

**МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ  
ТРЕХМЕРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

**Н. Н. Шахов**, Ю. Д. Шевелев

(Москва)

Рассматривается аналитический метод расчета трехмерного пограничного слоя в потоке сжимаемой жидкости, основанный на применении метода последовательных приближений и аналогичный случаю несжимаемой жидкости [1]. Результаты приближенного анализа сравниваются с результатами конечно-разностных расчетов.

1. Система уравнений пространственного пограничного слоя в сжимаемой жидкости в случае произвольной криволинейной системы координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела, имеет вид [2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Lu + A_1 u^2 + A_2 \omega^2 + A_3 u\omega &= A_4 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \\ L\omega + B_1 u^2 + B_2 \omega^2 + B_3 u\omega &= B_4 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \rho \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \omega \right) + \sqrt{g} \frac{\partial p v}{\partial \zeta} &= 0 \\ \rho LH &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \zeta} + (\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{U^2}{2} \right] \right\} \\ L &\equiv \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \eta} + v \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \end{aligned}$$

Здесь  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора,  $u, \omega, v$  — компоненты скорости, направленные соответственно по осям  $\xi, \eta, \zeta$ ,  $H$  — полная энтальпия,  $\rho$  — плотность,  $T$  — температура,  $p$  — давление,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\sigma$  — число Прандтля. Система уравнений (1.1) замыкается уравнением состояния  $p = \rho RT$ . Коэффициенты  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) определяются геометрией тела и внешним течением [2].

Система (1.1) решается при следующих граничных условиях, соответствующих рассмотрению пограничного слоя при изэнтропическом внешнем течении:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u = \omega = v = 0, \quad H = H_0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0 \\ u \rightarrow u_e, \quad \omega \rightarrow \omega_e, \quad H \rightarrow H_e \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Индексы  $e$  и  $0$  относятся к параметрам потока на внешней границе пограничного слоя и на поверхности тела.

С помощью преобразования, аналогичного преобразованию А. А. Дородницына, сведем систему (1.1) к виду, удобному для интегрирования

$$(1.3) \quad \xi_1 = \xi, \quad \eta_1 = \eta, \quad \lambda = \sqrt{\frac{u_e}{\mu_e \rho_e \alpha}} \int_0^\zeta \rho d\zeta$$

где  $\alpha(\xi, \eta)$  — некоторая функция, выбор которой будет обсуждаться в дальнейшем. Перейдем от искомым функций  $u, \omega, v, H$  к новым переменным  $E(\xi_1, \eta_1, \lambda), G(\xi_1, \eta_1, \lambda), K(\xi_1, \eta_1, \lambda), \theta(\xi_1, \eta_1, \lambda)$  по формулам (индекс единицу при  $\xi_1, \eta_1$  в дальнейшем опускаем)

$$(1.4) \quad u = u_e(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda), \quad \omega = \beta(\xi, \eta) u_e(\xi, \eta) (G + \varphi E)$$

$$\rho v + \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta} = \sqrt{\mu_e \rho_e} u_e \left( K - \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} E \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} (G + \varphi E) \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right), \quad H = H_0 + (H_e - H_0) \theta$$

$$\left( \xi_1 = \int_0^{\xi} \rho d\xi, \quad \varphi = \frac{\omega_e}{\beta u_e} \right)$$

Здесь  $\beta(\xi, \eta)$  — произвольная функция переменных  $\xi, \eta$ .

В результате замены (1.3), (1.4) система (1.1) принимает вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( l \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right) = K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^* (E^2 - F) + N_2^* G^2 + N_3^* EG +$$

$$+ N_4 E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial E}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( l \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) = K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^* (E^2 - F) + M_2^* G^2 + M_3^* EG +$$

$$+ N_4 E \frac{\partial G}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial G}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right) = K \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1 - \sigma}{\sigma(1 - t_0)} \frac{l}{k} \frac{\partial}{\partial \lambda} (E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2 + \right.$$

$$+ 2\beta \cos \psi_0 (G + \varphi E) E \left. \right\} + N_4 (1 - \theta) E \frac{1}{1 - t_0} \frac{\partial t_0}{\partial \xi} + N_5 (1 - \theta) \times$$

$$\times (G + \varphi E) \frac{1}{1 - t_0} \frac{\partial t_0}{\partial \eta} + N_4 E \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + N_5 (G + \varphi E) \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

$$- \frac{\partial K}{\partial \lambda} = P_1^* E + P_2^* G + N_4 \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial G}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial E}{\partial \eta}$$

Здесь

$$t_0 = \frac{H_0}{H_e}, \quad F = \frac{\rho_e}{\rho} = 1 + (1 - t_0)(\theta - 1) \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) -$$

$$- \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \left( \frac{E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2 + 2\beta \cos \psi_0 E (G + \varphi E)}{1 + \beta^2 \varphi^2 + 2\beta \varphi \cos \psi_0} - 1 \right)$$

$$l = \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e}$$

$$k = (1 + 2\beta \varphi \cos \psi_0 + \beta^2 \varphi^2) (1 + 2 / (\gamma - 1) M_e^2)$$

$$\cos \psi_0 = g_{12} / \sqrt{g_{11} g_{22}}$$

Коэффициенты  $N_1^*, N_2^*, N_3^*, M_1^*, M_2^*, M_3^*, P_1^*, P_2^*$  зависят только от  $\xi$  и  $\eta$ . Вид этих коэффициентов приведен в работе [2].

Здесь  $\gamma$  — отношение теплоемкостей ( $\gamma = c_p / c_v$ ),  $M_e$  — число Маха на внешней границе пограничного слоя,  $\sigma$  — число Прандтля.

