Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

В. И. Гойса

(Москва)

Исследуется напряженное состояние в упругой полуплоскости при наличии фазовых переходов, обусловленных изменением температуры в точках полуплоскости. Отдельно рассматриваются напряженные состояния, возникающие вследствие неоднородности поля температур и в результате изменения объема области, где имеет место фазовый переход.

Под фазовым переходом понимается изменение строения кристаллической решетки, происходящее при нагревании тела выше некоторой критической температуры [1,2]. При этом наряду с чисто термическими напряжениями возникают напряжения, связанные с изменением объема области, подверженной фазовому переходу. Аналогичные задачи имеют место при исследовании напряженных состояний в случае упругого натяга и в задачах о включениях. Такого рода задачи рассматривались в работах Д. И. Шермана, Ю. А. Амен-Заде и др. Однако до сих пор исследовался случай, когда область, занимаемая включением, целиком содержится внутри некоторой внешней области.

В данной работе анализируется случай, когда линия раздела сред имеет общие точки с внешней границей области, содержащей включение. Напряжения и деформации предполагаются удовлетворяющими условиям линейной теории упругости, а упругие свойства внешней области и включения — одинаковыми.

Пусть к упругой полуплоскости $y < 0$ приложено стационарное плоское температурное поле и граница $y = 0$ свободна от внешних усилий. Тогда компоненты напряжений удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \qquad y = 0 \tag{1}$$

Поле температур удовлетворяет краевой задаче для уравнения Лапласа

$$\Delta T(x, y) = 0 \tag{2}$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_0, & |x| < a \quad (a = \text{const} > 0) \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Задаче (2) удовлетворяет гармоническая функция

$$T(x, y) = -\frac{T_0}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{a-x}{y} - \operatorname{arctg}\frac{-a-x}{y}\right) \tag{3}$$

Термоупругие напряжения будем анализировать, следуя работе [3]. Чтобы решить задачу, достаточно определить функции Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, голоморфные в нижней полуплоскости.

Продолжив $\Phi(z)$ аналитически в верхнюю полуплоскость по формуле

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\,\Phi'(z) - \overline{\Psi}(z), \qquad y > 0$$

выразим $\Psi(z)$ через $\Phi(z)$

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi}(z) - z\Phi'(z), \quad y < 0.$$

Таким образом, все искомые величины определяются, если известно выражение для одной функции $\Phi(z)$, распространенной на всю плоскость. Для компонент напряжений получаем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - kT(z, \bar{z}) - k\int \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} dz \tag{4}$$

$$k = \alpha E / 2(1 - \nu), \qquad z = x + iy, \qquad \bar{z} = x - iy$$

$$T(z, \bar{z}) = -\frac{T_0}{2\pi i}\left(\ln\frac{a - z}{-a - z} - \ln\frac{a - \bar{z}}{-a - \bar{z}}\right)$$

После подстановки этого выражения в (1), получим граничное условие для определения функции $\Phi(z)$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = -kT(t, \bar{t}) - k\lim_{z\to t}\int \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} dz, \qquad -\infty < t < \infty \tag{5}$$

$$\int \frac{\partial T(z, z)}{\partial \bar{z}} dz = -\frac{T_0 z}{2\pi i}\left(\frac{1}{a - \bar{z}} + \frac{1}{a + \bar{z}}\right)$$

Решение задачи (5) имеет вид

$$\Phi(z) = -\frac{kT_0}{2\pi i}\left[\ln\frac{a - z}{-a - z} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{z - a} + \frac{a}{z + a}\right)\operatorname{sgn} y\right]$$

Вычислим напряжения. Имеем

$$\tau_{xy} = -\frac{kT_0 y^2 a}{\pi}\left(\frac{x + a}{|z + a|^4} + \frac{x - a}{|z - a|^4}\right)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{Bmatrix} = \frac{kT_0 y a}{2\pi}\left[\pm\frac{y^2 - (x + a)^2}{|z + a|^4} \pm \frac{y^2 - (x - a)^2}{|z + a|^4} - \frac{a}{|z + a|^2} - \frac{a}{|z - a|^2}\right]$$

Видно, что все компоненты напряжений исчезают на границе.

