Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31 : 534

О СИНХРОНИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк

(Горький)

На основе математической модели явления синхронизации в виде асимптотически устойчивого интегрального тора в фазовом пространстве вводятся понятия степени и порядка синхронизма. Исследуются условия существования синхронизмов в динамической системе, описываемой дифференциальными уравнениями с быстро вращающимися фазами. В качестве приложения рассматриваются синхронизмы в системе квазигамильтоновых объектов.

В последнее время явления синхронизации и резонанса в динамических системах подвергались интенсивному изучению, в частности, в связи с вопросами синхронизации спутников [1,2] и механических вибраторов [3]. С математической стороны явления синхронизации тесно связаны с теорией дифференциальных уравнений с быстро вращающимися фазами. Здесь в первую очередь необходимо указать на работы Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, В. М. Волосова и Б. И. Моргунова, Дж. Хейла и др. [4-9].

1. Определение синхронизма динамической системы. Необходимые условия синхронизма. Определим и исследуем условия возникновения синхронизмов разных степеней и порядков в динамической системе, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\beta^{\bullet} = \omega(x) + \varepsilon B(\beta, x, \varepsilon), \qquad x^{\bullet} = \varepsilon X(\beta, x) + \varepsilon^2 Y(\beta, x, \varepsilon) \tag{1.1}$$

Здесь β и x — соответственно r- и s-мерные векторы, ε — малый положительный параметр. Все входящие в уравнения функции предполагаются дифференцируемыми по ε, дважды непрерывно дифференцируемыми по компонентам $x_1, x_2, \ldots, x_s$ вектора x, достаточно гладкими и периодическими периода 2π по компонентам $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ вектора β.

Будем говорить, что система (1.1) допускает синхронизм степени m, если при всех достаточно малых положительных ε у нее существует асимптотически устойчивая гладкая интегральная тороидальная поверхность размерности $r - m$ вида

$$\begin{aligned} x &= x^\circ + \varepsilon h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-m}, \varepsilon), \\ \psi &= \psi^\circ + \varepsilon g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-m}, \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь x° и ψ° — постоянные векторы, h и g — периодические периода 2π гладкие функции параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-m}$, а m-мерный вектор ψ связан с вектором β с помощью целочисленной $m \times r$-матрицы P ранга m, так что

$$\psi = P\beta \tag{1.3}$$

При этом, не теряя общности, можно предположить, что в качестве параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-m}$ взяты компоненты $\beta_{m+1}, \ldots, \beta_r$ вектора β

и что

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12}, & \ldots, & p_{1m} \\ p_{m1}, & p_{m2}, & \ldots, & p_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.1), находим, что

(1.4) $$P\omega(x^\circ) = 0$$

Это соотношение представляет собою одно из необходимых условий синхронизма. После замены переменных, предложенной в работе [8]

(1.5) $$\psi = \frac{1}{\Delta}P\beta, \quad \varphi_k = \frac{1}{\Delta}\beta_{m+k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad n = r - m$$

уравнения (1.1) запишем в виде

(1.6) $$\varphi^\cdot = a(x) + \varepsilon\Phi(\varphi, \psi, x, \varepsilon), \quad \psi^\cdot = b(x) + \varepsilon\Psi(\varphi, \psi, x, \varepsilon)$$
$$x^\cdot = \varepsilon X(\varphi, \psi, x) + \varepsilon^2 Y(\varphi, \psi, x, \varepsilon)$$

Здесь φ — вектор с компонентами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-m}$, а вектор-функции $a(x)$, $b(x)$ выражаются через $\omega(x)$, так что

$$b(x) = \frac{1}{\Delta}P\omega(x), \qquad a_j(x) = \frac{1}{\Delta}\omega_{m+j}(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Все функции, входящие в (1.6), естественно, остаются достаточно гладкими и периодическими периода 2π по компонентам векторов φ и ψ. Вектор $b(x)$ при $x = x^\circ$ обращается в нуль, а компоненты вектора $a(x^\circ)$ рационально линейно независимые.

Интегральная поверхность (1.2) в новых переменных может быть записана в виде

$$x = x^\circ + \varepsilon h(\varphi, \varepsilon), \qquad \psi = \psi^\circ + \varepsilon g(\varphi, \varepsilon)$$

Поэтому для $i = 1, 2, \ldots, s$ должны выполняться условия

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, 0)}{\partial\varphi_j}\omega_j(x^\circ) = X_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1^\circ, \ldots, \psi_m^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_s^\circ)$$

из которых следует обращение в нуль среднего по всем переменным $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ от векторной функции $X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)$, т. е.

(1.7) $$\langle X(\varphi, \varphi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi = 0$$

Условия (1.7), как и условия (1.4), являются необходимыми условиями синхронизма.