Граничные условия в результате преобразований принимают вид

$$(1.6) \quad E = G = K = \theta = 0 \quad \text{при } \lambda = 0$$

$$(1.7) \quad E \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Компоненты трения на стенке и поток тепла определяются по формулам ( $g_{12} = 0$ )

$$\tau_1 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \quad \tau_2 = \mu \left. \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \quad q = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

Проинтегрируем уравнения системы (1.5) по координате  $\lambda$  от некоторого значения  $\lambda$  до бесконечности с учетом граничного условия (1.7). Получим

$$(1.8) \quad \begin{aligned} -l \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= -K(E-1) + (P_1^* + N_1^*)\theta_{11} + N_1^*\theta_1 + \\ &+ (P_2^* + N_3^*)\theta_{21} + N_1^* \int_{\lambda}^{\infty} (1-F)d\lambda + N_2^*\theta_{22} - P_2^*\theta_2 + \\ &+ N_4 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{12}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \eta} \\ -l \frac{\partial G}{\partial \lambda} &= -KG + M_1^* \left( \theta_{11} + \theta_1 + \int_{\lambda}^{\infty} (1-F)d\lambda \right) + (P_2^* + \\ &+ M_2^*)\theta_{22} + (P_1^* + M_3^*)\theta_{21} + N_4 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{22}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \eta} \\ -\frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} &= -K(\theta-1) + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{l}{k(1-t_0)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [E^2 + \beta^2(G + \varphi E)^2 + \\ &+ 2\beta \cos \psi_0 (G + \varphi E)E] + P_1^*\theta_{31} + P_2^*\theta_{32} + \\ &+ N_4 \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_{31} + N_5 \frac{\partial \theta_{32}}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{31}}{\partial \eta} + N_4 \theta_{31} \frac{\partial \ln(1-t_0)}{\partial \xi} + \\ &+ N_5 (\theta_{32} + \varphi \theta_{31}) \frac{\partial \ln(1-t_0)}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial K}{\partial \lambda} &= P_1^*E + P_2^*G + N_4 \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial G}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial E}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\infty} (1-F)d\lambda &= p_1(\theta_1 + \theta_{11}) + \delta_1 \theta_{21} + \delta_2 \theta_{22} - (1-t_0)(1+p_1)\theta_3 \\ p_1 &= \frac{U_e^2}{2H_e - U_e^2} = (\gamma - 1) \frac{M_e^2}{2}, \quad \delta_1 = \frac{2\beta p_1 (\cos \psi_0 + \beta \varphi)}{(1 + \beta^2 \varphi^2 + 2\beta \varphi \cos \psi_0)} \\ \delta_2 &= \beta^2 p_1 / (1 + \beta^2 \varphi^2 + 2\beta \varphi \cos \psi_0) \end{aligned}$$

Величины  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{31}, \theta_{32}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \int_{\lambda}^{\infty} (E-1)d\lambda, \quad \theta_2 = \int_{\lambda}^{\infty} Gd\lambda, \quad \theta_3 = \int_{\lambda}^{\infty} (\theta-1)d\lambda \\ \theta_{11} &= \int_{\lambda}^{\infty} (E-1)Ed\lambda, \quad \theta_{12} = \int_{\lambda}^{\infty} (E-1)Gd\lambda, \quad \theta_{21} = \int_{\lambda}^{\infty} EGd\lambda \\ \theta_{22} &= \int_{\lambda}^{\infty} G^2d\lambda, \quad \theta_{31} = \int_{\lambda}^{\infty} (\theta-1)Ed\lambda, \quad \theta_{32} = \int_{\lambda}^{\infty} (\theta-1)Gd\lambda \end{aligned}$$

Проинтегрируем систему (1.8) по координате  $\lambda$  от нуля до некоторого значения  $\lambda$  с учетом граничного условия (1.6). Рассмотрим случай  $\sigma = \text{const}$ .

Получим компоненты скорости и профиль энтальпии в таком виде:

$$\begin{aligned}
 (1.9) \quad -E &= \theta_{10}^* + (P_1^* + N_1^*)\theta_{11}^* + N_1^*\theta_1^* + N_2^*\theta_{22}^* + \\
 &+ (P_2^* + N_3^*)\theta_{21}^* - P_2^*\theta_2^* + N_1^*\theta_{01}^* + N_4 \frac{\partial \theta_{11}^*}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{12}^*}{\partial \eta} + \\
 &+ \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{11}^*}{\partial \eta} - N_4 \left\langle \theta_{11} \frac{\partial l^{-1}}{\partial \xi} \right\rangle - N_5 \left\langle \theta_{12} \frac{\partial l^{-1}}{\partial \eta} \right\rangle - \varphi N_5 \left\langle \theta_{11} \frac{\partial l^{-1}}{\partial \eta} \right\rangle \\
 -G &= \theta_{20}^* + M_1^*(\theta_{11}^* + \theta_1^*) + (P_2^* + M_2^*)\theta_{22}^* + \\
 &+ (P_1^* + M_3^*)\theta_{21}^* + M_1^*\theta_{01}^* + N_4 \frac{\partial \theta_{21}^*}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{22}^*}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{21}^*}{\partial \eta} - \\
 &- N_4 \left\langle \theta_{21} \frac{\partial l^{-1}}{\partial \xi} \right\rangle - N_5 \left\langle (\theta_{22} + \varphi \theta_{21}) \frac{\partial l^{-1}}{\partial \eta} \right\rangle \\
 -\frac{\theta}{\sigma} &= \theta_{30}^* + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{1}{k(1-t_0)} (E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2 + 2\beta \cos \psi_0 E \times \\
 &\times (G + \varphi E)) + P_1^*\theta_{31}^* + P_2^*\theta_{32}^* + N_4 \frac{\partial \theta_{31}^*}{\partial \xi} + N_5 \frac{\partial \theta_{32}^*}{\partial \eta} + \varphi N_5 \frac{\partial \theta_{31}^*}{\partial \eta} + \\
 &+ N_4 \frac{\partial \ln(1-t_0)}{\partial \xi} \theta_{31}^* + N_5 \frac{\partial \ln(1-t_0)}{\partial \eta} (\theta_{32}^* + \varphi \theta_{31}^*) - \\
 &- N_4 \left\langle \theta_{31} \frac{\partial l^{-1}}{\partial \xi} \right\rangle - N_5 \left\langle (\theta_{32} + \varphi \theta_{31}) \frac{\partial l^{-1}}{\partial \eta} \right\rangle \\
 -K &= P_1^* \langle E \rangle + P_2^* \langle G \rangle + N_4 \frac{\partial}{\partial \xi} \langle E \rangle + N_5 \frac{\partial}{\partial \eta} \langle G \rangle + \varphi N_5 \frac{\partial}{\partial \eta} \langle E \rangle \\
 \theta_{10}^* &= -\langle l^{-1} K (E - 1) \rangle, \quad \theta_{20}^* = -\langle l^{-1} K G \rangle, \quad \theta_0^* = -\langle l^{-1} K (\theta - 1) \rangle \\
 \theta_1^* &= \langle l^{-1} \theta_1 \rangle, \quad \theta_2^* = \langle l^{-1} \theta_2 \rangle, \quad \theta_3^* = \langle l^{-1} \theta_3 \rangle, \quad \theta_{11}^* = \langle l^{-1} \theta_{11} \rangle \\
 \theta_{12}^* &= \langle l^{-1} \theta_{12} \rangle, \quad \theta_{21}^* = \langle l^{-1} \theta_{21} \rangle, \quad \theta_{22}^* = \langle l^{-1} \theta_{22} \rangle, \quad \theta_{31}^* = \langle l^{-1} \theta_{31} \rangle
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\langle f_1 \rangle = \int_0^\lambda f_1 d\lambda, \quad \theta_{01}^* = p_1(\theta_1^* + \theta_{11}^*) + \delta_1 \theta_{21}^* + \delta_2 \theta_{22}^* - (1-t_0)(1+p_1)\theta_3^*$$

