Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.5

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВЕБЕРА

Б. И. Мукосеев

(Арзамас)

Уравнения движения сплошной среды в переменных Лагранжа для баротропной жидкости были получены Вебером [1], а Серрином [2] было дано их обобщение на случай изэнтропического течения. В данной работе показывается, что левая часть уравнения Вебера представляет «в малом» полную скорость (аналог теоремы Коши — Гельмгольца). Дается обобщение этих уравнений на случай течения вязкой сжимаемой жидкости. Делается попытка, с использованием теоремы Клебша [2], задавать поверхностные силы в виде градиентов от потенциальных функций, и в ряде частных случаев, имеющих практическое применение, это удается.

1. Вывод уравнений Вебера. Воспользуемся уравнением движения сплошной среды в следующей форме [2]:

$$\rho \mathbf{u}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{F} + \mathbf{P} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — массовая плотность, $\mathbf{u}$ — вектор скорости жидкой частицы, $\mathbf{F}$ — вектор массовых сил, $\mathbf{P}$ — вектор поверхностных сил.

Примем следующие обозначения: x_k — переменные Эйлера, a_k — переменные Лагранжа, точка означает полную производную по времени t, $\partial u_j / \partial x_k = u_{j,k}$ — частная производная по переменным Эйлера, $\partial u_j / \partial a_k = u_{j,\bar{k}}$ — частная производная по переменным Лагранжа, стандартные операторы векторного анализа, написанные с маленькой буквы, будут относиться к переменным Эйлера, а с большой — к переменным Лагранжа, индексы j, k пробегают значения 1, 2, 3, δ_{jk} — символ Кронекера, μ — коэффициент сдвиговой вязкости, λ — второй коэффициент вязкости, u_j^p — поступательная скорость жидкой частицы, $\omega_{jk} = {}^1/_2(u_{j,\bar{k}} - u_{k,\bar{j}})$ — угловая скорость жидкой частицы, $\varepsilon_{jk} = {}^1/_2 (u_{j,\bar{k}} + u_{k,\bar{j}})$ — относительная деформация жидкой частицы, $v = \rho^{-1}$ — удельный объем, σ — тензор напряжений, $I = E + p / \rho$ — энтальпия, E — внутренняя энергия, T — температура, $\varkappa$ — постоянная Стефана — Больцмана, $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2 + \mathbf{i}_3 x_3$ — радиус-вектор траектории жидкой частицы, $\mathbf{i}_k$ — единичные орты, S — энтропия, $c = (\gamma p v)^{1/2}$ — скорость звука, γ — отношение удельных теплоемкостей.

Формулы перехода от эйлерового описания к лагранжевому обозначим следующим образом: якобиан

$$\frac{\partial (f, x_2, x_3)}{\partial (a_1, a_2, a_3)} = [f, x_2, x_3] \quad \left(\text{при } f = x_1 \quad J = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (a_1, a_2, a_3)}\right)$$

$$\operatorname{grad} f = J^{-1} (\mathbf{i}_1 [f, x_2, x_3] + \mathbf{i}_2 [x_1, f, x_3] + \mathbf{i}_3 [x_1, x_2, f])$$

$$\operatorname{div} f = J^{-1} ([f, x_2, x_3] + [x_1, f, x_3] + [x_1, x_2, f]) \quad \text{и т. д.}$$

Предположим, что вектор массовых сил имеет потенциал Ω, тогда $\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\cdot\Omega$. Далее, умножая обе части уравнения (1.1) на grad $\mathbf{r}$, получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\left(\frac{u^2}{2} - \Omega\right) + v\mathbf{P}\operatorname{grad}\mathbf{r} \tag{1.2}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{r} = \mathbf{i}_1(\mathbf{r}_{,\bar 1}\,\mathbf{u}) + \mathbf{i}_2(\mathbf{r}_{,\bar 2}\,\mathbf{u}) + \mathbf{i}_3(\mathbf{r}_{,\bar 3}\mathbf{u}) = \mathbf{i}_k(\mathbf{r}_{,\bar k}\mathbf{u}))$$

Интегрируя уравнение (1.2) по времени от t_0 до t, получим уравнение движения в форме Вебера

$$U - U_0 = \operatorname{grad}\psi + A \tag{1.3}$$

Здесь

$$\psi = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{u^2}{2} - \Omega\right)d\tau, \quad \mathbf{A} = \int_{t_0}^{t} v\mathbf{P}\operatorname{grad}\mathbf{r}\,d\tau, \quad \mathbf{U} = \mathbf{u}\operatorname{grad}\mathbf{r}$$

индекс нуль означает, что данная величина взята в момент времени t_0.

