Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 534

О РОЖДЕНИИ СЕМЕЙСТВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЕ

М. И. Фейгин

(Горький)

Для неавтономной системы с одной степенью свободы получены условия рождения сложных субгармонических колебаний и показана возможность рождения целых семейств неустойчивых субгармонических режимов при нарушении условий существования периодического движения, связанного с изменением последовательности прохождения фазовой траекторией областей кусочной непрерывности.

Периодический режим движения кусочно-непрерывной системы характеризуется определенной последовательностью прохождения фазовой траекторией областей кусочной непрерывности. Всякое нарушение этой последовательности «сшивания» траекторий из отдельных кусков означает нарушение условий существования периодического режима заданного типа и соответствует некоторой C-бифуркации. При изменении параметров системы в простейшем случае здесь возможен либо переход режима одного типа в режим другого типа, либо слияние режимов двух разных типов с последующим их исчезновением. Более сложный случай удвоения периода колебаний при C-бифуркации был рассмотрен в работе [1].

Не представляет принципиальных трудностей изучение случая рождения субгармонического режима порядка $1 / n$, n оборотов фазовой траектории которого определенным образом сшиваются из двух типов траекторий режимов, участвующих в бифуркации. Однако громоздкость в записи условий существования такого режима делает решение задачи в общем виде мало пригодным к исследованию конкретной системы.

В данной работе новые случаи C-бифуркаций исследуются на примере вынужденных колебаний линейной диссипативной системы с одной степенью свободы. Бифуркации связаны с постановкой ограничителя перемещения. Получены условия рождения сложных субгармонических колебаний и показана возможность рождения целых семейств неустойчивых субгармонических режимов. С уменьшением периода внешнего возбуждения число этих режимов увеличивается, а структура разбиения пространства параметров на области их существования становится все более «тонкой».

Известно, что при изучении периодических движений кусочно-непрерывных систем часто возникают непреодолимые трудности, связанные с выделением области устойчивости режима заданного типа, а также с невозможностью предварительного задания типов движений, которые реализуются в заданных областях пространства параметров. Поэтому выявление случаев рождения неустойчивых режимов и исследование областей их существования приобретает особую практическую важность, если оно позволяет обнаружить опасные границы области устойчивых режимов [2]. В работе приводится расчет опасной границы в пространстве параметров, соответствующий исчезновению неустойчивого субгармонического режима путем его слияния с устойчивым режимом того же типа. Оказывается, что отношение «амплитуды» опасного режима к амплитуде вынужденных линейных колебаний системы при тех же значениях параметров сильно возрастает с увеличением порядка субгармонического режима. Таким образом, субгармонический режим может проявить себя тем сильнее, чем тоньше структура разбиения пространства параметров.

1. Рассмотрим C-бифуркации вынужденных колебаний линейной диссипативной системы с одной степенью свободы при встрече с неподвижным ограничителем перемещения. Уравнения движения системы, записанные в безразмерной форме, имеют вид

(1.1) $\quad x^{\cdot\cdot} + 2\lambda x^{\cdot} + x = P(\tau), \qquad x < d$

(1.2) $\quad x_+^{\cdot} = -Rx_-^{\cdot}, \qquad x = d$

Здесь $P(\tau)$ — периодическая с периодом T функция времени, коэффициент λ характеризует вязкое трение $(0 \leqslant \lambda < 1)$, а R — коэффициент восстановления скорости при соударении $(0 \leqslant R < 1)$.

Рассматриваемые движения будем обозначать $\Gamma(n, k)$, где k — число соударений (1.2) за период, равный nT $(n = 1,2, \ldots)$.

Пусть $p(\tau)$ — частное решение уравнения (1.1), соответствующее установившимся вынужденным колебаниям линейной системы. Тогда общее решение линейного уравнения (1.1) можно записать в форме уравнения точечного преобразования, соответствующего участку фазовой траектории между точкой $M_i(x_i, x_i^{\cdot}, \tau_i)$ и точкой $M_j(x_j, x_j^{\cdot}, \tau_j)$

(1.3)
$$x_j = p_j + e^{-\lambda\tau_{ij}}\left[(x_i - p_i)\left(\frac{\lambda}{\delta}\sin\delta\tau_{ij} + \cos\delta\tau_{ij}\right) + \frac{x_i^{\cdot} - p_i^{\cdot}}{\delta}\sin\delta\tau_{ij}\right]$$
$$x_j^{\cdot} = p_j^{\cdot} + e^{-\lambda\tau_{ij}}\left[(x_i^{\cdot} - p_i^{\cdot})\left(\cos\delta\tau_{ij} - \frac{\lambda}{\delta}\sin\delta\tau_{ij}\right) - \frac{x_i - p_i}{\delta}\sin\delta\tau_{ij}\right]$$
$$\tau_{ij} = \tau_j - \tau_i, \qquad \delta = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

Изучаемому бифуркационному случаю соответствует касание фазовой траекторией поверхности ограничителя. Уравнение этой особой траектории

(1.4) $\quad x(\tau) = p(\tau), \qquad x^{\cdot}(\tau) = p^{\cdot}(\tau), \qquad p(\tau)_{\max} = d_*$

Очевидно, что уравнение $\Gamma(n, 0)$ совпадает с уравнением $\Gamma(1,0)$ (1.4), а траектория $\Gamma(n, 0)$ может рассматриваться как предельный случай n-оборотной траектории $\Gamma(n, 1)$ при стремлении к нулю доударной скорости. При таком подходе для решения вопроса о характере бифуркаций периодических режимов $\Gamma(n, 0)$ и $\Gamma(n, 1)$ при их слиянии можно использовать полученные в работе [1] результаты.

