

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОКА В АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

И. М. Руткевич

(Москва)

Стационарные двумерные распределения электрического тока в анизотропно проводящей среде с нелинейным законом Ома описываются системой уравнений, сформулированной в [1]. В зависимости от характера нелинейной связи между плотностью тока и электрическим полем и от величины параметра Холла β эта система может быть как эллиптического, так и гиперболического типа. При $\beta = 0$ уравнения электродинамики аналогичны уравнениям потенциальных газодинамических течений, что позволяет применить к решению задач аналог преобразования годографа в газовой динамике [2].

Ниже преобразование годографа, обобщенное на случай $\beta \neq 0$, применяется к простым двумерным задачам. Устанавливается связь между типом системы и положительной определенностью симметричной части тензора дифференциальной проводимости. Для потенциала и функции электрического тока получены линейные уравнения на плоскости годографа эффективного электрического поля. Формулируются краевые условия в терминах каждой из этих функций на линиях — образах электродных и диэлектрических участков в случае прямолинейных границ.

В области эллиптичности получены и проанализированы решения двух асимптотических задач: о распределении поля в полосе между идеально проводящей и диэлектрической стенками и о концентрации тока в окрестности кромки полубесконечного электрода. Обсуждается возможность построения соответствующих решений в гиперболическом случае.

При $\beta \neq 0$ точные решения для специальных зависимостей электропроводности от плотности тока, отвечающих области гиперболичности, получены методом характеристик в [3,4]. Имеются основания для предположения о неустойчивости распределений, соответствующих гиперболическим режимам [1,3-5]. Для однородных состояний неравновесной плазмы значение β , при котором изменяется тип системы, определяет также границу ионизационной неустойчивости. В общем случае неоднородных состояний неустойчивость гиперболических и смешанных решений не доказана. В эллиптической области уравнения описывают стабильные распределения тока, поэтому построение эллиптических решений представляет наибольший физический интерес.

1. Рассмотрим несжимаемую проводящую среду, движущуюся со скоростью $\mathbf{V}(x, y) = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y$ в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$, $B = \text{const} > 0$. Если магнитное число Рейнольдса мало, а вектор плотности тока \mathbf{j} лежит в плоскости xy и не зависит от координаты z , то система электродинамических уравнений имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial q_x}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial x} &= 0 \\ j_x &= (1 + \beta^2)^{-1} \sigma (q_x - \beta q_y), & j_y &= (1 + \beta^2)^{-1} \sigma (\beta q_x + q_y) \\ (q &= \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Здесь q — электрическое поле в сопутствующей системе отсчета. Второе уравнение (1.1) следует из условия $\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0$. В общем случае электропроводность σ и параметр Холла β зависят от плотности тока, так что вытекающая из закона Ома связь между модулями векторов j и q имеет вид:

$$(1.2) \quad j = [1 + \beta^2 (j)]^{-1/2} \sigma(j) q$$

Тип системы (1.1) определяется знаком выражения

$$(1.3) \quad \Delta = \frac{d \ln(j/\sigma) / d \ln j}{[d \ln(\sigma/\beta) / d \ln j]^2} - \frac{\beta^2}{4} = \frac{\lambda d \ln(j/\sigma) / d \ln q}{[d \ln(\sigma/\beta) / d \ln q]^2} - \frac{\beta^2}{4}$$

$$(\lambda = d \ln j / d \ln q)$$

При $\Delta > 0$ система принадлежит к эллиптическому, а при $\Delta < 0$ — к гиперболическому типу. В дальнейшем будем считать $\lambda > 0$, что соответствует монотонно возрастающей зависимости $j(q)$, реализуемой во многих практически интересных случаях. Кроме того, примем $\beta = \text{const}$. Это предположение качественно согласуется с характеристиками частично ионизированной неравновесной плазмы, параметр Холла которой гораздо менее чувствителен к изменениям плотности тока по сравнению с зависимостью $\sigma(j)$. Принятые допущения позволяют представить условие $\Delta > 0$ в следующей форме:

$$(1.4) \quad \beta < \beta_* = 2\sqrt{\lambda} / |1 - \lambda|$$

Здесь β_* — критическое значение параметра Холла, при переходе через которое изменяется тип системы (1.1).

В случае $\beta = 0$ область гиперболичности отвечает диапазону изменения q или j , в котором $\lambda < 0$, т. е. имеет место отрицательная дифференциальная проводимость (ОДП). При $\lambda > 0$ вольт-амперная характеристика $j(q)$ не содержит падающих участков. Однако и в этом случае гиперболичность системы при $\beta > \beta_*$ связана с возникновением ОДП в расширенном смысле этого термина. Дифференциальная проводимость анизотропно проводящей среды характеризуется тензором σ_d , который можно ввести, линеаризуя закон Ома

$$\delta j = \sigma_d \cdot \delta q, \quad \|\sigma_d\| = \|\partial j_\alpha / \partial q_\beta\|$$

Произведем разбиение тензора σ_d на симметричную и антисимметричную части: $\sigma_d = \sigma_s + \sigma_a$. При $\beta = \text{const}$ матрицы этих тензоров в системе главных осей тензора σ_s имеют вид

$$(1.5) \quad \|\sigma_s\| = \Lambda \begin{vmatrix} 1+H & 0 \\ 0 & 1-H \end{vmatrix}, \quad \|\sigma_a\| = \beta \Lambda \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Lambda = 1/2 (\lambda + 1) \sigma / (1 + \beta^2), \quad H = [(1 + \beta^2)/(1 + \beta_*^2)]^{1/2} \text{sign}(\lambda - 1)$$

Требование положительной определенности тензора σ_s имеет вид $H^2 < 1$ и совпадает с условием (1.3). Главные оси тензора σ_s направлены

по биссектрисе угла между векторами \mathbf{q} и \mathbf{j} и по нормали к ней. В случае линейной среды $H = 0$ и тензор σ_s будет изотропным. Пусть \mathbf{l} — произвольное направление в физической плоскости. Тогда для производной $\partial j_l / \partial q_l$ придем к формуле

$$\partial j_l / \partial q_l = \mathbf{l}(\sigma_d \cdot \mathbf{l}) = \mathbf{l}(\sigma_s \cdot \mathbf{l})$$

Здесь использовано обращение в нуль свертки $\mathbf{l}(\sigma_d \cdot \mathbf{l})$. Из полученного соотношения следует, что эллиптичность системы (1.1) эквивалентна монотонному росту j_l с увеличением q_l для всех направлений \mathbf{l} .