В проекциях на оси прямоугольных координат $OX_1X_2X_3$ уравнение (1.3) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{3}(u_j x_{j,\bar k} - u_{0j}x_{0j,\bar k}) = \psi_{,\bar k} + A_k \tag{1.4}$$

Можно показать, что вектор $\mathbf{U}$ — алгебраическая сумма трех векторов: вектора поступательной скорости $\mathbf{u}^p$, вектора деформационной скорости и вектора вращательной скорости (аналог теоремы Коши — Гельмгольца [4]). Для доказательства этого утверждения используем соотношения Кирхгофа [5]

$$x_{j,\bar k} = \delta_{jk} + u_{j,\bar k}\delta t$$

Подставляя это соотношение в левую часть (1.3) и выполняя выкладки, которые изложены в [4], получим следующее выражение для левой части уравнения (1.3):

$$U_j = u_j^p + \varepsilon_{jk}\delta x_k - \omega_{jk}\delta x_k$$

Здесь все члены полностью совпадают с членами формул Коши — Гельмгольца [4], за исключением знака у члена $\omega_{jk}\delta x_k$, что объясняется самим описанием Лагранжа. Тем самым показано, что вектор $\mathbf{U}$ является полной скоростью.

Для справки выпишем соотношения, которые связывают скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$, т. е. (производная от U_k не берется)

$$u_1 = J^{-1}[U_1, x_2, x_3], \quad u_2 = J^{-1}[x_1, U_2, x_3], \quad u_3 = J^{-1}[x_1, x_2, U_3]$$

2. Некоторые частные виды уравнения (1.3). Уравнение в форме (1.3) имеет сложную форму. Упрощение уравнения (1.3) можно начать с выражения для поверхностной силы $\mathbf{P}$. Определим ее следующим образом. Опираясь на теорему Клебша [3], которая заключается в том, что любой вектор можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{P} = \operatorname{grad}\alpha + \beta\operatorname{grad}\chi \tag{2.1}$$

где α, β, χ — пока неизвестные потенциальные функции, представим **A** в виде

$$\mathbf{A} = \int_{t_0}^{t} v(\operatorname{grad}\alpha + \beta \operatorname{grad}\chi)\,d\tau$$

Для определения α, β, χ перейдем к рассмотрению конкретных математических моделей.

Идеальная жидкость. Пусть поверхностные силы выражены через тензор напряжений [2] $\mathbf{P} = \operatorname{div}\sigma$.

Используя гипотезу аддитивности [6], тензор σ можно расщепить на обратимую и необратимую части

$$\sigma = \sigma_{jk}^{(r)} + \sigma_{jk}^{(i)} \tag{2.2}$$

Для идеальной несжимаемой жидкости реологическое уравнение состояния принимает вид [6]

$$\sigma_{jk}^{(r)} = -p, \qquad \sigma_{jk}^{(i)} = 0$$

Полагая $\alpha = -p$, $\beta = \chi = 0$ и делая несложные выкладки, уравнение движения (1.3) запишем в виде

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi^{\bullet} = \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} - \Omega \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что разность векторов полной скорости $\mathbf{U} - \mathbf{U}_0$ является потенциальным вектором. Отметим, что можно привести пример вихревого течения жидкости (задача Герстнера [2]), в котором скорость жидкой частицы **u** не является потенциальной.

В случае баротропной сжимаемой жидкости уравнение движения принимает вид (адиабатическое течение)

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \varphi^{\bullet} = \frac{u^2}{2} - I - \Omega \tag{2.4}$$

Это уравнения, полученные Вебером [1].

Для изэнтропического течения ($S^{\bullet} = 0$) [2]

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi + \eta \operatorname{grad} S \tag{2.5}$$

$$\varphi^{\bullet} = \frac{u_2}{2} - I - \Omega, \qquad \eta^{\bullet} = T$$

Вязкая жидкость. Полагая для вязкой несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, $\alpha = -p$, $\beta = \mu = \text{const}$, $\nu = \mu\rho^{-1}$, $\operatorname{rot}\omega = \operatorname{grad}\chi$, имеем

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \bar{\varphi}^{\bullet} = \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} - \Omega - \nu\chi \tag{2.6}$$

Эти уравнения справедливы для течений Куэтта, Пуайзеля, Бельтрами, Стокса и вообще для медленных течений.