Перейдем ко второй половине задачи. Область D, в которой имеет место фазовое превращение, ограничена сверху отрезком $(-a < x < a)$, а снизу — кривой γ, определяемой из уравнения (T_* — температура фазового превращения)

$$T(x, y) = T_*$$

После преобразований это уравнение принимает вид

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad \left(r^2 = a^2 + b^2, b = -\operatorname{ctg}\pi\frac{T_*}{T_0}\right)$$

Граница полуплоскости свободна от нагрузок, т. е.

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \qquad y = 0 \tag{6}$$

Всесторонне объемное расширение можно описывать с помощью дополнительно приложенного фиктивного поля температур

$$\tau(x, y) = \begin{cases}\tau_0, & (x, y) \in D\\ 0, & (x, y) \overline{\in} D\end{cases}, \qquad y < 0$$

Точки области D будут стремиться совершить свободные перемещения

$$u_* + iv_* = \alpha\tau_0 z / 2(\lambda + \mu)$$

Пусть $u_1 + iv_1$ соответствует перемещениям точек области D, а $u_2 + iv_2$ — перемещениям в оставшейся части полуплоскости. Тогда на контуре γ

(7) $$u_1 + iv_1 = u_2 + iv_2 - \frac{\alpha\tau_0}{2(\lambda+\mu)} t, \qquad t \in \gamma$$

Кроме того, имеют место условия непрерывности нормальных усилий при переходе через кривую γ

(8) $$[X_n + iY_n]_1 = [X_n + iY_n]_2$$

Будем считать, что компоненты напряжений стремятся к нулю на бесконечности, а перемещения при этом ограничены. Тогда, если ввести функции $\varphi_i(z)$ и $\psi_i(z)$, описывающие при $i = 1$ поведение материала в области D, а при $i = 2$ — в оставшейся части нижней полуплоскости, эти функции будут голоморфны в D и в оставшейся части нижней полуплоскости соответственно.

Перепишем граничную задачу (6) — (8) с помощью введенных функций

(9) $$\varphi_i(t) + t\overline{\varphi_i'(t)} + \overline{\psi_i(t)} = 0, \qquad -\infty < t < \infty, \quad i = 1, 2$$

(10) $$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)}, \qquad t \in \gamma$$

(11) $$\varkappa\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = \varkappa\varphi_2(t) - t\overline{\varphi_2'(t)} - \overline{\psi_2(t)} + g(t)$$

$$\left(g(t) = -A_1 t, \ A_1 = \frac{\alpha\tau_0}{4\mu(\lambda+\mu)}\right)$$

Соотношение (11) с учетом (10) можно привести к следующему виду:

(12) $$(\varkappa + 1)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] - g(t)$$

Если функции $\varphi_i(z)$ продолжить в области верхней полуплоскости, симметричные с областью D и областью, дополняющей до нижней полуплоскости, относительно оси абсцисс по формуле

$$\varphi_i(z) = -z\overline{\varphi_i'}(z) - \overline{\psi}_i(z), \qquad y > 0$$

то будем иметь

$$\psi_i(z) = -\overline{\varphi}_i(z) - z\varphi_i'(z), \qquad y < 0$$

а условие (10) преобразуется к такому виду:

$$\varphi_1(\bar t) - \varphi_2(\bar t) = \frac{1}{\varkappa+1} g(t) + \frac{t - \bar t}{\varkappa+1}\overline{g'(t)}, \qquad t \in \gamma$$

Учитывая, что $\varphi_i(\bar t)$ — граничные значения функций $\varphi_i(z)$, голоморфных в области $D + \bar D$ и оставшейся части плоскости соответственно, можно переписать предыдущее равенство следующим образом:

(13) $$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \frac{1}{\varkappa+1} g(\bar t) + \frac{\bar t - t}{\varkappa+1}\overline{g'(\bar t)}, \qquad t \in \bar\gamma$$

Объединив (12) и (13), можно заметить, что кусочно-голоморфная во всей плоскости функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_\gamma \frac{g(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)}\int_{\bar\gamma} \frac{g(\bar t) + (\bar t - t)\overline{g'(\bar t)}}{t - z}\,dt$$

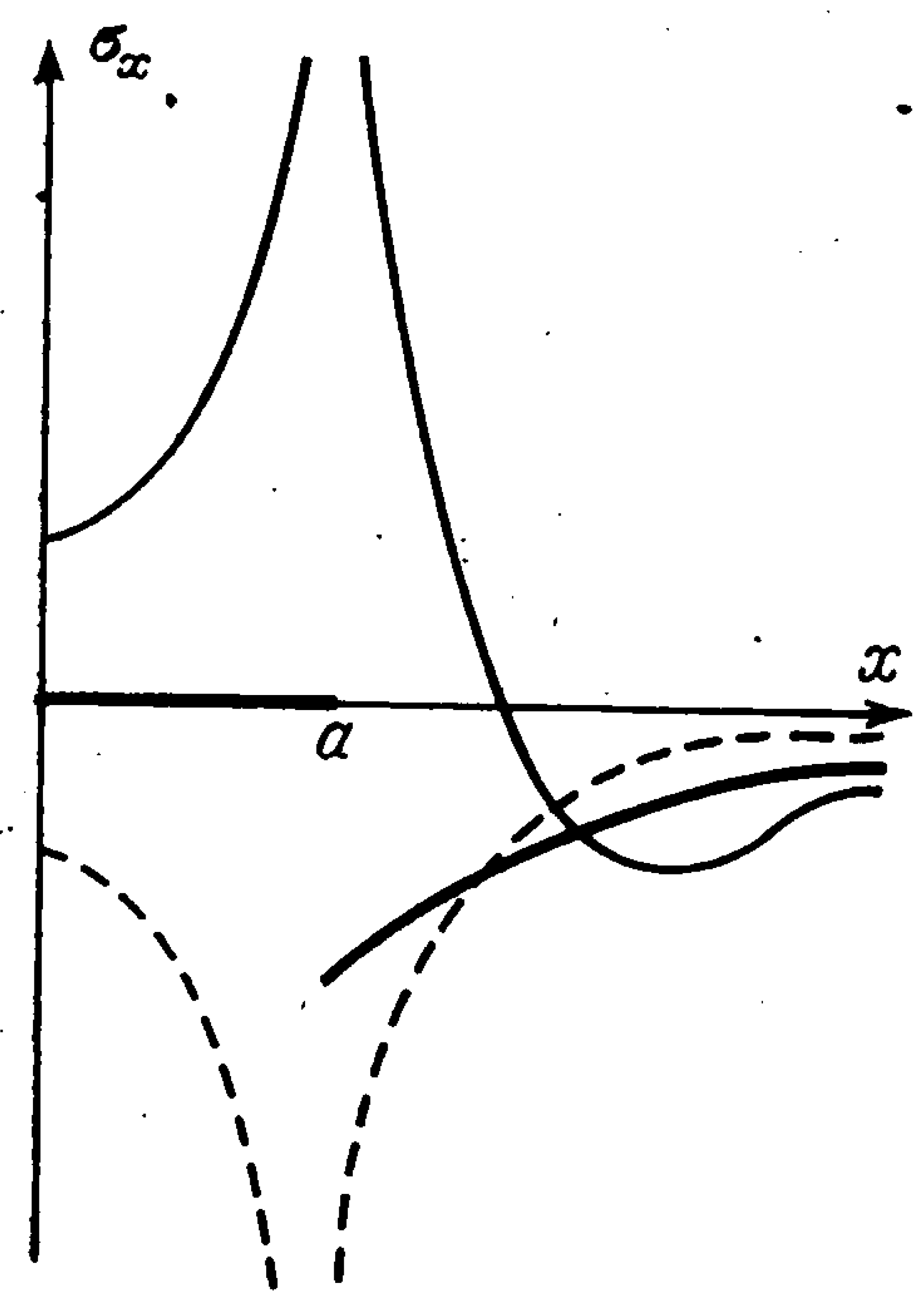
удовлетворяет условиям (12) и (13) если положить $\varphi(z) = \varphi_1(z)$ для z, находящихся внутри $\bar\gamma + \gamma$, и $\varphi(z) = \varphi_2(z)$ для z, расположенных вне $\gamma + \bar\gamma$. В рассматриваемом случае