Пусть $\chi_{n0}(z)$ и $\chi_{n1}(z)$ — характеристические полиномы, соответствующие $\Gamma(n, 0)$ и $\Gamma(n, 1)$ в предельном случае слияния их траекторий. Тогда при изменении параметра d одно движение переходит в другое, если выполняется условие

(1.5) $\quad \chi_{n0}(+1)\,\chi_{n1}(+1) > 0$

движения $\Gamma(n, 0)$ и $\Gamma(n, 1)$ после слияния исчезают, если выполняется условие

(1.6) $\quad \chi_{n0}(+1)\,\chi_{n1}(+1) < 0$

рождается движение удвоенного периода $\Gamma(2n, 1)$, если выполняется условие

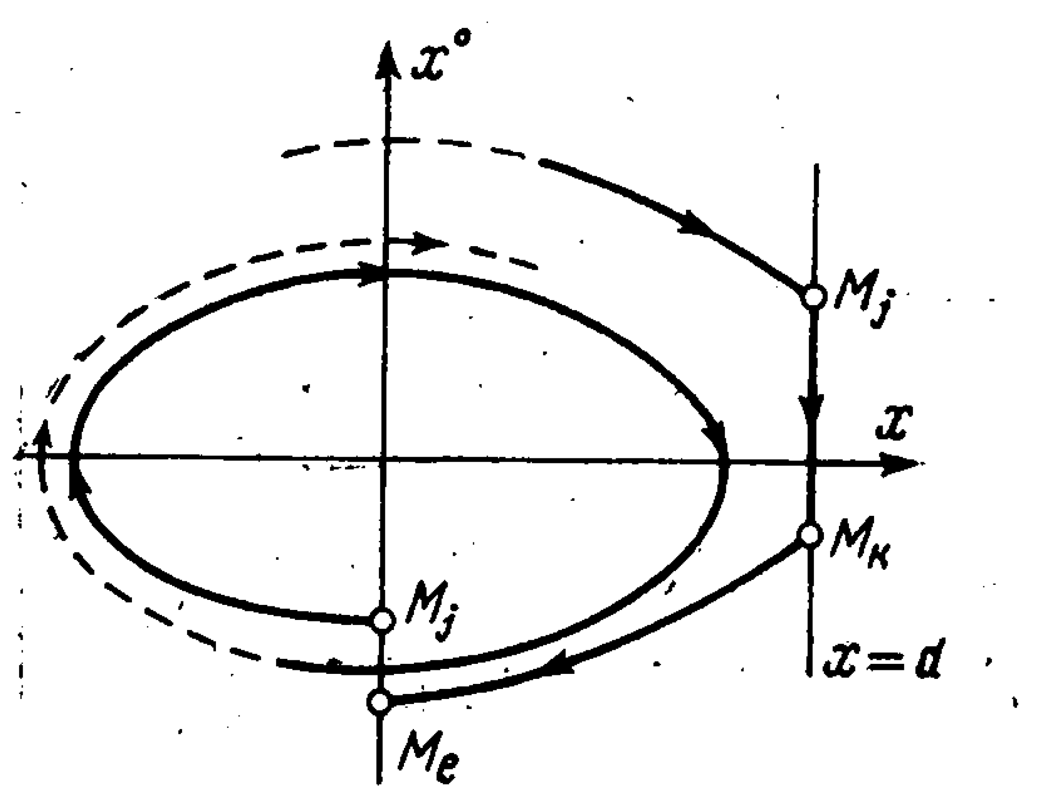
(1.7) $\quad \chi_{n0}(-1)\,\chi_{n1}(-1) < 0$

Для получения $\chi_{n0}(z)$ рассматриваем точечное преобразование $M_j(M_i)$ полуплоскости $x_i = 0$, $x_i^{\bullet} < 0$ в себя, порождаемое n оборотами фазовой траектории (1.3). При этом неподвижной точке преобразования соответствует $x_j^{\bullet} = x_i^{\bullet} = p^{\bullet}(\tau_i)$, $\tau_{ij} = nT$.