Пусть \mathbf{e}_i^* — базис главных осей тензора σ_s , так что вектор \mathbf{e}_1^* делит пополам угол между \mathbf{q} и \mathbf{j} . Представим единичный вектор \mathbf{l} в виде

$$\mathbf{l} = \cos \chi \mathbf{e}_1^* + \sin \chi \mathbf{e}_2^*$$

Тогда условие $\partial j_l / \partial q_l > 0$ при $\beta > \beta_*$ будет нарушено в следующих областях изменения угла χ :

$$\begin{aligned} |\chi| < \frac{1}{2} \omega, \quad |\chi - \pi| < \frac{1}{2} \omega \quad 0 < \lambda < 1 \\ |\chi - \frac{1}{2} \pi| < \frac{1}{2} \omega, \quad |\chi - \frac{3}{2} \pi| < \frac{1}{2} \omega \quad (\lambda > 1) \\ 0 < \omega = \arccos(1/|H|) < \theta = \arctg \beta \end{aligned}$$

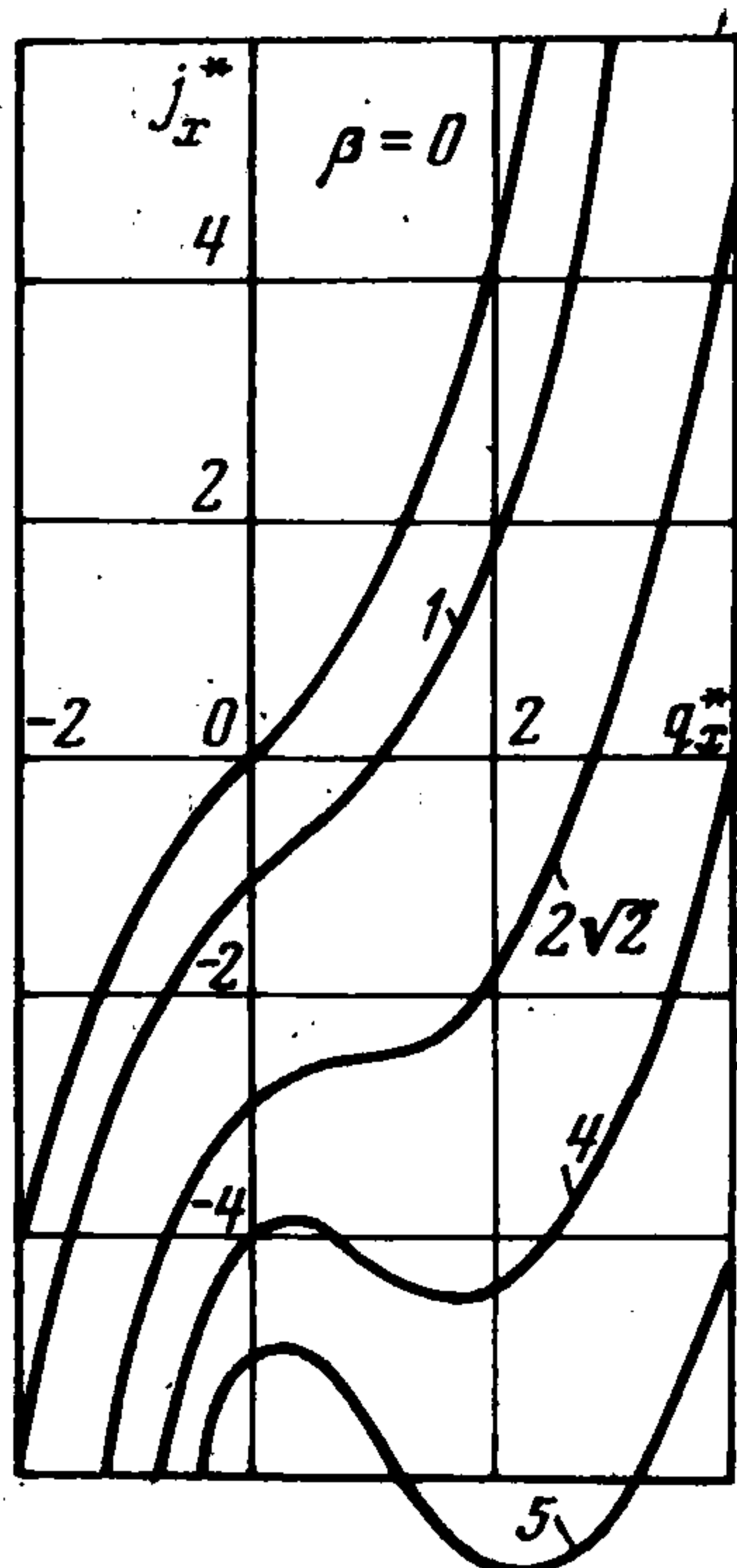
Если \mathbf{l} и \mathbf{m} — взаимно ортогональные векторы, то якобиан $\partial(j_l, j_m) / \partial(q_l, q_m)$ при $\lambda > 0$ всегда положителен, и связь между векторами \mathbf{j} и \mathbf{q} взаимно однозначна. В то же время якобиан

$$\partial(j_l, q_m) / \partial(j_m, q_l) = [(1 + H \cos 2\chi) / (1 - H \cos 2\chi)]$$

при $H^2 > 1$ может менять знак, так как угол χ при изменении направления вектора \mathbf{q} может принимать произвольные значения. Поэтому при $\beta > \beta_*$ существует область значений вектора \mathbf{q} , в которой невозможно однозначно определить одну из пар переменных (j_l, q_m) и (j_m, q_l) через другую.