Так, если положить $\alpha = -p + \lambda\theta^{\bullet}$, $\beta = \chi = 0$, $\theta^{\bullet} = \operatorname{div} u$ ($\theta = \ln J$), то получим уравнения движения сжимаемой жидкости, в которой учитывается объемная вязкость

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi - \int_{t_0}^{t} \alpha \operatorname{grad} v\,d\tau, \quad \varphi^{\bullet} = \frac{u^2}{2} - \Omega - v(p - \lambda\theta^{\bullet}) \tag{2.7}$$

Систему уравнений (2.7) можно обобщить и на изотропно излучающий газ. В этом случае необходимо положить $\alpha = -p + \lambda\theta^{\cdot} - \varkappa T^4$, $\beta = \chi = 0$. Тогда имеем

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi - \int_{t_0}^{t} \alpha \operatorname{grad} v\, d\tau, \quad \varphi^{\cdot} = \frac{u^2}{2} - \Omega - v(p - \lambda\theta^{\cdot} + \varkappa T^4) \tag{2.8}$$

Если положить $\beta = \mu = \mathrm{const}$, $\operatorname{rot}\omega = \operatorname{grad}\chi$, $\alpha = -p + \lambda\theta^{\cdot} - \varkappa T^4$, то уравнения примут вид

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi - \int_{t_0}^{t} (\alpha + \mu\chi) \operatorname{grad} v\, d\tau \tag{2.9}$$

$$\varphi^{\cdot} = u^2/2 - \Omega - v(p - \lambda\theta^{\cdot} + \varkappa T^4 + \mu\chi)$$

В данной системе уравнений частично учитывается сдвиговая вязкость. К этим течениям можно отнести течение Куэтта с излучением.

Перейдем к выводу уравнения движения для вязкой сжимаемой жидкости. Здесь обратимая часть тензора $\sigma_{jk}^{(r)}$ для ньютоновой жидкости равна просто давлению p, т. е. $\sigma_{jk}^{(r)} = -p$, а необратимая

$$\sigma_{jk}^{(i)} = \lambda\theta^{\cdot}\delta_{jk} + \mu(u_{j,k} + u_{k,j})$$

Используя теорему Клебша [3], вектор полной скорости можно представить в виде

$$\mathbf{U} = \operatorname{grad} h + f \operatorname{grad} g$$

Можно получить следующую форму уравнения движения:

$$\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\psi + \int_{t_0}^{t} v\{\operatorname{grad}[-p + (\lambda + \mu)\theta^{\cdot}] + \tag{2.10}$$

$$+ \theta^{\cdot} \operatorname{grad}\mu + \mathbf{B}\}\, d\tau$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}_k [\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \mathrm{u}_j)]\, \mathrm{x}_{j\,\bar{\mathrm{k}}}$$

С физической точки зрения член B в уравнении (2.10) описывает перенос количества движения. Его можно записать в переменных Лагранжа и получить частные случаи: несжимаемая вязкая жидкость, идеальная жидкость и т. д.

3. О решении частных задач. *Стационарное течение.* Для простоты рассмотрим установившееся течение Куэтта. Граничные условия

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad (x_2 = 0,\ x_2 = l)$$

где l — расстояние между пластинами. Решение ищем в виде

$$x_1 = a_1 + \xi(a_1, a_2, t), \quad x_2 = a_2, \quad p = Aa_1$$

где A — заданная константа. На основании уравнения неразрывности имеем $x_{1,\bar{1}} = 1$, т. е. $\xi_{\bar{1}} = 0$.

Так как процесс установившийся, то $\mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = 0$, тогда система уравнений Навье-Стокса в переменных Лагранжа

$$\dot{\xi}_{,\bar{2}\bar{2}} = A\mu^{-1}$$

Решение с учетом граничных условий имеет вид

$$x_1 = a_1 + \frac{Al^2}{2\mu}\left[\left(\frac{a_2}{l}\right)^2 - \frac{a_2}{l}\right], \quad x_2 = a_2, \quad p = Aa_1$$

Из этого примера видно, что для стационарного случая уравнения значительно упростились.