Решение полученной нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$(1.10) \quad E \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

эквивалентно решению системы (1.5) с граничными условиями (1.6), (1.7).

Система (1.9) с граничными условиями (1.10) представляет сложную нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений. Будем решать эту систему уравнений методом последовательных приближений аналогично случаю несжимаемой жидкости [1].

2. Рассмотрим систему уравнений (1.9). Пренебрежем в правых частях системы (1.9) членами, содержащими производные по координатам  $\xi$ ,  $\eta$ . К такому случаю сводятся автомодельные задачи для определенного класса внешних течений. Поэтому предлагаемый подход (назовем его локально-автомодельным приближением) справедлив в случае, когда решение автомодельное. Характер изменения решения определяется коэффициентами  $M_i^*$ ,  $N_i^*$ ,  $P_k^*$ , входящими в систему уравнений (2.2).

Метод последовательных приближений для решения краевых задач связан с определенными трудностями. Предположим, что известно

$(n - 1)$ -е приближение

$$E^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda), \quad G^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda), \quad \theta^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda)$$

Подставим эти функции в правые части системы (1.9). Произведем соответствующее интегрирование и получим  $n$ -е приближение. На каждом шаге итерационного процесса необходимо удовлетворять крайевым условиям задачи. Для того чтобы  $n$ -е приближение удовлетворяло граничным условиям (1.10), введем в  $(n - 1)$ -е приближение неизвестные управляющие функции таким образом, чтобы граничные условия для  $(n - 1)$ -го приближения сохранились.

В правые части уравнений системы (1.9) подставим вместо

$$E^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda), \quad G^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda), \quad \theta^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda) - E^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda)$$

соответственно

$$E^{(n-1)}(\xi, \eta, c\lambda), \quad bG^{(n-1)}(\xi, \eta, c\lambda), \quad d[\theta^{(n-1)}(\xi, \eta, c\lambda) - E^{(n-1)}(\xi, \eta, \lambda)]$$

$$(c = c(\xi, \eta), \quad b = b(\xi, \eta), \quad d = d(\xi, \eta))$$

При таком способе введения управляющих функций граничные условия для  $E, G, E - \theta$  сохраняются.

В локально-автомодельном приближении система уравнений (1.9) запишется в виде

$$2.1) \quad -E_a^{(n+1)} = \delta^{(n)}(A_{1a}^{(n)} + b^{(n)}B_{1a}^{(n)} + b^{(n)2}C_{1a}^{(n)} + d^{(n)}D_{1a}^{(n)})$$

$$-G_a^{(n+1)} = \delta^{(n)}(A_{2a}^{(n)} + b^{(n)}B_{2a}^{(n)} + b^{(n)2}C_{2a}^{(n)} + d^{(n)}D_{2a}^{(n)})$$

$$\frac{\theta_a^{(n+1)}}{\sigma} + \frac{1 - \sigma}{k\sigma(1 - t_0)}(E^2 + \beta^2(G + \varphi E)^2 + 2\beta \cos \psi_0) \times$$

$$\times (G + \varphi E)E_a^{(n+1)} = \delta^{(n)}(A_{3a}^{(n)} + b^{(n)}B_{3a}^{(n)} + d^{(n)}C_{3a}^{(n)} + b^{(n)}d^{(n)}D_{3a}^{(n)})$$

Коэффициенты  $A_{1a}^{(n)}, B_{1a}^{(n)}, C_{1a}^{(n)}, D_{1a}^{(n)}, A_{2a}^{(n)}$  и т. д. будут выписаны ниже в первом приближении.