На фиг. 1 в качестве примера изображены кривые зависимости величины $j_x^* = j_x(q_x, q_y) / j_y(0, q_y)$ от $q_x^* = q_x / q_y$ при $\lambda \equiv 2$ и разных значениях β . При $\beta > \beta_* = 2\sqrt{2}$ на кривых появляется падающий участок, и прямая $j_x^* = \text{const}$ может пересекать график функции $j_x^*(q_x^*)$ более чем в одной точке. В этом случае фиксированным величинам j_x, q_y отвечают, по крайней мере, два набора значений j_y, q_x .

Укажем еще на одно следствие проведенных выше рассуждений. Если при $\beta > \beta_*$ задать постоянную составляющую плотности тока j_x и постоянную составляющую q_y в области неоднозначности отображения $(j_x, q_y) \rightarrow (j_y, q_x)$, то можно формально построить разрывные решения в виде слоев, ограниченных плоскостями $x = \text{const}$. При этом распределения векторов \mathbf{q} и \mathbf{j} будут однородными внутри каждого слоя. На общих границах слоев величины q_x и j_y будут претерпевать скачок, а величины q_y и j_x остаются непрерывными в соответствии с обычными условиями на поверхностях разрыва в электродинамике. Гипотеза о возникновении кусочно-однородных структур в неравновесной плазме в результате развития ионизационной неустойчивости была выдвинута в [6].



Фиг. 1

2. На основании первых двух уравнений (1.1) введем функцию тока ψ и потенциал φ , так что

$$(2.1) \quad \mathbf{j} = \text{rot}(\psi \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{q} = -\nabla\varphi$$

Пусть α и γ — углы, составляемые с положительным направлением оси x векторами \mathbf{q} и \mathbf{j} соответственно. Эти углы связаны между собой соотношением

$$(2.2) \quad \gamma - \alpha = \theta = \text{arc tg } \beta$$

Для случая $\beta = \text{const}$ запишем, следуя [7], первые два уравнения (1.1) в ортогональных криволинейных координатах, связанных с линиями вектора \mathbf{q}

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \partial j / \partial s - \beta j \partial \alpha / \partial s + j \partial \alpha / \partial n + \beta \partial j / \partial n &= 0 \\ \partial q / \partial n - q \partial \alpha / \partial s &= 0 \end{aligned}$$

Операторы $\partial / \partial s$ и $\partial / \partial n$ означают дифференцирование в направлении вектора \mathbf{q} и нормали к нему соответственно. Уравнения (2.1) эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} \partial \varphi / \partial s &= -q, \quad \partial \varphi / \partial n = 0, \quad \partial \psi / \partial s = -j \sin \theta, \quad \partial \psi / \partial n = \\ &= j \cos \theta \end{aligned}$$

Из этих соотношений следуют формулы

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \partial q / \partial s &= J (q \partial \psi / \partial \alpha - j \sin \theta \partial \varphi / \partial \alpha), \quad \partial q / \partial n = J j \cos \theta \partial \varphi / \partial \alpha \\ \partial \alpha / \partial s &= J (j \sin \theta \partial \varphi / \partial q - q \partial \psi / \partial q) \\ \partial \alpha / \partial n &= -J j \cos \theta \partial \varphi / \partial q \\ J &= \partial (q, \alpha) / \partial (\psi, \varphi) \end{aligned}$$

Предполагая $J \neq 0$, после подстановки (2.4) в (2.3) и сокращения на J приходим к следующей линейной системе¹

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \partial \varphi / \partial q - \cos \theta [(\beta q / j) \partial \psi / \partial q + (\lambda / j) \partial \psi / \partial \alpha] &= 0 \\ \beta q \partial \varphi / \partial q - \partial \varphi / \partial \alpha - (q^2 / j \cos \theta) \partial \psi / \partial q &= 0 \end{aligned}$$

Так как $\theta = \text{const}$, то можно заменить оператор $\partial / \partial \alpha$ на $\partial / \partial \gamma$. В дальнейшем используются переменные «смешанного» географа q, γ . Поочередно исключая из (2.5) функции φ и ψ , приходим к линейным уравнениям второго порядка

$$(2.6) \quad \begin{aligned} L(\psi) + (2 - \lambda) q^{-1} \partial \psi / \partial q + \beta \lambda (\lambda - 1 - \mu) q^{-2} \partial \psi / \partial \gamma &= 0 \\ L(\varphi) + (\lambda - \mu) q^{-1} \partial \varphi / \partial q + \beta (\lambda - 1 - \mu) q^{-2} \partial \varphi / \partial \gamma &= 0 \\ L \equiv \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\beta(1-\lambda)}{q} \frac{\partial^2}{\partial q \partial \gamma} + \frac{\lambda}{q^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}, \quad \lambda = \frac{d \ln j}{d \ln q}, \quad \mu = \frac{d \ln \lambda}{d \ln q} \end{aligned}$$

При решении краевых задач за основу могут быть приняты как система (2.5), так и любое из уравнений (2.6). Если Γ_1 и Γ_2 — образы на плоскости

¹ Линейную систему уравнений на плоскости независимых переменных j, γ рассматривал Ю. П. Емец [2].

$q\gamma$ электродных и диэлектрических участков границы соответственно, то

$$(2.7) \quad (\varphi)_{\Gamma_1} = \text{const}, \quad (\psi)_{\Gamma_2} = \text{const}$$

Первому из условий (2.7) должен удовлетворять потенциал электрического поля E в неподвижной системе отсчета. Однако оно будет выполнено и для потенциала эффективного поля q , если на электродной стенке равна нулю нормальная компонента скорости.