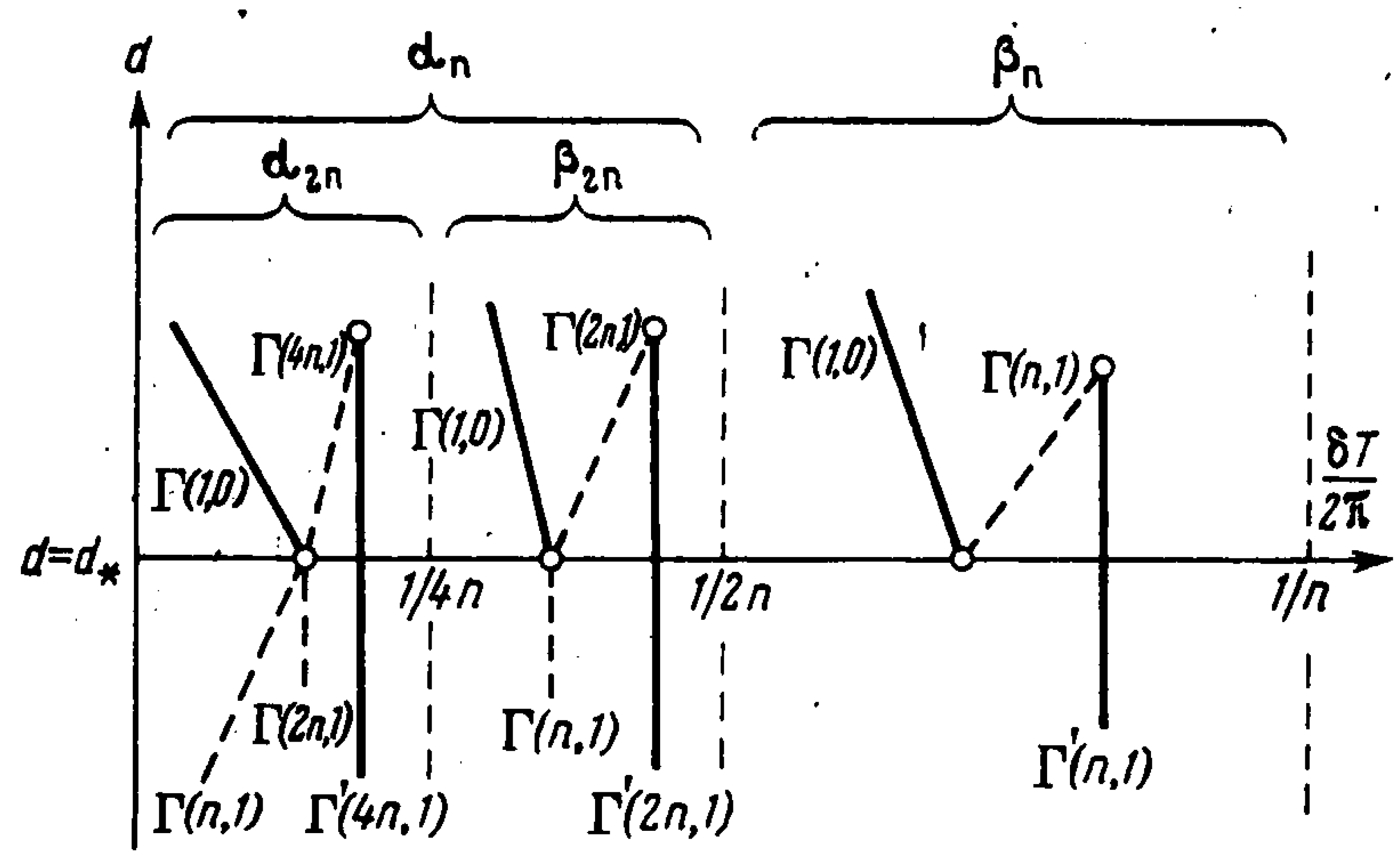
После обычной процедуры варьирования (1.3) по переменным $x_i^{\bullet}$, $x_j^{\bullet}$, τ_i, τ_j и подстановки $\delta x_j^{\bullet} = z\delta x_i^{\bullet}$, $\delta\tau_j = z\delta\tau_i$ приходим к выражению

(1.8) $$\chi_{n0}(z) = x_i^{\bullet}[z^2 - 2ze^{-\lambda nT}\cos(nT\delta) + e^{-2\lambda nT}], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Для получения $\chi_{n1}(z)$ рассматриваем порождаемое n оборотами фазовой траектории преобразование $M_l(M_i)$ полуплоскости $x_i = 0$, $x_i^{\bullet} < 0$ в себя, состоящее последовательно из преобразования $M_j(M_i)$ в плоскость $x_j = d$ в соответствии с уравнениями (1.3), преобразования $M_k(M_j)$



Фиг. 1



Фиг. 2

ударного взаимодействия (1.2) и еще преобразования $M_l(M_k)$ опять в соответствии с уравнениями (1.3) (фиг. 1). В предельном случае C-бифуркации характеристический полином принимает следующий вид:

(1.9) $$\chi_{n1}(z) = -zx_i^{\bullet}\delta^{-1}(1 + R)x_j^{\bullet\bullet}e^{-\lambda nT}\sin(nT\delta), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ускорение $x_j^{\bullet\bullet} < 0$, так как при $\tau = \tau_j$ функция $x(\tau)$ достигает максимума. Следовательно, в рассматриваемом случае условия (1.5) — (1.7) могут быть записаны в следующем виде:

а) условие перехода режима Г $(n, 0)$ в режим Г $(n, 1)$ и совпадающее с ним условие рождения субгармонического режима Г $(2n, 1)$

(1.10) $$\sin(nT\delta) > 0$$

б) условие исчезновения режимов Г $(n, 0)$ и Г $(n, 1)$ в результате их слияния

(1.11) $$\sin(nT\delta) < 0$$

При этом из характеристического полинома (1.9) вытекает неустойчивость всех рождающихся или исчезающих режимов типа Г $(n, 1)$.

Ограничимся далее для простоты рассмотрением двух последовательностей интервалов изменения периода внешней силы; последовательности α_n, определяемой неравенством $0 < T / 2\pi < 1 / 2n\delta$, и последовательности β_n, определяемой $1 / 2n\delta < T / 2\pi < 1 / n\delta$.

На интервалах β_n, согласно (1.11), устойчивый режим Г $(n, 0)$ сливается с неустойчивым Г $(n, 1)$ и при дальнейшем уменьшении параметра d оба режима исчезают. На интервалах α_n, согласно (1.10), переход устойчивого режима $\Gamma(n, 0)$ в неустойчивый $\Gamma(n, 1)$ сопровождается либо слиянием с неустойчивым режимом $\Gamma(2n, 1)$, либо рождением неустойчивого режима $\Gamma(2n, 1)$. Рождение с $\Gamma(2n, 1)$ будет иметь место, если $T/2\pi$ попадает в первую половину интервала α_n, так как это равносильно $T/2\pi \in \alpha_{2n}$. Слияние $\Gamma(2n, 1)$ будет иметь место, если $T/2\pi$ попадает во вторую половину интервала α_n, так как это равносильно $T/2\pi \in \beta_{2n}$ (фиг. 2).

С уменьшением периода внешнего возбуждения значение $T/2\pi$ будет принадлежать все большему числу интервалов α_n, β_n, и следовательно, будет иметь место рождение все более сложного семейства субгармонических режимов при C-бифуркации вынужденных колебаний линейной системы $\Gamma(1, 0) \equiv \Gamma(n, 0)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

Так, например, в интервале $T\delta/2\pi \in (1/4, 1/3)$ происходит слияние $\Gamma(1, 0)$ с субгармоническими режимами $\Gamma(2, 1)$ и $\Gamma(3, 1)$ и рождение режима $\Gamma(1,1)$; в интервале $T\delta/2\pi \in (1/5, 1/4)$ при уменьшении параметра d режим $\Gamma(1, 0)$ сливается с режимами $\Gamma(3, 1)$, $\Gamma(4, 1)$ и при этом еще рождаются режимы $\Gamma(1,1)$ и $\Gamma(2, 1)$ и т. д.