Для определения неизвестных управляющих функций  $(c, b, d)$  получаем алгебраическую систему уравнений

$$(2.2) \quad \delta^{(n)} = (-1)(A_{1a\infty}^{(n)} + b^{(n)}B_{1a\infty}^{(n)} + b^{(n)2}C_{1a\infty}^{(n)} + d^{(n)}D_{1a\infty}^{(n)})^{-1}$$

$$b^{(n)2}C_{2a\infty}^{(n)} + b^{(n)}B_{2a\infty}^{(n)} + A_{2a\infty}^{(n)} + d^{(n)}D_{2a\infty}^{(n)} = 0$$

$$\frac{\sigma^*}{\delta^{(n)}} = A_{3a\infty}^{(n)} + b^{(n)}B_{3a\infty}^{(n)} + d^{(n)}C_{3a\infty}^{(n)} + b^{(n)}d^{(n)}D_{3a\infty}^{(n)}$$

$$(\sigma^* = 1/\sigma + (1 - \sigma)/[(1 - t_0)\sigma(1 + 2/(\gamma - 1)M_e^2)])$$

Для величин, характеризующих поток тепла к телу и трение на стенке, получаем выражения

$$(2.3) \quad -l_0 \frac{\partial E^{(n+1)}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(n)}} \{ [N_1^*(1 + p_1)(\theta_{11.0}^{(n)} + \theta_{1.0}^{(n)} - (1 - t_0)\theta_{3.0}^{(n)}) +$$

$$+ P_1^*\theta_{11.0}^{(n)}] + b^{(n)}[(P_2^* + N_3^* + \delta_1 N_1^*)\theta_{21.0}^{(n)} - P_2^*\theta_{2.0}^{(n)}] +$$

$$+ b^{(n)2}(N_2^* + \delta_2 N_1^*)\theta_{22}^* \}$$

$$-l_0 \frac{\partial G^{(n+1)}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(n)}} \{ (1 + p_1)(\theta_{11.0}^{(n)} + \theta_{1.0}^{(n)} - (1 - t_0)\theta_{3.0}^{(n)})M_1^* +$$

$$\begin{aligned}
& + b^{(n)} (P_1^* + M_3^* + \delta M_1^*) \theta_{21.0}^{(n)} + b^{(n)2} (P_2^* + M_2^* + \delta_2 M_1^*) \theta_{22.0}^{(n)} \\
& - l_0 \frac{\partial \theta^{(n+1)}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sqrt{\delta^{(n)}} \{ (P_1^* - R_1^*) \times \\
& \times (\theta_{11.0}^{(n)} + d^{(n)} \theta_{13.0}^{(n)}) + b^{(n)} (P_2^* - R_2^*) (\theta_{12.0}^{(n)} + d^{(n)} \theta_{23.0}^{(n)}) \} \\
R_1^* & = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{(1-t_0)} \frac{\partial t_0}{\partial \xi} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{g_{22}}} \varphi \frac{1}{(1-t_0)} \frac{\partial t_0}{\partial \eta} \\
R_2^* & = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{(1-t_0)} \frac{\partial t_0}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

Предположим, что  $n$ -е приближение известно. Тогда в локально-автомодельном случае  $(n+1)$ -е приближение вычисляется по приведенным выше формулам. Из алгебраической системы находим  $\delta^{(n)}$ ,  $b^{(n)}$  и  $d^{(n)}$ , а затем находим профили скоростей, энтальпии, величины сопротивления трения на стенке и потока тепла к телу. Заметим, что если положить  $M_e \equiv 0$ ,  $t_0 \equiv 1$ , то формулы для величин трения имеют такой же вид, как и в случае несжимаемой жидкости.

Исключим величину  $\delta^{(n)}$  из первого и третьего уравнений (2.2) и найдем величину  $d^{(n)}$ . Подставив  $d^{(n)}$  во второе уравнение системы (2.2), получаем, что величина  $b^{(n)}$  находится из решения кубического уравнения. Из кубического уравнения для  $b^{(n)}$  можно получить разные случаи, которые приводят к неоднозначности решения подобно тому, как это получается и в несжимаемой жидкости.

Коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и т. д. представляют собой двойные или повторные интегралы от функции  $E$ ,  $G$ ,  $\theta$ . Скорость сходимости итерационного процесса зависит от выбора начального приближения. При решении сложных задач выбор начального приближения предопределяет успех, так как уже в первом приближении требуется получить решение с достаточной точностью.

3. Зададим нулевое приближение следующим образом:

$$\begin{aligned}
E^{(0)} & = 1 - z_0(\zeta), & G^{(0)} & = b^{(0)} (z_0(\zeta) - z_{-1}(\zeta)) \\
\theta^{(0)} & = 1 - z_0(\zeta) + d^{(0)} (z_0(\zeta) - z_{-1}(\zeta))
\end{aligned}$$

где

$$\zeta = c(\xi, \eta) \lambda = \lambda / \sqrt{\delta^{(0)}}$$

На основании (2.1) решение в локально-автомодельном приближении  $E^{(1)}$ ,  $G^{(1)}$ ,  $\theta^{(1)}$  выразится так:

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad - E_a^{(1)} & = \delta^{(0)} (A_{1a}^{(0)} + b^{(0)} B_{1a}^{(0)} + b^{(0)2} C_{1a}^{(0)} + d^{(0)} D_{1a}^{(0)}) \\
- G_a^{(1)} & = \delta^{(0)} (A_{2a}^{(0)} + b^{(0)} B_{2a}^{(0)} + b^{(0)2} C_{2a}^{(0)} + d^{(0)} D_{2a}^{(0)}) \\
\theta_a^{(1)} & = \delta^{(0)} (A_{3a}^{(0)} + b^{(0)} B_{3a}^{(0)} + d^{(0)} C_{3a}^{(0)} + b^{(0)} d^{(0)} D_{3a}^{(0)})
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_{ia}^{(0)}$ ,  $B_{ia}^{(0)}$ ,  $G_{ia}^{(0)}$ ,  $D_{ia}^{(0)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) имеют следующее явное выражение через функции нулевого приближения  $\{z_m\}$  [1] (в дальнейшем рассмотрим случай, когда  $\mu \sim T$ ):