В общем случае линии Γ_1 и Γ_2 неизвестны. Кроме того, граничные условия (2.7) содержат различные функции, что затрудняет формулировку задач при взятии за основу одного из уравнений (2.6).

Первое из этих затруднений частично, а второе полностью снимается, если граница области на физической плоскости состоит из прямолинейных участков. На таких участках $\gamma = \text{const}$, поэтому Γ_1 и Γ_2 состоят из отрезков, параллельных оси q . Однако положения концов отрезков известны не всегда. Для прямолинейных электрода и диэлектрика можно сформулировать граничное условие в терминах функций ψ и φ соответственно. Для этой цели нужно воспользоваться соотношениями (2.4) и условиями

$$(\partial\alpha / \partial n)_{\Gamma_1^*} = 0, \quad (\cos\theta \partial\alpha / \partial s + \sin\theta \partial\alpha / \partial n)_{\Gamma_2^*} = 0$$

на электроде Γ_1^* и диэлектрике Γ_2^* в физической плоскости. В результате получим

$$(2.8) \quad (\lambda\partial\psi / \partial\gamma + \beta q\partial\psi / \partial q)_{\Gamma_1} = 0, \quad (\partial\varphi / \partial\gamma - \beta q\partial\varphi / \partial q)_{\Gamma_2} = 0$$

Если решение задачи для функции ψ (следовательно, и для φ) известно, то переход к физической плоскости осуществляется с помощью уравнений

$$(2.9) \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q} = K \left(\mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \mathbf{q}^* \frac{\partial\psi}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\gamma} = K \left(\mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} + \mathbf{q}^* \frac{\partial\psi}{\partial\gamma} \right)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{q}^* = q_y\mathbf{e}_x - q_x\mathbf{e}_y$$

$$K = \partial(x, y) / \partial(\varphi, \psi) = -\sigma / j^2$$

Путем квадратур из системы (2.9) можно найти функцию $\mathbf{r}(q)$. Обратная функция $q(\mathbf{r})$ будет однозначной, если отличен от нуля якобиан

$$(2.10) \quad D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \gamma)} = -\frac{\sigma \cos\theta}{j^3} \left[q^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial q} \right)^2 + \beta(1-\lambda) q \frac{\partial\psi}{\partial q} \frac{\partial\psi}{\partial\gamma} + \lambda \left(\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} \right)^2 \right]$$

Квадратичная форма в правой части (2.10) будет знакоопределенной при $\beta < \beta_*$. Поэтому для эллиптических решений якобиан может обращаться в нуль лишь в изолированных точках. При $\beta \geq \beta_*$ в физической плоскости может существовать линия, на которой $D = 0$. Используя газодинамическую терминологию, можно назвать такую линию предельной [7]. В окрестности предельной линии невозможно построить однозначное и непрерывное распределение $q(\mathbf{r})$. Условие $\beta \geq \beta_*$ необходимо, но не достаточно для существования предельной линии. Соответствующие примеры содержатся в гиперболических вариантах рассмотренных ниже задач.

В дальнейшем рассматривается следующая модельная зависимость:

$$(2.11) \quad j(q) = Aq^\lambda \quad (A = \text{const} > 0, \quad \lambda = d \ln j / d \ln q = \text{const} > 0)$$

При $\lambda > 1$ она качественно соответствует поведению низкотемпературной плазмы с неравновесной ионизацией (за исключением области слабых токов, где нелинейные эффекты фактически не имеют места). При $\lambda = \text{const}$ в уравнениях (2.6) следует положить $\mu = 0$.

3. Одно из простых двумерных распределений тока описывается функцией

$$(3.1) \quad \psi(q, \gamma) = Cq^\lambda \sin \gamma, \quad C = \text{const} < 0$$

Функция (3.1), рассматриваемая в полуполосе

$$(3.2) \quad 0 < q < \infty, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_m = \frac{1}{2}\pi + \theta$$

удовлетворяет первому уравнению (2.6) и граничным условиям

$$\psi(0, \gamma) = 0, \quad \psi(q, 0) = 0, \quad (\lambda \partial \psi / \partial \gamma + \beta q \partial \psi / \partial q)_{\gamma=\gamma_m} = 0$$

В физической плоскости решение (3.1) описывает протекание тока в полосе постоянной ширины ($-\delta \leq y \leq 0$, $|x| < \infty$) между электродной ($y = -\delta$) и диэлектрической ($y = 0$) стенками. Знак константы C выбран так, чтобы при $x \rightarrow -\infty$ выполнялось условие $j \rightarrow 0$. Линии тока, выходящие из электрода под углом $\gamma = \gamma_m$, на некотором расстоянии от него разворачиваются и неограниченно продолжаются вправо, прижимаясь к диэлектрической стенке при $x \rightarrow \infty$.

По аналогии с соответствующими линейными задачами при $\beta < \beta_*$ можно ожидать, что данное решение определит в области $-\infty < x \leq -\delta$ асимптотику решения, отвечающего каналу со сдвинутыми полубесконечными электродами: $y = -\delta$, $x < 0$ и $y = 0$, $x > 0$. В частности, представляет интерес нахождение зависимостей характерных длин спада тока и поля при $x \rightarrow -\infty$, отнесенных к калибру канала, от параметров λ и β .