Таким образом, из факта существования при $d > d_*$ в интервалах $\beta_1, \beta_3, \beta_5, \ldots$ неустойчивых периодических режимов типа $\Gamma(n, 1)$ следует существование в окрестности $d = d_*$ целой последовательности неустойчивых режимов $\Gamma(2n, 1)$, $\Gamma(4n, 1)$, $\Gamma(8n, 1), \ldots$ в соответствующих интервалах изменения периода внешней силы. При этом с уменьшением T режим удвоенного периода $\Gamma(2n, 1)$ появляется в области $d > d_*$ одновременно с переориентацией относительно оси $d = d_*$ области существования режима $\Gamma(n, 1)$ (фиг. 2).

Существование режима $\Gamma(1, 1)$ при $d > d_*$ было показано ранее [1].

Перейдем к рассмотрению вопроса о существовании в окрестности $d = d_*$ более сложных режимов типа $\Gamma(n, k)$.

2. Периодический режим $\Gamma(n, k)$, в течение которого происходит k ударных взаимодействий с ограничителем, предполагаем близким к периодическому режиму вынужденных колебаний линейной системы в том смысле, что при $d \to d_*$ эти режимы сливаются. Сведем задачу к исследованию точечных преобразований полуплоскости $x = d$, $\dot{x} < 0$ в себя. Именно в этой плоскости расположены фазовые траектории ударных взаимодействий. Рассматриваемым периодическим режимам соответствует определенная последовательность точек преобразования

$$\ldots, M_0(\dot{x}_0, \tau_0),\ M_1(\dot{x}_1, \tau_1),\ \ldots,\ M_k(\dot{x}_k, \tau_k), \ldots$$

Упростим несколько задачу, полагая внешнюю силу гармонической $P(\tau) = \cos\omega\tau$, а коэффициент вязкого трения $\lambda = 0$, т. е. оставляя систему диссипативной лишь за счет не вполне упругих соударений. Тогда уравнения точечных преобразований получим из уравнений (1.3) при $\lambda = 0$, $\delta = 1$, $p(\tau) = (1 - \omega^2)^{-1}\cos\omega\tau$ и уравнения (1.2)

$$\begin{aligned}
(2.1)\qquad & x_{i+1} = d = a\cos\omega\tau_{i+1} + (\dot{x}_i + a\omega\sin\omega\tau_i)\sin(\tau_{i+1} - \tau_i) + \\
& + (d - a\cos\omega\tau_i)\cos(\tau_{i+1} - \tau_i) \\
& -\frac{\dot{x}_{i+1}}{R} = -a\omega\sin\omega\tau_{i+1} + (\dot{x}_i + a\omega\sin\omega\tau_i)\cos(\tau_{i+1} - \tau_i) - \\
& - (d - a\cos\omega\tau_i)\sin(\tau_{i+1} - \tau_i) \\
& a = (1 - \omega^2)^{-1}
\end{aligned}$$

Рассматриваемый периодический режим характеризуется следующей последовательностью неподвижных точек:

$$(x_0^{\cdot}, \tau_0), \quad (x_1^{\cdot}, \tau_1), \ldots, \quad (x_k^{\cdot} = x_0^{\cdot}, \tau_k = \tau_0 + 2\pi n / \omega) \tag{2.2}$$

В предельном случае C-бифуркации этот режим вырождается в режим вынужденных колебаний линейной системы, и следовательно

$$x_i^{\cdot *} = 0, \quad \sin \omega\tau_0^* = 0, \quad a \cos \omega\tau_0^* = d_* \tag{2.3}$$

$$\tau_{i+1}^* - \tau_i^* = m_i T, \quad \sum_0^{k-1} m_i = n, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1$$

Введем вместо переменных τ_i новые переменные $\varepsilon_i = \tau_i - \tau_i^*$, а положение ограничителя будем характеризовать малой величиной $\mu = d - d_*$. В окрестности вырожденной траектории значения координат точек преобразования $| x_i^{\cdot} | \ll 1$, $| \varepsilon_i | \ll 1$, что позволяет представить уравнения точечных преобразований (2.1) в линеаризованном виде

$$\begin{gathered}(x_i^{\cdot} + d_*\omega^2\varepsilon_i) \sin m_i T = \mu (1 - \cos m_i T), \; i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ (x_i^{\cdot} + d_*\omega^2\varepsilon_i) \cos m_i T - d_*\omega^2\varepsilon_{i+1} + x_{i+1}^{\cdot}/R = \mu \sin m_i T\end{gathered} \tag{2.4}$$

Вместе с условиями периодичности

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0, \quad x_k^{\cdot} = x_0^{\cdot} \tag{2.5}$$

система (2.4) приводит к следующим значениям координат неподвижных точек сложного режима:

$$\begin{gathered}x_i^{\cdot} = \frac{\mu R}{1+R}\left(\operatorname{tg}\frac{m_i T}{2} + \operatorname{tg}\frac{m_{i-1}T}{2}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1 \\ d_*\omega^2(1+R)\,\varepsilon_i = \mu\left(\operatorname{tg}\frac{m_i T}{2} - R\operatorname{tg}\frac{m_{i-1}T}{2}\right)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Получим далее условия существования режима заданного типа, т. е. условия отсутствия дополнительных ударов в промежутках времени между заданными ударными взаимодействиями. На участке $\tau_i < \tau < \tau_{i+1}$ в окрестности границы вырождения функция

$$\begin{gathered}x(\tau) = a \cos \omega\tau + (d - a \cos \omega\tau_i) \cos (\tau - \tau_i) + \\ + (x_i^{\cdot} + a\omega \sin \omega\tau_i) \sin (\tau - \tau_i)\end{gathered}$$