$$\begin{aligned}
A_{1a}^{(0)} & = - P_1^* \frac{A_0}{A_1} \left[ \frac{A_1}{A_2} (z_2 - 1) - \frac{A_{-1}}{A_0} (z_0 - 1) - I_{1.0} + \frac{A_0}{A_1} (z_1 - 1) \right] + \\
& + (P_1^* + N_1^*) (1 + p_1) \left( J_{0.0} + \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) + \right. \\
& \left. + N_1^* (1 + p_1) \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) t_0 \right)
\end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} B_{1a}^{(0)} &= P_2^* \left( \frac{A_{-1}}{A_0} I_{0.0} - \frac{A_0}{A_1} I_{1.0} + \left( \frac{A_0}{A_1} - \frac{A_{-1}}{A_0} \right) \frac{A_0}{A_1} (z_1 - 1) \right) + \\ &+ (P_2^* + N_3^* + \delta_1 N_1^*) \left( \frac{A_{-1}}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) - \right. \\ &\left. - J_{0.0} + J_{0.-1} \right) - P_2^* \left( \frac{A_{-1}}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) \right) \\ C_{1a}^{(0)} &= (N_2^* + \delta_2 N_1^*) (J_{0.0} - 2J_{0.-1} + J_{-1.-1}) \\ D_{1a}^{(0)} &= -N_1^* (1 - t_0) (1 + p_1) \left( \frac{A_{-1}}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) \right) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_{0.0} &= \frac{A_0^2}{2A_1^2} (1 - z_1^2) - \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{A_0}{A_1} \right) \frac{A_{-1}}{2A_0} (1 - z_0^2) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{A_0}{A_1} (z_1 (\sqrt{2}) - 1) \\ J_{0.-1} &= -\frac{A_{-1}}{2A_0} I_{0.0}, \quad J_{-1.-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{A_0}{A_1} (z_1 (\sqrt{2}) - 1) \end{aligned}$$

Аналогично находим функции

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A_{2a}^{(0)} &= M_1^* (1 + p_1) \left( J_{0.0} + 2 \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) - (1 - t_0) \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) \right) \\ B_{2a}^{(0)} &= P_1^* \left[ \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) - 2 \frac{A_{-1}}{A_1} (z_0 - 1) + \frac{1}{2} (z_{-1} - 1) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^2 (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_1} (I_{1.0} - I_{1.-1}) \right] + (P_1^* + M_3^* + \delta_1 M_1^*) \times \\ &\times \left( \frac{A_{-1}}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) - J_{0.0} + J_{0.-1} \right) \\ C_{2a}^{(0)} &= P_2^* \left\{ \left[ I_{0.-1} \frac{A_{-1}}{A_0} - I_{0.0} \frac{A_{-1}}{A_0} + I_{1.0} \frac{A_0}{A_1} - I_{1.-1} \frac{A_0}{A_1} \right] - \right. \\ &- \left. \left( \frac{A_0}{A_1} - \frac{A_{-1}}{A_0} \right) \left( \frac{A_0}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_{-1}}{A_0} (z_0 - 1) \right) \right\} + \\ &+ (P_2^* + M_2^* + M_1^* \delta_2) (J_{0.0} - 2J_{0.-1} + J_{-1.-1}) \\ D_{2a}^{(0)} &= -M_1^* (1 - t_0) (1 + p_1) \left( \frac{A_{-1}}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) \right) \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} A_{3a}^{(0)} &= P_1^* \left[ \frac{A_0}{A_1} \left( \frac{A_1}{A_2} (z_2 - 1) - \frac{A_{-1}}{A_0} (z_0 - 1) - I_{1.0} + \frac{A_0}{A_1} (z_1 - 1) \right) + \right. \\ &+ \left. J_{0.0} + \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) \right] \\ B_{3a}^{(0)} &= P_2^* \left[ \frac{A_{-1}}{A_0} I_{0.0} - \frac{A_0}{A_1} I_{1.0} + \left( \frac{A_0}{A_1} - \frac{A_{-1}}{A_0} \right) \frac{A_0}{A_1} (z_1 - 1) + J_{0.0} - J_{0.-1} \right] \\ C_{3a}^{(0)} &= -P_1^* \left[ \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) - 2 \frac{A_{-1}}{A_1} (z_0 - 1) + \frac{1}{2} (z_{-1} - 1) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^2 (z_1 - 1) - \frac{A_0}{A_1} (I_{1.0} - I_{1.-1}) + \frac{A_{-1}}{A_1} (z_1 - 1) - \right. \\ &- \left. \frac{A_0}{A_2} (z_2 - 1) - J_{0.0} + J_{0.-1} \right] \\ D_{3a}^{(0)} &= -P_2^* \left( I_{0.-1} \frac{A_{-1}}{A_0} - I_{0.0} \frac{A_{-1}}{A_0} + I_{1.0} \frac{A_0}{A_1} - I_{1.-1} \frac{A_0}{A_1} - \right. \\ &- \left. \left( \frac{A_0}{A_1} - \frac{A_{-1}}{A_0} \right) \left( \frac{A_0}{A_1} (z_1 - 1) - \frac{A_{-1}}{A_0} (z_0 - 1) \right) + J_{0.0} - 2J_{0.-1} + J_{-1.-1} \right) \end{aligned}$$