$$\varphi(z) = -\frac{Az}{2\pi i}\left(\ln_1 \zeta(z) + \ln_2 \zeta(z)\right) + \frac{A}{\pi i}\left[\left(\frac{r^2}{z+ib} + ib\right)\ln_2 \zeta(z) - \right.$$
$$\left. - \frac{r^2}{z+ib}\ln_2 \zeta(-ib)\right], \qquad \zeta(z) = \frac{a-z}{-a-z}$$

При этом $\ln_i \zeta$ различаются тем, что линией разрыва мнимой части являются γ и γ соответственно.

Продифференцировав (14), получим выражение для $\Phi(z) = \varphi'(z)$.

Зная вид $\Phi(z)$, можно выписать выражения для компонент напряжений. Интерес представляет вид σ_x, так как $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$



при $y = 0$. Имеем

$$2\sigma_x = 3\Phi(z) + \overline{3\Phi(z)} + \Phi(\bar z) + \overline{\Phi}(z) -$$
$$- (\bar z - z)[\overline{\Phi'(z)} - \Phi'(z)]$$

На границе $y = 0$

$$\sigma_x = \frac{8Ar^2b}{\pi}\frac{x}{(x^2+b^2)^2}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| - AB\frac{C-x^2}{(x^2+b^2)^2}$$

$$B = \begin{cases} B_1, & |x| < a \\ B_2, & |x| > a \end{cases}, \qquad C = \begin{cases} C_1, & |x| < a \\ C_2, & |x| > a \end{cases}$$

$$B_1 = 4r^2\left(1 + \frac{1}{\pi i}\ln\frac{a+ib}{a+ib}\right), \qquad B_2 = B_1 - 4r^2$$

$$C_1 = \frac{B_1 8b/\pi}{B_1 + 8b/\pi}, \qquad C_2 = \frac{\pi i B_2 - 8ib/\pi}{\pi i B_2 + 8ib/\pi}$$

Здесь B_1, B_2, C_1, C_2 — действительные постоянные.

Вид кривых $y = \sigma_x(x)$ при $x > 0$ изображен на фигуре тонкими линиями для $b = -1$, жирными линиями для $b = 0$ и пунктиром для $b = +1$. Компонента σ_x тензора напряжений как функция переменных x и y имеет особенности на границе полуплоскости в точках $y = 0$, $x = \pm a$, которые с ростом температуры T_0 приводят к возникновению бесконечных растягивающих напряжений, вызывающих растрескивание материала вблизи таких точек. В реальном теле вблизи эти точек возникнут пластические зоны, где произойдет перераспределение и сглаживание напряжений. Особенности появляются в результате того, что контур γ выходит на свободную границу, и представляют собой отличие в распределении напряжений по сравнению со случаем, когда область, занимаемая включением, является внутренней.

Поступила 16 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Физические металловедение (под ред. Р. Кана), вып. 2. М., «Мир», 1967.
2. *Ловинский М. Г.* Строение и свойства металлов при высоких температурах. М., Металлургиздат, 1963.
3. *Filipkowski I.* Dwuwymiarowe zagadnienie teorii naprężeń cieplnych. Warszawa, Rozprawy inżynierskie, T. 14, zesz. 4, 1966.