Интегрируя уравнения (2.9), найдем функции $x(q, \gamma)$ и $y(q, \gamma)$ с точностью до аддитивных постоянных. Константа, входящая в выражение для $y(q, \gamma)$ и величина C из (3.1) находятся из условий $y(q, 0) = 0$, $y(q, \gamma_m) = -\delta$. Константу в выражении для $x(q, \gamma)$ можно определить, задавая, например, полный ток I , протекающий через электрод слева от точки $x = 0$, $y = -\delta$. В результате придем к следующим формулам:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x &= h \{ \lambda \ln(q/q_0) + \frac{1}{4}(\lambda - 1) [\cos(2\gamma - \theta) / \cos \theta + 1 + \\ &\quad + 2\beta(\gamma - \gamma_m)] \} \\ y &= \delta \gamma_m^{-1} \{ \frac{1}{2}H [\sin(2\gamma - \theta) + \sin \theta] - \gamma \} \\ h &= 2\delta / [(\lambda + 1)\gamma_m], \quad q_0 = (I / Ah \cos \theta)^{1/\lambda} \end{aligned}$$

Величина H определена в (1.5). Из соотношений (3.3) и (2.11) найдем распределения эффективного поля, плотности тока и локальной диссипации на электроде

$$(3.4) \quad \begin{aligned} q &= q_0 \exp(x/h_q), \quad j = Aq_0^\lambda \exp(x/h_j) \\ g &= j^2 / \sigma = Aq_0^{\lambda+1} \cos \theta \exp(x/h_g) \\ h_q / \delta &= 2\gamma_m^{-1} \lambda / (\lambda + 1), \quad h_j / \delta = 2\gamma_m^{-1} / (\lambda + 1) \\ h_g / \delta &= 2\gamma_m^{-1} \lambda / (\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Как следует из (3.4), длина спадающего эффективного поля h_q будет монотонно возрастающей, а длина спадающей плотности тока h_j — убывающей функцией параметра λ . Длина затухания диссипации h_g максимальна при $\lambda = 1$, т. е. в случае линейной среды. Рост параметра Холла приводит к уменьшению (не более, чем двукратному) всех указанных длин.

Рассмотрим якобиан D отображения (3.3)

$$D = \partial(x, y) / \partial(q, \gamma) = \frac{1}{2} h^2 \lambda (\lambda + 1) q^{-1} [H \cos(2\gamma - \theta) - 1]$$

В случае $\beta \geq \beta_*$ будет $H^2 \geq 1$, и величина D обращается в нуль на интервале $(0, \gamma_m)$ в точках $\gamma = \frac{1}{2}(\theta \pm \omega)$ при $H \geq 1$ либо в точках $\gamma = \frac{1}{2}(\pi + \theta \pm \omega)$ при $H \leq -1$, где $\omega = \arccos(1/|H|)$. Указанным значениям γ в физической плоскости соответствуют предельные линии $y = \text{const}$, из которых, по меньшей мере, одна расположена внутри полосы $-\delta < y < 0$. Как и в газовой динамике [7], предельные линии будут огибающими одного из семейств характеристик. Функция $y = y(\gamma)$, определенная в (3.3), имеет два экстремума в интервале $(0, \gamma_m)$. Поэтому не существует обратной функции $\gamma(y)$, непрерывной на отрезке $[-\delta, 0]$ и удовлетворяющей условиям: $\gamma(-\delta) = \gamma_m$, $\gamma(0) = 0$. Таким образом, в гиперболической области рассмотренная задача не имеет непрерывного решения.

В параболическом случае ($H^2 = 1$) непрерывная обратная функция $\gamma(y)$ существует. При этом линии тока имеют бесконечную кривизну в точках предельной линии.

Отметим влияние нелинейных эффектов на характер растекания тока в области эллиптичности. С ростом параметра λ убывание функции $\gamma(y)$ замедляется вблизи электрода и усиливается вблизи диэлектрика. Одновременно сокращается размер примыкающей к диэлектрику зоны, в которой $j_x > 0$.

4. При рассмотрении разных прикладных задач один из существенных вопросов состоит в установлении асимптотики и качественной картины поля вблизи кромки электрода. Для выяснения этого вопроса рассмотрим модельную задачу о распределении тока в полуплоскости $y \geq 0$, граница которой составлена из полубесконечных электрода ($y = 0, x < 0$) и изолятора ($y = 0, x > 0$). Соответствующее решение для случая изотропной нелинейной среды дано в [8].

Как и в задаче из п. 3, область на плоскости годографа представляет собой полуполосу, определяемую неравенствами (3.2). Граничные условия для функции тока имеют вид:

$$(4.1) \quad \psi(\infty, \gamma) = 0, \quad \psi(q, 0) = 0, \quad (\lambda \partial \psi / \partial \gamma + \beta q \partial \psi / \partial q)_{\gamma=\gamma_m} = 0$$

Первое условие (4.1) основано на предположении о конечности интегрального тока, протекающего через любой участок электрода $(x, 0)$, и обращении величины q в бесконечность в концевой точке. Структура первого уравнения (2.6) при $\mu = 0$ и вид граничных условий (4.1) позволяют искать решение в виде

$$(4.2) \quad \psi(q, \gamma) = q^\kappa f(\gamma), \quad \kappa = \text{const} < 0$$

Константа κ подлежит определению в дальнейшем. Функция $f(\gamma)$ должна быть решением однородной граничной задачи

$$(4.3) \quad \lambda f'' + \beta(1 - \lambda)(\kappa - \lambda) f' + \kappa(1 + \kappa - \lambda) f = 0 \\ f(0) = 0, \quad \lambda f'(\gamma_m) + \kappa \beta f(\gamma_m) = 0$$

Исходя из физических соображений, следует рассмотреть лишь те решения задачи (4.3), которые соответствуют отрицательным собственным значениям κ . В зависимости от параметров решение может принять одну из следующих форм:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} f(\gamma) &= Ce^{a\gamma} \sin u\gamma \quad (d > 0), \quad f(\gamma) = Ce^{a\gamma} \operatorname{sh} v\gamma \quad (d < 0) \\ a &= \frac{1}{2} \beta (\lambda - 1) (\kappa - \lambda) / \lambda, \quad d = \kappa (1 + \kappa - \lambda) / \lambda - a^2, \\ u &= \sqrt{d}, \quad v = \sqrt{-d} \end{aligned}$$

При $d = 0$ будет $f = C\gamma \exp a\gamma$. Для определения величины κ необходимо использовать последнее краевое условие (4.3), которое приводится к виду