Отсюда можно найти выражения для коэффициентов  $A_{ia}^{(0)}$ ,  $B_{ia}^{(0)}$ ,  $C_{ia}^{(0)}$ ,  $D_{ia}^{(0)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Коэффициенты системы (2.2), вычисленные в первом приближении, будут следующими:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} -A_{1a\infty}^{(0)} &= \frac{P_1^*}{4} + N_1^* (1 + p_1) \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{t_0}{4} \right) \\ -B_{1a\infty}^{(0)} &= \left( \frac{1}{4} - \frac{V\sqrt{2}}{4} \right) P_2^* + \left( \frac{V\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) (N_3^* + \delta_1 N_1^*) \\ C_{1a\infty}^{(0)} &= (N_2^* + \delta_2 N_1^*) \left( \frac{V\sqrt{2} - 1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) \\ D_{1a\infty}^{(0)} &= \frac{1}{4} N_1^* (1 - t_0) (1 + p_1) \\ -A_{2a\infty}^{(0)} &= M_1^* (1 + p_1) \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{t_0}{4} \right) \\ -B_{2a\infty}^{(0)} &= \frac{3}{4} (V\sqrt{2} - 1) P_1^* + \left( \frac{V\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) (M_3^* + \delta_1 M_1^*) \\ -C_{2a\infty}^{(0)} &= -P_2^* \left( \frac{V\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{8} - 1 \right) - (M_2^* + \delta_1 M_1^*) \left( \frac{V\sqrt{2} - 1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) \\ D_{2a\infty}^{(0)} &= \frac{1}{4} M_1^* (1 - t_0) (1 + p_1), \quad A_{3a\infty}^{(0)} = \frac{1}{4} P_1^* \\ B_{3a\infty}^{(0)} &= -\frac{V\sqrt{2} - 1}{4} P_2^*, \quad C_{3a\infty}^{(0)} = \frac{3}{4} (V\sqrt{2} - 1) P_1^* \\ D_{3a\infty}^{(0)} &= \left( \frac{2 - V\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{8} \right) P_2^* \end{aligned}$$

Если известна геометрия тела и параметры внешнего потока, то в любой точке на поверхности можно найти коэффициенты  $M_i^*$ ,  $N_i^*$ ,  $P_k^*$  ( $i = 1, 2, 3; k = 1, 2$ ). Затем найти  $b^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$ ,  $d^{(0)}$  и определить профили скорости в любой точке пограничного слоя в рассматриваемом приближении. При проведении конкретных расчетов используется итерационная схема последовательного нахождения  $b^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$  и  $d^{(0)}$  из следующих соотношений:

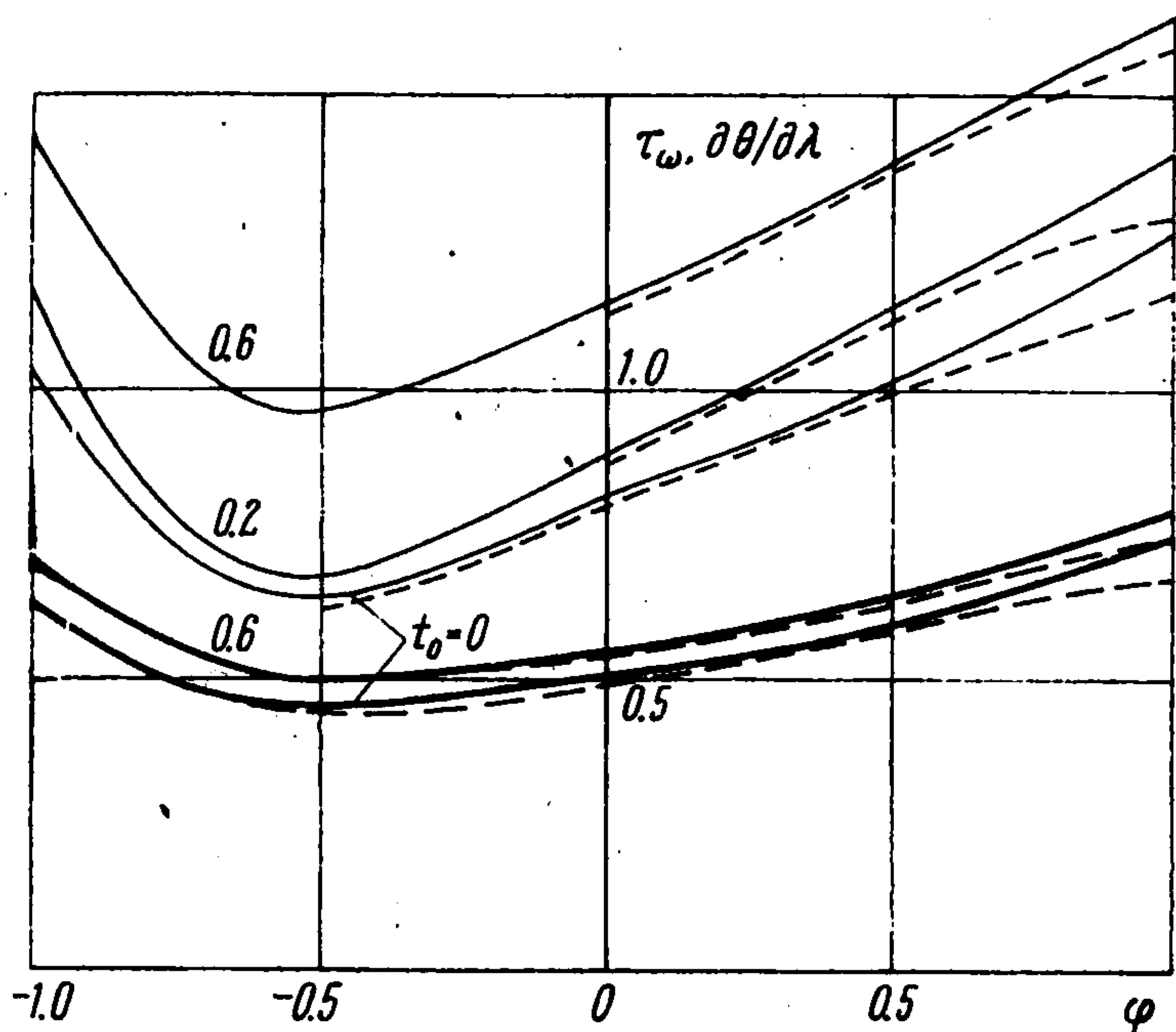
$$(3.6) \quad \begin{aligned} Dd^{(0)} &= (0.1592 + 25t_0) (1 + p_1)N_1^* + 0.1943b^{(0)} (N_3^* + \delta_1 N_1^*) - 0.048(N_2^* + \delta_2 N_1^*)b^{(0)2} \\ \delta^{(0)} &= (0.25P_1^* - 0.1035b^{(0)} P_2^* + 0.3105d^{(0)} P_1^* - 0.0997 \times \\ &\quad \times b^{(0)} d^{(0)} P_1^*)^{1/2} \\ b^{(0)} &= (B - (B^2 + 4AC)^{1/2}) / 2A \\ A &= 0.097 P_2^* + 0.0478 (M_2^* + \delta_1 - M_1^*) \\ B &= 0.3105 P_1^* + 0.1943 (M_3^* + \delta_2 M_1^*) \\ C &= M_1^* (1 + p_1) (0.1592 + 0.25t_0 - 0.25 (1 - t_0)d^{(0)}) \\ D &= 0.25 (1 + p_1) (1 - t_0)N_1^* + 0.3105P_1^* - 0.0997 b^{(0)} P_2^* \end{aligned}$$

