории изгиба пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
16. *Payne L. E., Weinberger H. F.* On Korn's inequality. Arch. Ration Mech. and Analysis, 1961, vol. 8, No. 2.
17. *Лурье А. Т.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
18. *Horvay G., Mirabal J. A.* The end problem of cylinders, J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, p. 561.
19. *Бердичевский В. Л.* Об одном вариационном принципе. Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 6.