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \lambda u \operatorname{ctg} \gamma_m u &= -(\lambda a + \kappa \beta) \quad (d > 0) \\ \lambda v \operatorname{cth} \gamma_m v &= -(\lambda a + \kappa \beta) \quad (d < 0) \end{aligned}$$

Фактически удобнее рассматривать соотношения (4.5) как трансцендентные уравнения относительно u и v , считая $\kappa = \kappa(u)$ или $\kappa = \kappa(v)$. Последние зависимости определяются формулами

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \kappa(u; \lambda, \beta) &= (\lambda - 1 - 2\lambda\xi - \sqrt{r(u^2)}) / [2(1 - \xi)] \\ \kappa(v; \lambda, \beta) &= (\lambda - 1 - 2\lambda\xi \mp \sqrt{r(-v^2)}) / [2(1 - \xi)] \\ \xi &= \beta^2 / \beta_*^2, \quad r(u^2) = (\lambda - 1 - 2\lambda\xi)^2 + 4\lambda(1 - \xi)(\lambda\xi + u^2) \end{aligned}$$

Положительный знак перед радикалом в формуле для $\kappa(v)$ берется при $\xi > \xi'(\lambda)$, где $\xi' < 1$ — значение параметра ξ , при котором решение v второго уравнения (4.5) обращает в нуль функцию $r(-v^2)$. Уравнения (4.5) инвариантны относительно смены знака у величин u и v , эквивалентной изменению знака константы C . Поэтому без ограничения общности можно считать $u \geq 0$, $v \geq 0$.

При $0 \leq \beta \leq \beta_1$ первое уравнение (4.5) имеет дискретный набор решений u_k таких, что

$$\gamma_m u_k \in (k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Связь между величинами β_1 и β_* имеет вид

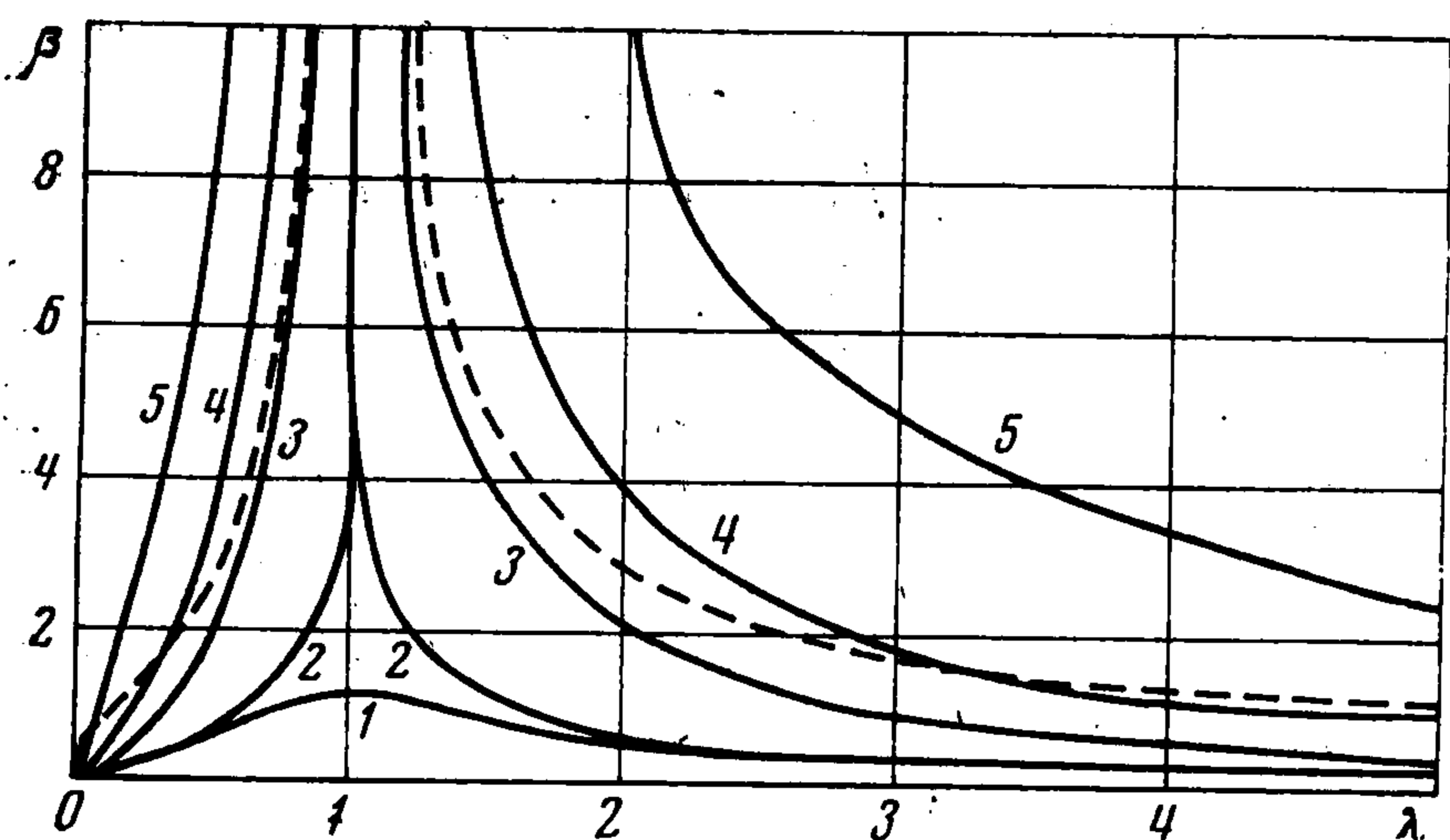
$$\beta_*(\beta_1) = [(1 + \beta_1^2)(1 + \beta_1 \gamma_m(\beta_1))^2 - 1]^{1/2} > \beta_1$$

Корни u_k при $k \geq 1$ должны быть отброшены, так как они не соответствуют исходной постановке задачи. Если бы значение u совпадало с одним из этих корней, то функция $f(\gamma)$ обращалась бы в нуль при $\gamma = \pi/u < \gamma_m$. Тогда в физической плоскости существовала бы наклонная прямолинейная изоляционная стенка, что при постановке задачи не предполагается.