Нестационарные течения. До сих пор рассматривалось упрощение поверхностной силы **P**. Теперь рассмотрим инерционную силу. Выше было доказано, что полная скорость разлагается на поступательную скорость, деформационную и вращательную. На самом деле полную скорость можно представить аддитивно, т. е. поступательную скорость отделить от полной. Это можно сделать, если траекторию жидких частиц представить в следующем виде:

$$x_k = a_k + \xi_k(a_j, t)$$

Тогда полная скорость

$$U_j = u_j + \sum_{k=1}^{3} u_k \xi_{k,\bar{j}} = u_j + \frac{1}{2}(u^2)_{,\bar{j}}\, dt$$

т. е. второй член мал по сравнению со скоростью u_j, поэтому им в некоторых случаях можно пренебречь.

В качестве примера рассмотрим волны Герстнера [2]. Эта задача интересна тем, что имеет точное аналитическое решение. Заменяя в уравнении (2.3) **U** на **u** и интегрируя полученное уравнение еще раз по t, получим

$$\xi - u_0 t = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \varphi^{\cdot\cdot} = \frac{u^2}{2} - \frac{p}{\rho} - \Omega$$

Подставляя решение Герстнера [2]

$$x_1 = a_1 + m^{-1}\exp(ma_2)\sin m(a_1 + ct)$$

$$x_2 = a_2 - m^{-1}\exp(ma_2)\cos m(a_1 + ct)$$

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{const} - ga_2 + \frac{c^2}{2}\exp(2ma_2)$$

в полученную выше систему уравнений, убеждаемся в том, что система удовлетворяется точно при $c^2 = gm^{-1}$ (g — ускорение силы тяжести, m^{-1} — амплитуда колебания, c — скорость распространения волны).

Рассмотрим неустановившееся течение Куэтта со следующими начальными и граничными условиями:

$$t = 0, \; u_1 = u_2 = 0, \qquad p = 0$$

$$x_2 = 0, \quad x_2 = l, \quad u_1 = u_2 = 0$$

Решение в этом случае удобно представить в виде

$$x_1 = a_1 + \xi(a_1, a_2, t), \quad x_2 = a_2, \quad p = Aa_1$$

Опять же из уравнения неразрывности следует, что $x_{1,\bar{1}} = 1$. Тогда получается следующее уравнение:

$$\xi^{\cdot} = \nu\xi_{,\bar{2}\bar{2}} - f$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$x_1 = a_1 + \frac{2}{l}\int_0^t\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\omega_n^2(t-\tau)\right]\sin\frac{n\pi a_2}{l}\sin\frac{n\pi b}{l}\right\}f(b,\tau)\,db\,d\tau$$

Рассмотрим частный случай, т. е.

$$f(b,\tau) = \frac{A_0}{\alpha\rho}\left[1-\alpha\tau-\exp(-\alpha\tau)\right]$$

Решение для x_1

$$x_1 = a_1 - 4A_0l^4(\pi^5\mu\nu)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)^{-5}\left[\frac{\omega_n^2+\alpha}{\alpha}+\frac{\alpha}{\omega_n^2-\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-\omega_n^2t)-\omega_n^2t-\frac{\omega_n^4}{\alpha(\omega_n^2-\alpha)}\exp(-\alpha t)\right]\sin\frac{(2n-1)\pi a_2}{l}$$

$$(\omega_n^2 = (2n-1)^2\pi^2\nu l^{-2})$$

Рассматривая установившийся режим, можно записать выражение для максимальной скорости ($x_2 = l/2$)

$$u_{1\max} = A_0l^2/8\mu$$

Задача Коши. Пусть адиабатическое течение баротропной жидкости описывается системой уравнений движения, уравнением неразрывности и уравнением состояния

$$\mathbf{U}-\mathbf{U}_0 = \operatorname{grad}\varphi, \qquad \varphi^{\cdot} = u^2/2 - I + \lambda v^{\cdot}, \qquad u_k = x_k^{\cdot} \tag{3.1}$$

$$\rho_0J_0 = \rho J \tag{3.2}$$

$$I = I_0(\rho/\rho_0)^{\gamma-1} \tag{3.3}$$

со следующими начальными условиями ($t = t_0$):

$$x_k = x_{0k}(a_j), \quad u_k = u_{0k}(a_j), \quad \rho = \rho_0, \quad I = I_0 \tag{3.4}$$

Искомые функции будем считать непрерывными и имеющими непрерывные бесконечные производные по данным переменным.