2. Анализ необходимых условий синхронизма. Пусть

(2.1) $$X(\beta, x) = X(\varphi, \psi, x) = \Sigma X_{k_1, k_2, \ldots, k_r} \exp\Big[j\sum_{i=1}^{r} k_i\beta_i\Big] =$$
$$= \Sigma X_{k_1, k_2, \ldots, k_r} \exp\Big[j\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i + j\sum_{i=1}^{m} r_i\psi_i\Big]$$

Учитывая конкретный вид связей между β и φ, ψ, находим, что

(2.2) $$k_\alpha = \begin{cases} \varkappa_\alpha, & \alpha = 1, 2, \ldots, m, \\ \varkappa_\alpha + q_{\alpha-m}, & \alpha = m+1, m+2, \ldots, r, \end{cases} \qquad \varkappa_\alpha = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{m} p_{i\alpha}r_i$$

При усреднении (2.1) по всем компонентам вектора φ в разложении (2.1) могут остаться только те члены, у которых $q_1 = \ldots = q_n = 0$ или, что то же самое, только те члены, у которых целочисленный вектор k является линейной комбинацией векторов строк матрицы P ($k \in L(P_1, P_2, \ldots, P_m)$). Отсюда, в частности, следует выполнение неравенств

$$|X_{\alpha,0,\ldots,0}(x^\circ)| < \max_{\psi} \sum_{0 \neq k \in L(P_1, P_2, \ldots, P_m)} |X_{\alpha, k_1, k_2, \ldots, k_r}(\psi, x^\circ)| \tag{2.3}$$

Под порядком синхронизма будем понимать число p^*, определяемое по формуле

$$p^* = \min_{0 \neq k \in L(P_1, P_2, \ldots, P_m)} \max_{1 \leqslant i \leqslant r} |k_i| \tag{2.4}$$

Если

$$\sum_{\alpha=1}^{s} X^2_{\alpha,0,\ldots,0}(x^\circ) \neq 0$$

и тригонометрические ряды (2.1) абсолютно сходятся, выполнение оценок (2.3) возможно при не очень больших значениях порядка кратности синхронизма. В том случае, когда функция $X_\alpha(x^\circ, \beta)$ некоторое число τ раз дифференцируема по переменным $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, коэффициенты ее ряда Фурье удовлетворяют известным оценкам

$$|X_{\alpha, k_1, k_2, \ldots, k_r}(x^\circ)| < \max_{\beta} |D_\beta^\tau X_\alpha(x^\circ, \beta)| \cdot (\max_{1 \leqslant i \leqslant r} |k_i|)^{-\tau} \tag{2.5}$$

Вследствие этого неравенства (2.3) принимают вид

$$|X_{\alpha,0,\ldots,0}(x^\circ)| < \max_{\beta} |D_\beta^\tau X_\alpha(x^\circ, \beta)| \sum_{0 \neq k \in L(P_1, \ldots, P_m)} (\max_{1 \leqslant i \leqslant r} |k_i|)^{-\tau} \tag{2.6}$$

Обобщим все сказанное о необходимых условиях синхронизма в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Для существования в динамической системе, описываемой дифференциальными уравнениями (1.1), синхронизма m-й степени необходимо, чтобы при некоторых постоянных векторах x° и ψ° 1) выполнялось m линейно независимых целочисленных соотношений (1.4); 2) равнялось нулю среднее значение по совокупности переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ от функции $X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)$ (соотношения (1.7)), что в свою очередь требует выполнения условий (2.3), возможных, вообще говоря, только при не очень больших порядках синхронизма.

3. Достаточные условия существования синхронизма. Пусть необходимые условия синхронизма (1.4) и (1.7) выполнены. Их можно рассматривать как $m + s$ уравнений относительно $m + s$ компонент постоянных векторов x° и ψ°. Для получения достаточных условий существования синхронизма преобразуем уравнения (1.6) к уравнениям с постоянными частотами вида

$$\begin{aligned} \varphi^{\cdot} &= \omega + \varepsilon\Phi(\varphi, v, \varepsilon) \\ v^{\cdot} &= \varepsilon F(\varphi) + A(\varepsilon)v + \varepsilon L(\varphi)v + \varepsilon V(\varphi, v, \varepsilon) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь все функции непрерывны по ε, дважды непрерывно дифференцируемы по компонентам векторов φ и v, компоненты постоянного вектора ω рационально несоизмеримы, векторная функция $V(\varphi, 0, 0)$ и средние значения по совокупности компонент вектора φ от векторной функции $F(\varphi)$ и матрицы $L(\varphi)$ равны нулю, при некотором $a > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\tau > 0$ имеют место оценки

$$\| \exp (A(\varepsilon)\tau) \| < 1 - a\varepsilon\tau, \quad \| A(\varepsilon) \| < \sqrt{\varepsilon} M \tag{3.2}$$

Как показано в работе [10], система уравнений (3.1) при перечисленных условиях допускает в некоторой области $\| v \| \leqslant \delta_0$ единственное устойчивое гладкое интегральное тороидальное многообразие

$$v = f(\varphi, \varepsilon) \tag{3.3}$$

где векторная функция $f(\varphi, \varepsilon)$ непрерывна по ε и обращается в нуль при $\varepsilon = 0$.