имеет $m_i - 1$ максимумов, достигаемых в моменты времени τ_{ij} ($j = 1, 2, \ldots, m_i - 1$). Уравнение для определения τ_{ij}

$$x^{\cdot}(\tau_{ij}) = 0$$

также может быть представлено в линеаризованном виде, если перейти к переменным

$$\gamma_{ij} = \tau_{ij} - \tau_i^* - \varepsilon_i - jT, \quad j = 1, 2, \ldots, m_i - 1$$

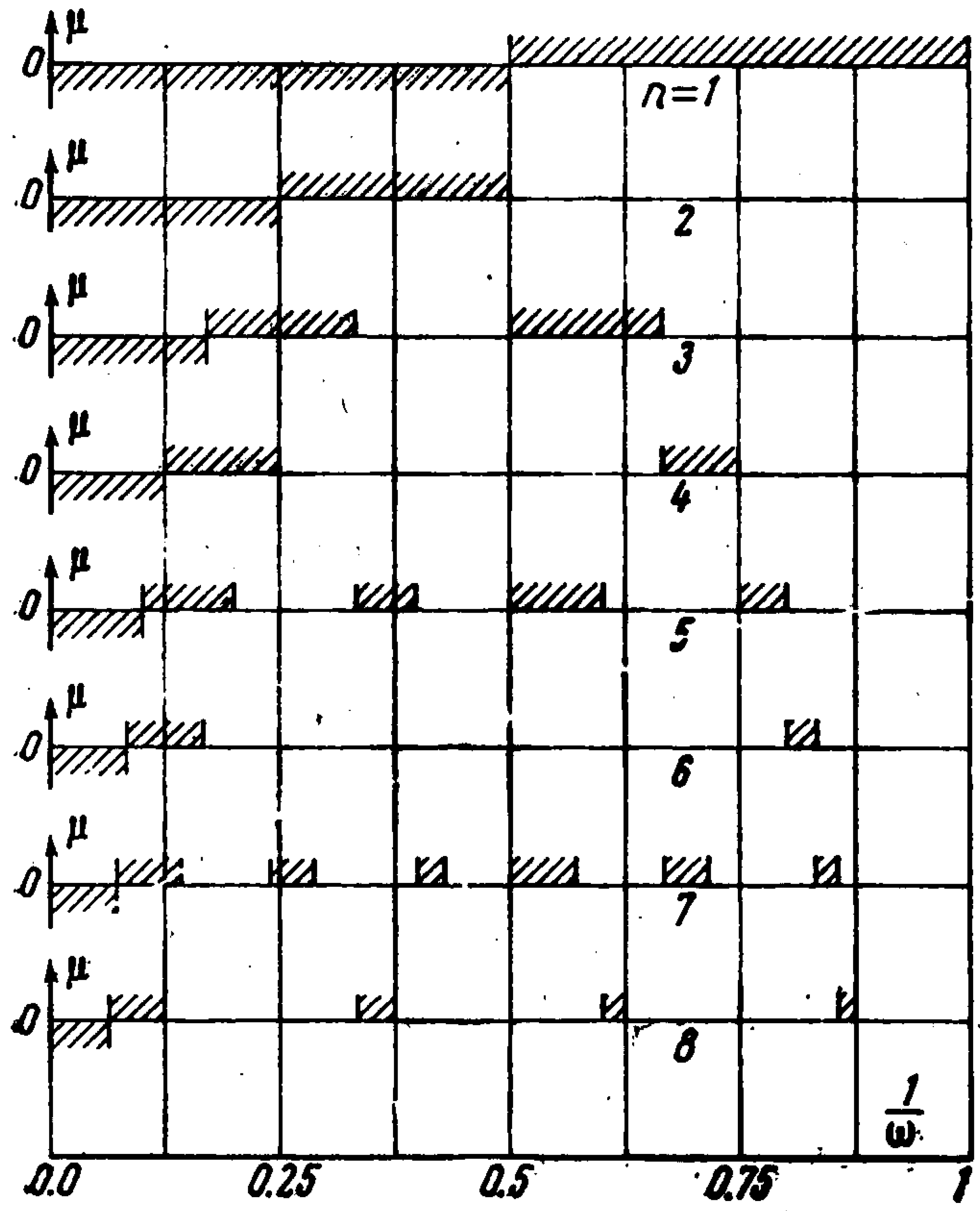
После соответствующих преобразований получаем в линейном приближении следующие значения функции $x(\tau)$ в точках максимума:

$$x(\tau_{ij}) = d_* + \mu \cos (jT) + \mu \sin (jT) \operatorname{tg}\frac{m_i T}{2} \tag{2.7}$$