Задача, поставленная в такой форме, сложна, поэтому ее можно несколько упростить, если ввести новые переменные в следующей форме: $b_k = x_{0k}(a_j)$.

Система уравнений движения (3.1) по форме не изменится, но все производные по пространственным переменным будут выражены через новые, а уравнение неразрывности примет вид

$$\rho_0 = \rho J \tag{3.5}$$

где якобиан J будет выражен через новые переменные. Это можно доказать непосредственной подстановкой.

Прежде чем переходить к получению решения, проведем предварительный анализ. Представляя плотность и удельный объем в виде $\rho = \rho_0(1+\rho')$, $v = v_0(1+v')$, запишем

$$v' = (1+\rho')^{-1}-1, \qquad v' = J-1$$

Из этих выражений следует

$$\rho' = 0, \quad v' = 0, \quad J = 1, \quad \rho' \to \infty, \quad v' \to -1, \quad J \to 0$$

т. е. данные величины изменяются в следующих пределах:

$$0 \leqslant \rho' < \infty, \quad -1 < v' \leqslant 0, \quad 0 < J \leqslant 1$$

Учитывая это обстоятельство, уравнение состояния (3.3) можно разложить в биномиальный ряд, т. е.

$$(3.6) \qquad I = I_0 \left\{ 1 + \sum_{g=1}^{\infty} \left(-\frac{v'}{q!} \right) \prod_{n=1}^{q} (\gamma + n - 2) \right\}$$

В дальнейшем массовыми силами будем пренебрегать, а коэффициент второй вязкости считать постоянным. После этих предварительных замечаний можно перейти к окончательной постановке задачи Коши. Начальные условия (3.3) примут вид

$$x_k = b_k, \quad u_k = u_{0k}(b_j), \quad I = I_0(b_k), \quad v' = 0$$

Решение будем искать в следующем виде:

$$(3.7) \qquad x_k = \sum_{m=0}^{\infty} t^m x_k{}^m (b_k)$$

Аналогично и для других функций. После подстановки рядов (3.7) в измененную систему уравнений (3.1), (3.5), (3.6), получим следующие рекуррентные соотношения:

уравнения движения

$$x_k^1 - u_{0k} + \sum_{m=1}^{\infty} t^m \left\{ (m+1) x_k^{m+1} + \frac{1}{m} \left[I^{m-1}_{,\bar{k}} - \lambda v^m_{,\bar{k}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{m} (n-1) n \sum_{j=1}^{3} x_j^n x_{j,\bar{k}}^{m-n+1} \right] \right\} = 0$$

уравнение неразрывности

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m \left(v^m - v_0 \sum_{n=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \delta_{ijk} x^l_{i,\bar{1}} \, x^{n-l}_{j,\bar{2}} \, x^{m-n}_{k,\bar{3}} \right) = 0$$

$(v^\circ = v_0)$

уравнение состояния

$$I = I_0 \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left[(-1)^q (q!)^{-1} \left[\prod_{n=1}^{q} (\gamma + n - 2) \right] \left(-1 + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} \delta_{ijs} x^k_{i,\bar{1}} \, x^{l-k}_{j,\bar{2}} \, x^{m-l}_{k,\bar{3}} \right)^q \right] \right\}$$

Из этих рекуррентных соотношений (обычным приравниванием членов при одинаковой степени t) можно получить выражения для коэффициентов рядов (3.7). Анализ этих рядов показывает, что они сходятся, так как мажорируются сходящимся рядом

$$| M | \, [1 / (1 \cdot 2) + 1 / (2 \cdot 3) + \ldots]$$

Радиус сходимости рядов (3.7) определяется следующим интервалом. $0 < t < |M^{-1}|$, где M — максимальное значение m-й производной от начальных данных. Тем самым доказано существование решения задачи Коши. Единственность вытекает из единственности задания начальных данных.

Таким образом, уравнения в форме Вебера в некоторых частных случаях дают весьма простые уравнения (стационарные, периодические течения), и их можно решать обычными аналитическими методами.

Поступила 16 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лэмб Г.* Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Л—М., ОНТИ, 1937.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, М., Физматгиз, 1963.
5. *Кирхгоф Г.* Механика. М., Изд-во АН СССР, 1962.
6. *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М., «Мир», 1966.