Если положить  $b^{(0)}$  равным нулю в первом и втором соотношениях (3.6), то отсюда найдем  $d^{(0)}$ ,  $\delta^{(0)}$ . Затем найдем  $b^{(0)}$  из третьего соотношения (3.6). Далее процесс повторяется до тех пор, пока эти значения не удовлетворяются с требуемой точностью.

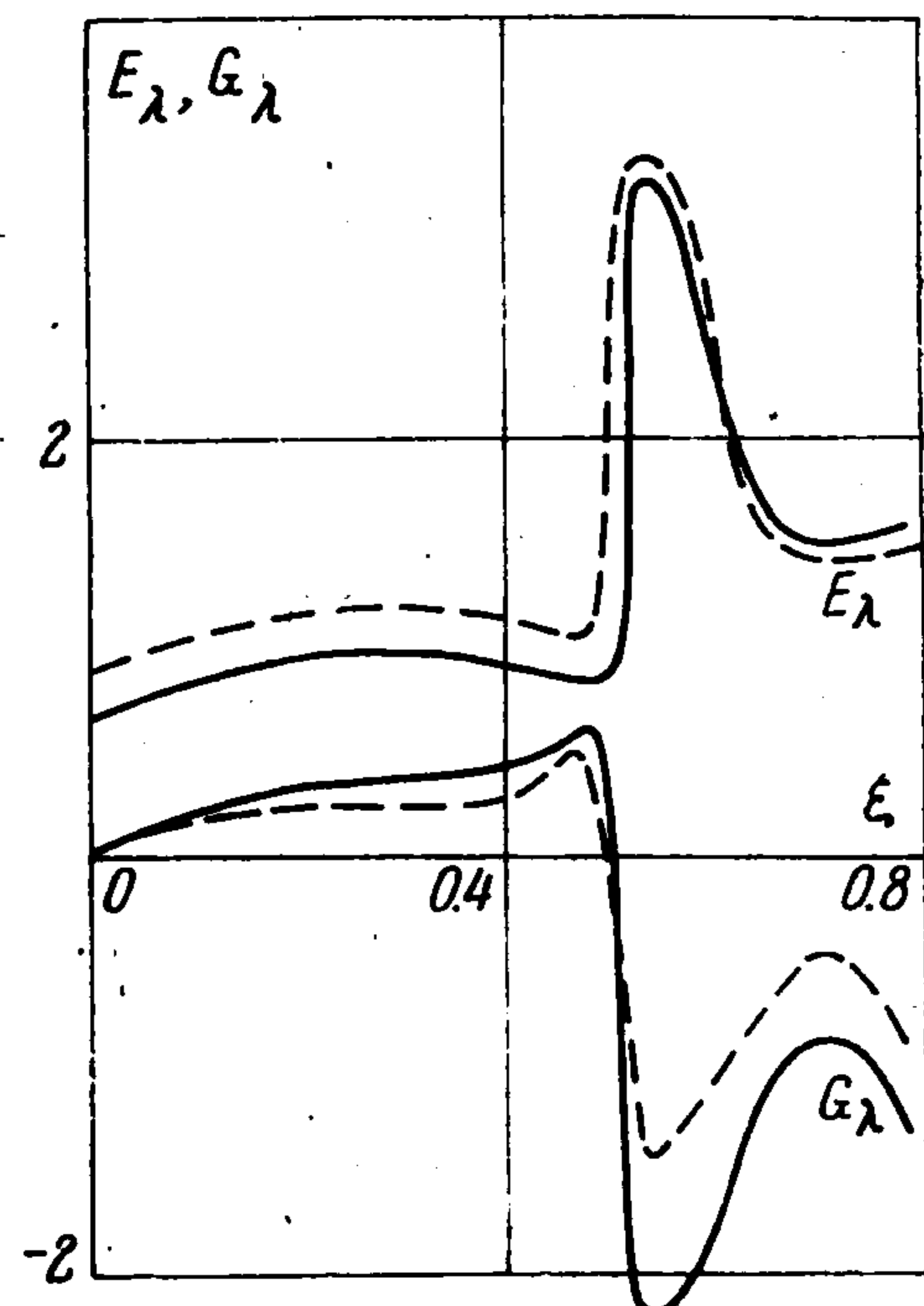
Зная решение системы (3.6), найдем составляющие величины трения на стенке, а также тепловой поток к телу. В локально-автомодельном

Таким образом, уже первое приближение дает хорошие результаты для случая критической точки двойкой кривизны во всем диапазоне изменения параметра  $\varphi$  и в широком диапазоне изменения параметра  $t_0$ .