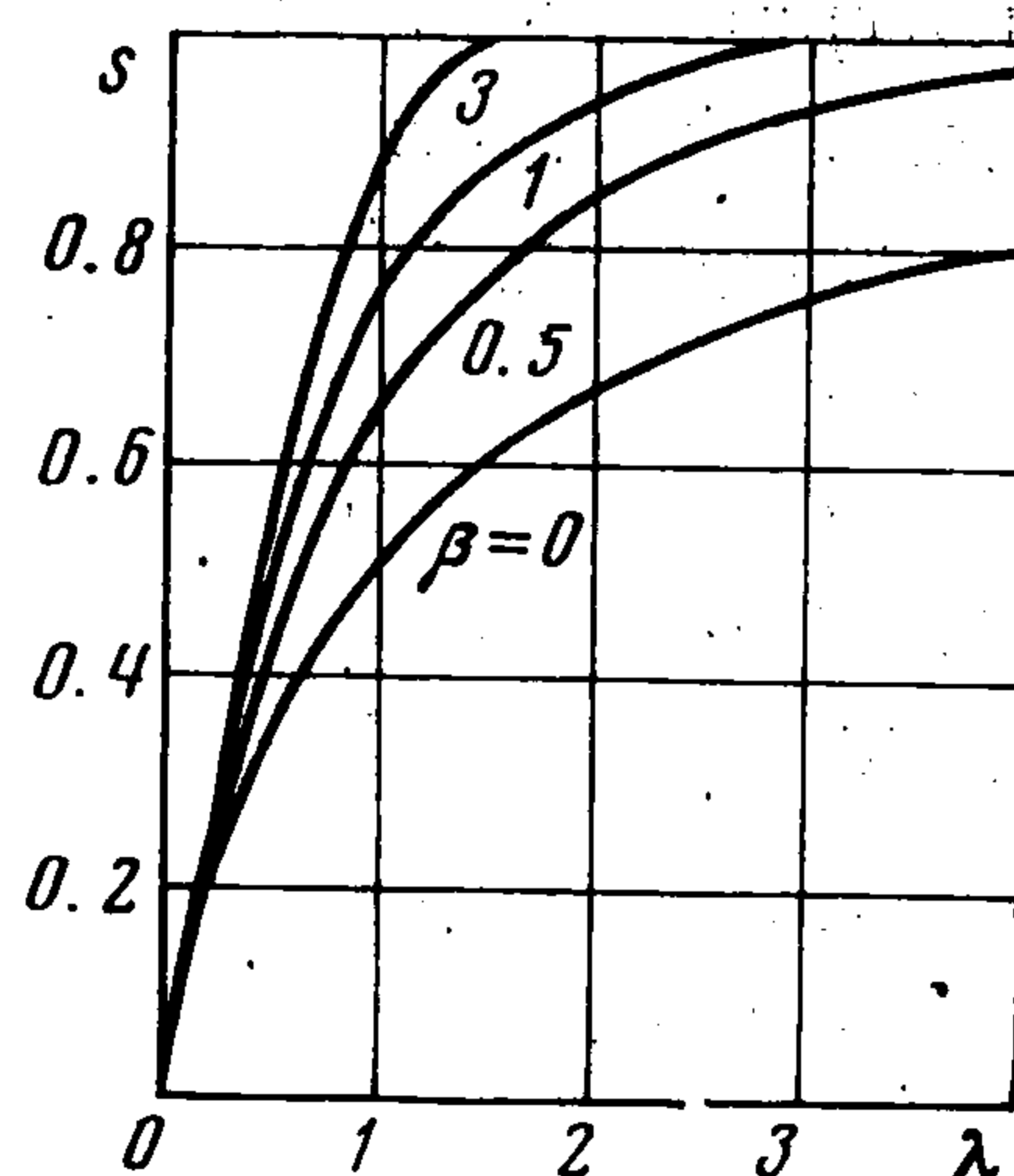
При возрастании β от 0 до β_1 корень u_0 первого уравнения (4.5) монотонно убывает от единицы до нуля. При $\beta > \beta_1$ следует рассматривать второе уравнение (4.5), для которого доказывается однозначная разрешимость. Корень v этого уравнения монотонно возрастает с увеличением β , пробегая полупрямую $(0, \infty)$ при изменении β от β_1 до ∞ . Отметим, что переход через значения $\beta = \beta_*$ происходит непрерывным образом, так как функция $\kappa(v; \lambda, \beta)$ регулярна по параметру β при $\beta = \beta_*$.

Из соотношений (4.5) можно в явном виде найти зависимость $\beta_*(\beta, u)$ или $\beta_*(\beta, v)$. Поэтому при проведении расчетов удобно строить линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ на плоскости $\lambda\beta$. Результаты построения представлены на фиг. 2. Кривым 1—5 соответствуют следующие значения u, v : 1 — $u = 0.3$, 2 — $u = v = 0$, ($\beta = \beta_1$); 3 — $v = 1$, 4 — $v = 2$, 5 — $v = 5$. Пунктиром показана зависимость $\beta_*(\lambda)$.

Интегрируя уравнения (2.9), найдем отображение переменных годографа на физическую плоскость. Константы интегрирования определяются



Фиг. 2



Фиг. 3

условиями: $x = y = 0$ при $q = \infty$. Постоянная C , входящая в (4.4), фиксируется заданием интегрального тока I , протекающего через концевой участок электрода заданной длины h .