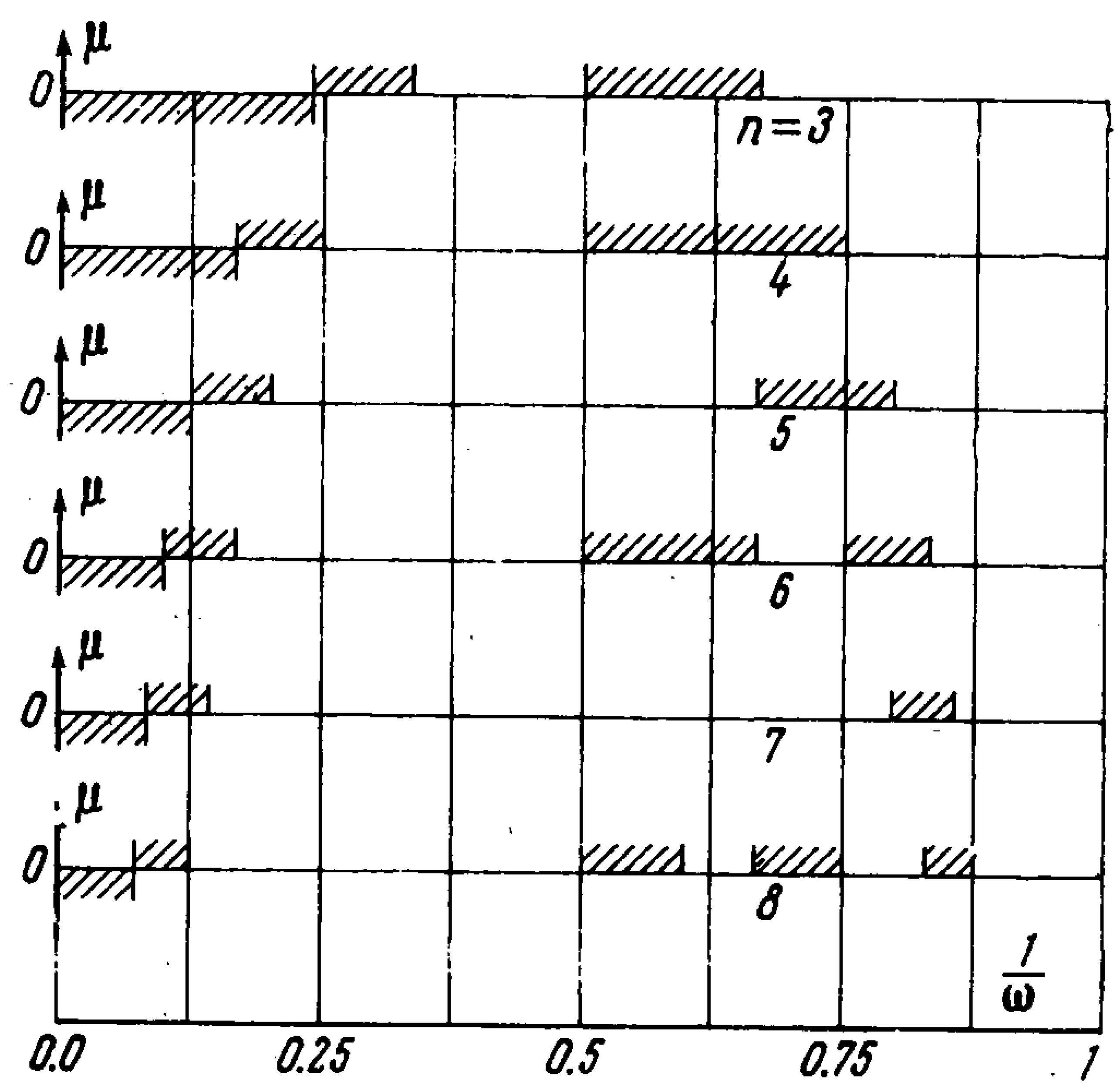
Для существования режимов заданного типа найденные значения (2.7) не должны достигать величины d. Следовательно, искомые условия существования можно записать в виде

$$\mu\left[1-\cos(jT)-\sin(jT)\operatorname{tg}\frac{m_iT}{2}\right]>0,\qquad j=1,\ldots,m_i-1 \tag{2.8}$$

Дополнив эти условия требованием $x_i^{\bullet}<0$, вытекающим из способа построения точечных отображений (2.1), получаем из (2.6) и (2.8) после простейших тригонометрических преобразований систему неравенств, ко-



Фиг. 3



Фиг. 4

торая и представляет собой необходимые условия существования в окрестности C-бифуркационного вырождения рассматриваемых периодических режимов

$$\mu\sin\frac{\pi(m_i+m_{i-1})}{\omega}\cos\frac{\pi m_{i-1}}{\omega}\cos\frac{\pi m_i}{\omega}<0 \tag{2.9}$$

$$\mu\sin\frac{\pi(m_i-j)}{\omega}\cos\frac{\pi m_i}{\omega}\sin\frac{\pi j}{\omega}<0$$

$$i=0,1,\ldots,k-1,\qquad j=1,2,\ldots,m_i-1$$

Естественно при этом, что периодическая последовательность значений $x_i^{\bullet}$, τ_i, m_i не должна распадаться на более простые периодические последовательности.

Пример 1. Условие существования n-кратного одноударного периодического режима Г (n, 1) получим из (2.9), полагая $m_0=n$, $k=1$

$$\mu\sin\frac{2\pi n}{\omega}<0,\quad \mu\sin\frac{\pi(n-j)}{\omega}\sin\frac{\pi j}{\omega}\cos\frac{\pi n}{\omega}<0,\quad j=1,\ldots,n-1 \tag{2.10}$$

Результаты анализа неравенств (2.10) в интервале частот $0<1/\omega<1$ для $n=1, 2, \ldots, 8$ приведены на фиг. 3. Штриховкой выделены области существования режимов соответствующей кратности. Во всех случаях только область, соответствующая самым высоким частотам, расположена ниже оси $\mu = 0$. Все остальные области соответствуют $\mu > 0$, т. е. $d > d_*$. Следовательно, в этих случаях неустойчивые субгармонические колебания порядка n с соударениями существуют наряду с устойчивыми линейными колебаниями.

Если сравнить выделенные области существования для четных значений n с областями, выделяемыми условиями удвоения периода (1.10), то приходим к выводу, что только в двух левых областях рождение четных субгармоник обязано удвоению периода при C-бифуркации. Остальные области соответствуют, очевидно, более сложному случаю бифуркации.