Локально-автомодельное приближение дает не только качественную картину течения, но позволяет получить количественные результаты, хорошо согласующиеся с результатами численных расчетов в сложных задачах.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим задачу о пограничном слое на сегментальном теле под углом атаки при обтекании его совершенным газом. Эта задача была решена конечно-разностным методом в [2]. Сравним результаты численных расчетов с результатами, которые получаются по формулам (3.7) и (3.6) в локально-автомодельном приближении. Внешнее течение считается известным, поэтому нетрудно найти коэффициенты  $M_i^*$ ,  $N_i^*$ ,  $P_k^*$  ( $i = 1, 2, 3; k = 1, 2$ ). На основании (3.6) найдем значения функций  $b^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$  и  $d^{(0)}$  затем из (3.7) определим величины продольной и поперечной компоненты трения и теплового потока на стенку. Задача решается при тех же значениях параметров набегающего потока, что и в работе [2]:  $\alpha = 15^\circ$ ,  $M_\infty = \infty$ ,  $\beta^* = 30^\circ$ ,  $t_0 = 0,5$ .

На фиг. 2 приводятся сравнение результатов, полученных аналитически при  $\eta = \frac{2}{5}\pi$  в локально-автомодельном приближении (сплошные кривые), с результатами, полученными с помощью конечно-разностного метода. Видно, что даже для существенно трехмерного течения приближенный аналитический метод дает хорошее совпадение.

Поступила 7 II 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Турский Г. А., Шевелев Ю. Д. О методе последовательных приближений для задач несжимаемого ламинарного пограничного слоя (локально-автомодельный случай). ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
2. Шевелев Ю. Д. Разностные методы расчета пространственного ламинарного пограничного слоя. В сб.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. 1971, вып. 1.
3. Poots G. Compressible laminar boundary-layer flow at a point of attachment. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 197—208.

случае для произвольной геометрии тела и внешнего течения получаем

$$(3.7) \quad \begin{aligned} l_0 \frac{\partial E}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= \sqrt{\delta^{(0)}} \{0.2336 p_1^* + (0.7978 - 0.5642(1 - t_0)) \times \\ &\times (1 + p_1) N_1^* + b^{(0)} (0.2095 N_3^* - 0.1125 p_2^* + 0.2095 \delta_1 N_1^*) - \\ &- 0.0711 b^{(0)2} (N_2^* + \delta_2 N_1^*) - 0.322 d^{(0)} N_1^* (1 - t_0) (1 + p_1)\} \\ l_0 \frac{\partial G}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= \sqrt{\delta^{(0)}} \{M_1^* (1 + p_1) (0.7978 - 0.5642(1 - t_0)) + \\ &+ 0.2095 b^{(0)} (P_1^* + M_3^* + \delta_1 M_1^*) - 0.0711 b^{(0)2} (P_2^* + M_2^* + \\ &+ \delta_2 M_1^*) - 0.322 d^{(0)} M_1^* (1 - t_0) (1 - p_1)\} \\ l_0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= \sigma \sqrt{\delta^{(0)}} \{(P_1^* - R_1^*) (0.2336 + 0.2095 d^{(0)}) - \\ &- b^{(0)} (P_2^* - R_2^*) (0.1125 + 0.0711 d^{(0)})\} \end{aligned}$$

4. Рассмотрим течение в окрестности трехмерной критической точки. Введем систему координат с началом в точке торможения. Составляющие скорости вблизи критической точки можно представить в виде

$$u_e = a\xi, \quad \omega_e = b\eta$$

Выберем функции  $\alpha(\xi, \eta)$  и  $\beta(\xi, \eta)$  следующим образом:

$$\alpha = \xi, \quad \beta = \eta / \xi, \quad \varphi = \omega_e / \beta u_e = b / a$$

Коэффициенты  $M_i^*$ ,  $N_i^*$ ,  $P_k^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} M_1^* &= \varphi^2 - \varphi, \quad M_2^* = 1, \quad M_3^* = 2\varphi, \quad N_1^* = 1, \quad N_2^* = 0 \\ N_3^* &= 0, \quad P_1^* = 1 + \varphi, \quad P_2^* = 1 \end{aligned}$$

Формулы для вычисления коэффициентов трения на стенке и теплового потока на стенку запишутся в виде ( $l_0 = 1$ )

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= [0.4672 + 0.2336\varphi + 0.5642t_0 - 0.1125b^{(0)} - 0.322d^{(0)}(1 - t_0)] c^{-1} \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda} &= [\varphi(\varphi - 1)(0.2336 + 0.5642t_0) + b^{(0)}(0.207 + 0.622\varphi) - \\ &- 0.1422b^{(0)2} - 0.322d^{(0)}\varphi(\varphi - 1)(1 - t_0)] c^{-1} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} &= [(1 + \varphi)(0.2336 + 0.2073d^{(0)}) - b^{(0)}(0.1125 + 0.0711d^{(0)})] c^{-1} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} c &= (0.25(1 + \varphi) - 0.1035b^{(0)} + 0.3105d^{(0)}(1 + \varphi) - \\ &- 0.0997b^{(0)}d^{(0)})^{1/2} \\ b^{(0)} &= 3.39[0.31 + 0.699\varphi - ((0.31 + 0.699\varphi)^2 + 0.59(\varphi^2 - \\ &- \varphi)(0.159 + 0.25t_0 - 0.25(1 - t_0)d^{(0)}))^{1/2}] \\ d^{(0)} &= (0.159 + 0.25t_0) / (0.5606 - 0.25t_0 + 0.3105\varphi - 0.0997b^{(0)}) \end{aligned}$$

Введем обозначения  $E + G / \varphi = h_\lambda$ ,  $E = f_\lambda$ . Тогда система уравнений в переменных  $h$  и  $f$  примет такой же вид, как в работе [3].

Результаты, полученные на основании системы (4.1), сравнивались с результатами работы [3], полученными численным интегрированием исходной системы дифференциальных уравнений.

Сравнение результатов приведено на фиг. 1 и показывает, что первое приближение (сплошные кривые) совпадает с численными результатами с хорошей точностью. При  $\varphi < -0,5$  разностный метод расчета, предложенный в работе [3], сходимости не давал.