Окончательные формулы при $\beta < \beta_1$ имеют следующий вид:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x &= -G(q/q_h)^{\kappa-\lambda} e^{a(\gamma-\gamma_m)} [\eta_1(\gamma) \sin u\gamma + \eta_2(\gamma) \cos u\gamma] \\ y &= G(q/q_h)^{\kappa-\lambda} e^{a(\gamma-\gamma_m)} [\eta_1'(\gamma) \sin u\gamma + \eta_2'(\gamma) \cos u\gamma] \\ G &= \frac{h \sin \gamma_m}{\kappa \sin u\gamma_m}, \quad q_h = \left[\frac{I}{(1-\lambda/\kappa) Ah \cos \theta} \right]^{1/\lambda} \\ \eta_1 &= \kappa \sin \gamma + \lambda a \cos \gamma, \quad \eta_2 = \lambda u \cos \gamma \end{aligned}$$

Штрихи у функций $\eta_{1,2}$ означают дифференцирование по γ . При $\beta > \beta_1$ формулах (4.7) нужно произвести замену

$$\begin{aligned} \sin u\gamma_m &\rightarrow \text{sh } v\gamma_m, \quad \sin u\gamma \rightarrow \text{sh } v\gamma, \quad \cos u\gamma \rightarrow \text{ch } v\gamma \\ \eta_2 &\rightarrow \lambda v \cos \gamma \end{aligned}$$

а при $\beta = \beta_1$ — замену

$$\sin u\gamma_m \rightarrow \gamma_m, \quad \sin u\gamma \rightarrow \gamma, \quad \cos u\gamma \rightarrow 1, \quad \eta_2 \rightarrow \lambda \cos \gamma$$

Распределение величин q , j и $g = j^2/\sigma$ на поверхности электрода описывается степенными функциями следующего вида:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} q &= q_h x_*^{-p}, \quad j = j_h x_*^{-s}, \quad g = q_h j_h x_*^{-(s+p)} \cos \theta \\ x_* &= -x/h, \quad j_h = A q_h^\lambda, \quad p = 1/(\lambda - \kappa), \quad s = \lambda/(\lambda - \kappa) \end{aligned}$$

Исследование показывает, что имеют место неравенства

$$\kappa < 0 \quad (\lambda \geq 1), \quad \kappa < -1 + \lambda \quad (0 \leq \lambda < 1)$$

Эти неравенства эквивалентны условиям $0 < p < 1$, $0 < s < 1$, обеспечивающим сходимость интегралов от величин q и j по концевому участку электрода и от величины g по ограниченной двумерной области, примыкающей к составной стенке.

На фиг. 3 приведено семейство кривых, изображающих зависимость величины s от параметра λ при разных значениях β . При $\lambda > 1$ концентрация тока в концевой части электрода повышается по сравнению со случаем $\sigma = \text{const}$. Этот вывод согласуется с результатами численных расчетов [1]. При $\lambda < 1$ нелинейные явления приводят к снижению кон-

центрации тока. С увеличением параметра Холла происходит рост концентрации как в линейном [9], так и в нелинейном случаях.

Из формул (4.7) вытекает, что отношение y/x зависит только от γ . Следовательно, линии тока образуют семейство подобных кривых с центром гомотетии в начале координат. Влияние нелинейности на характер разворота линий тока аналогично установленному в [8] для изотропной среды.

Полученное решение существует во всей верхней полуплоскости $y \geq 0$ при любых значениях β . В частности, при $\beta \geq \beta_*$ якобиан D имеет вид

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(q, \gamma)} = \frac{h^2(\kappa - \lambda) \sin^2 \gamma_m}{q_h \kappa^2 \operatorname{sh}^2 v \gamma_m} \left(\frac{q}{q_h} \right)^{2(\kappa - \lambda) - 1} \exp[2a(\gamma - \gamma_m)] F(\gamma)$$

$$F(\gamma) = \lambda^2 (a \operatorname{sh} v \gamma + v \operatorname{ch} v \gamma)^2 + \kappa^2 \operatorname{sh}^2 v \gamma - \lambda v^2 \kappa$$

Так как $\kappa < 0$, то $F(\gamma)$ нигде не обращается в нуль. Следовательно, функции $q(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ однозначны и непрерывны. Таким образом, в отличие от задачи, рассмотренной в п. 3, исходная область физической плоскости не содержит предельных линий.

Рассмотренное гиперболическое решение фактически является аналитическим продолжением эллиптического решения по параметру β , управляющему типом системы. Найденная таким путем функция тока регулярна по переменным годографа. Как известно, решения корректно поставленных гиперболических задач не обязаны обладать свойствами повышенной гладкости. Вместе с тем для некорректных задач (к которым относятся рассмотренные выше при $\beta > \beta_*$) сужение класса допустимых решений может быть одним из способов регуляризации [10].

Вопрос о физической реализации найденного решения при $\beta > \beta_*$ тесно связан с проблемой устойчивости неоднородных распределений тока при сверхкритических значениях параметра Холла.

Поступила 29 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Oliver D. A., Mitchner M. Nonuniform electrical conduction in MHD channels. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 8.
2. Емец Ю. П. Метод годографа в электродинамике сплошных нелинейно проводящих сред. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
3. Глушков И. С., Карпухин В. Т., Недоспасов А. В. Распределение тока в $E \times H$ разряде с секционированными электродами при неравновесной проводимости плазмы. Теплофизика высоких температур, 1969, № 2.
4. Lengyel L. L. Current and potential distribution in nonequilibrium MHD plasmas at high magnetic field strengths. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 10.
5. Куликовский А. Г., Регирер С. А. Об устойчивости и эволюционности распределения электрического тока в среде с нелинейной проводимостью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
6. Дыжне А. М. Нелинейные явления в плазме при наличии ионизационной неустойчивости. Proc. of 5th Internat. Conf. Magnetohydrodynamic Electr. Power Generat., Munich., 1971, vol. 2.
7. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
8. Руткевич И. М. Об одной двумерной задаче электродинамики стационарных токов в нелинейно проводящей среде. ПМТФ, 1970, № 6.
9. Hurwitz H., Jr., Kilb R. B., Sutton G. N. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 2.
10. Ламтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., «Мир», 1970.