Пример 2. Рассмотрим еще n-кратный двухударный режим. Так как подобных режимов может быть уже несколько типов, ограничимся случаем, когда интервал времени между ударами приближенно равен периоду внешней силы. В рассматриваемом случае $m_0 = 1$, $m_1 = n - 1$, $k = 2$, и условия существования (2.9) принимают вид

$$\mu \sin \frac{\pi n}{\omega} \cos \frac{\pi}{\omega} \cos \frac{\pi (n-1)}{\omega} < 0 \tag{2.11}$$

$$\mu \sin \frac{\pi (n-1-j)}{\omega} \cos \frac{\pi (n-1)}{\omega} \sin \frac{\pi j}{\omega} < 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-2$$

Выделенные в результате анализа условий (2.11) области существования представлены на фиг. 4. Как и в предыдущем случае, все области, кроме соответствующих наибольшей частоте, расположены при $\mu > 0$, и следовательно, соответствующие неустойчивые режимы существуют наряду с режимом вынужденных линейных колебаний.

3. После проведенного рассмотрения, обнаружившего рождение целых семейств неустойчивых режимов типа $\Gamma(n, k)$ из простейшего режима линейных колебаний при достижении ограничителя перемещения, возникает последующая задача — выяснить, по каким причинам и при каких значениях параметров эти режимы будут исчезать. Достаточно полное решение такой задачи не представляется возможным. Однако наибольшее практическое значение имеет отыскание так называемых опасных границ областей устойчивости [2]. Применительно к исследуемой системе это будут случаи исчезновения неустойчивых режимов путем слияния их с устойчивыми в области параметров $d > d_*$. Следует отметить, что вопрос существования в колебательной системе с ограничителями наряду с вынужденными линейными колебаниями устойчивых нелинейных режимов представляет самостоятельный интерес и неоднократно рассматривался (см., например, [3-8]).

Можно показать, что «наиболее опасный» устойчивый нелинейный режим $\Gamma'(n, 1)$ обязательно существует в окрестности бифуркационного узла $\omega = 2n$, $d = d_*$, и исчезновение его происходит путем слияния с неустойчивым режимом того же типа $\Gamma(n, 1)$ при увеличении параметра d (фиг. 2). Соответствующее значение d_0 следует рассматривать как минимально допустимое положение ограничителя. Если $d < d_0$, то возможен переход динамической системы под воздействием каких-либо случайных факторов из режима $\Gamma(1, 0)$ с амплитудой колебаний d_* на устойчивый субгармонический режим $\Gamma'(n, 1)$, «амплитуда» колебаний которого может значительно превышать d_*.

Найдем выражение для d_0 в случае гармонического возмущения $P(\tau) = \cos\omega\tau$ и с учетом коэффициента вязкого трения λ. Рассмотрим для этой цели преобразование плоскости $x_0 = d$ в себя, порождаемое участком фазовой траектории (1.3) и одним ударным взаимодействием (1.2). Полагая $x_1 = x_0 = d$, $x_1^{\bullet} = x_0^{\bullet}$, $\tau_1 = \tau_0 + 2\pi n / \omega$, приходим к следующим уравнениям относительно координат неподвижной точки преобразования:

$$(3.1)\qquad d = \frac{a(\cos\omega\tau_0 + 2\omega a\lambda\sin\omega\tau_0)}{1+(2a\omega\lambda)^2} + \frac{x_0^{\bullet}\rho\sin\theta\delta}{\delta(\operatorname{ch}\theta\lambda - \cos\theta\delta)}$$

$$\frac{x_0^{\bullet}}{R} = \frac{a\omega(\sin\omega\tau_0 - 2\omega a\lambda\cos\omega\tau_0)}{1+(2a\omega\lambda)^2} + \frac{x_0^{\bullet}\rho(\lambda\sin\theta\delta - \delta\cos\theta\delta + \delta e^{-\theta\lambda})}{\delta(\operatorname{ch}\theta\lambda - \cos\theta\delta)}$$

$$\rho = \frac{1+R}{2R}, \quad \theta = \frac{2\pi n}{\omega}$$

Исключая из (3.1) координату τ_0, получим уравнение относительно $x_0^{\bullet}$

$$(3.2)\qquad \left(d - \frac{x_0^{\bullet}\rho\sin\theta\delta}{\delta(\operatorname{ch}\theta\lambda - \cos\theta\delta)}\right)^2 + \left(\frac{x_0^{\bullet}}{\omega}\right)^2\left(\rho\,\frac{e^{-\theta\lambda} - \cos\theta\delta - \frac{\lambda}{\delta}\sin\theta\delta}{\operatorname{ch}\theta\lambda - \cos\theta\delta} - 1\right)^2 = d^2_*$$

Границе слияния устойчивого и неустойчивого режимов соответствует кратный корень уравнения (3.2). Таким образом, приравняв нулю дискриминант уравнения (3.2), получим искомую граничную поверхность в пространстве параметров

$$(3.3)\qquad \left(\frac{d_0}{d_*}\right)^2 = 1 + \frac{\omega^2}{\delta^2}\left(\frac{\sin\theta\delta}{e^{\theta\lambda} - \cos\theta\delta - (\lambda/\delta)\sin\theta\delta - \rho^{-1}(\operatorname{ch}\theta\lambda - \cos\theta\delta)}\right)^2,$$

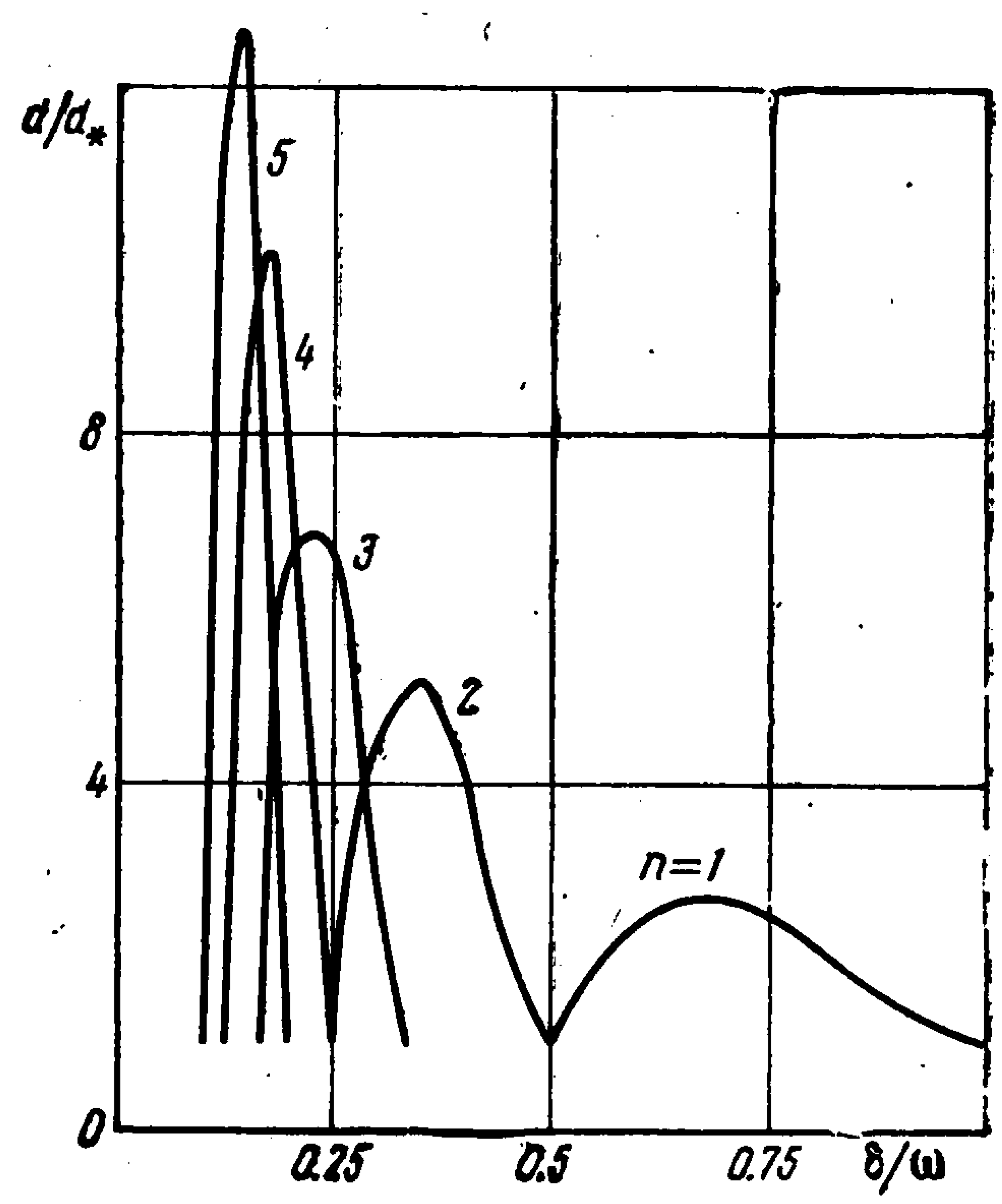
При этом, в соответствии с выбором точечного преобразования, необходимо еще выполнение неравенства $x_0^{\bullet} < 0$, которое в рассматриваемом случае сводится к условию $\sin\theta\delta < 0$.

Для предельного значения коэффициента восстановления $R = 1$ минимально допустимый зазор определяется выражением

$$(3.4)\qquad \left(\frac{d_0}{d_*}\right)^2 = 1 + \frac{(2\pi n\sin\theta\delta)^2}{\theta^2(\delta\operatorname{sh}\theta\lambda - \lambda\sin\theta\delta)^2}, \quad \sin\theta\delta < 0$$

Приведенный расчет d_0 в известном смысле поучителен. Дело в том, что разбиение плоскости параметров на области субгармонических режимов характеризуется структурой, все более тонкой с увеличением порядка режима n.

В то же время, как следует из (3.4), отношение амплитуды опасного субгармонического режима к амплитуде вынужденных линейных колебаний системы, соответствующих тем же значениям параметров, сильно возрастает с увеличением порядка субгармонического режима. Абсолютное значение амплитуды быстро уменьшается с ростом n, если уровень возбуждения не зависит от частоты, и увеличивается с ростом n, если этот уровень пропорционален квадрату частоты возбуждения (случай кинема-



Фиг. 5

тического возбуждения). Следовательно, режим может проявить себя тем сильнее, чем тоньше структура разбиения пространства параметров. На фиг. 5 приведены зависимости $d_0(\omega)$ для $\lambda = 0{,}1$, вычисленные согласно уравнению (3.4).

Следует отметить, что рассмотренная выше бифуркационная картина является в определенном смысле простейшей: области существования неустойчивых режимов $\Gamma(n, 1)$ простираются от границы рождения $d = d_*$ вплоть до границы исчезновения путем слияния с устойчивыми режимами того же типа.

В общем случае режим, характеризуемый в момент рождения как $\Gamma(n, k)$, может претерпевать с ростом d качественные изменения. Так, более полное исследование неустойчивых периодических движений $\Gamma(n, 2)$, рассмотренных в примере 2, показало отсутствие границы слияния их с устойчивыми режимами именно этого же типа.

Поступила 25 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейгин М. И.* Удвоение периода колебаний при C-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
2. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.— М., Гостехиздат, 1949.
3. *Иориш Ю. И.* Субгармонический резонанс в системе с упругим ограничителем хода. Ж. техн. физ., 1946, т. 16, вып. 6.
4. *Беспалова Л. В.* К теории виброударного механизма. Изв. АН СССР. ОТН, 1957, № 5.
5. *Бабицкий В. И.* К вопросу о существовании высокочастотных колебаний большой амплитуды в линейных системах с ограничителями. Машиноведение, 1966, № 1.
6. *Коловский М. З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М., «Наука», 1966.
7. *Асташев В. К.* К динамике осциллятора, ударяющегося об ограничитель. Машиноведение, 1971, № 2.
8. *Бидерман В. Л.* Прикладная теория механических колебаний. М., «Высшая школа», 1972.