Осуществим в системе (1.6) замену переменных

$$\begin{aligned} x &= x^\circ + \varepsilon x^* + \varepsilon A(\varphi) + \varepsilon z + \varepsilon\sqrt{\varepsilon} C(\varphi) y \\ \psi &= \psi^\circ + \sqrt{\varepsilon} y + \varepsilon\psi^* + \varepsilon B(\varphi) \end{aligned} \tag{3.4}$$

где z и y — новые переменные, векторные функции $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$, матрица $C(\varphi)$, постоянные векторы x^* и ψ^* подлежат определению.

Система (1.6) в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned}
\varphi^{\cdot} &= \omega + \varepsilon\left\{\frac{\partial a(x^\circ)}{\partial x}[x^* + A(\varphi) + z] + \langle \Phi(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \Phi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\right\} + \ldots \\
z^{\cdot} &= -\frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi}\left\{\omega + \varepsilon\left[\frac{\partial a(x^\circ)}{\partial x}(x^* + A(\varphi) + z) + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \langle \Phi(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi + \Phi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\right]\right\} - \\
&\quad - \sqrt{\varepsilon}\frac{d}{dt}\{C(\varphi) y\} + \langle X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi + X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ) + \\
&\quad + \varepsilon\langle Y(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi + \varepsilon Y^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ) + \\
&\quad + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}[\langle X\rangle_\varphi + X^*][x^* + A(\varphi) + z] + \frac{\partial}{\partial \psi}[\langle X\rangle_\varphi + X^*] \times \\
&\quad \times [\sqrt{\varepsilon} y + \varepsilon\psi^* + \varepsilon B(\varphi)] + \ldots \\
y^{\cdot} &= -\sqrt{\varepsilon}\frac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi}\omega + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial b(x^\circ)}{\partial x}[x^* + A(\varphi) + z] + \\
&\quad + \sqrt{\varepsilon}\langle \Psi(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi + \sqrt{\varepsilon}\Psi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ) + \\
&\quad + \varepsilon\frac{\partial b(x^\circ)}{\partial x} C(\varphi) y + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \psi}[\langle \Psi\rangle_\varphi + \Psi^*] y + \ldots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Упростим систему (3.5), выбирая векторные функции $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$, а также матрицу $C(\varphi)$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi}\omega = X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ), \qquad \frac{\partial C(\varphi)}{\partial \varphi}\omega = \frac{\partial X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)}{\partial \psi} \\
&\frac{\partial B(\varphi)}{\partial \varphi}\omega = \frac{\partial b(x^\circ)}{\partial x} A(\varphi) + \Psi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь через ω обозначен постоянный вектор $a(x^\circ)$, средние значения векторных функций $X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)$ и $\Psi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)$ по совокупности переменных

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ равны нулю. Будем предполагать, что компоненты вектора $\omega = a(x^\circ)$ удовлетворяют условиям сильной несоизмеримости

$$|k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n| > K(|k_1| + \ldots + |k_n|)^{-p}, \quad p > 0 \tag{3.7}$$

Векторные функции $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ и матрица $C(\varphi)$ будут по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемыми решениями системы уравнений (3.6), если векторная функция $X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)$ будет $2n + 2p + 4$ раза, а векторная функция $\Psi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)$ и матрица $\partial X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)/\partial\psi$ будут $n + p + 3$ раза непрерывно дифференцируемыми [6].

Выберем векторы x^* и ψ^* как решение системы уравнений

$$\frac{\partial b(x^\circ)}{\partial x} x^* + \langle \Psi(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi x^* + \frac{\partial}{\partial\psi}\langle X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi \psi^* + \langle Y(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi + \langle Z\rangle_\varphi = 0$$

Здесь $\langle Z(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi$ — среднее значение по совокупности переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ от векторной функции

$$Z(\varphi, \psi^\circ, x^\circ) = \frac{\partial X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)}{\partial x} A(\varphi) + \frac{\partial X^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)}{\partial \psi} B(\varphi) -$$
$$- \frac{\partial A(\varphi)}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial a(x^\circ)}{\partial x} A(\varphi) + \Phi^*(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\right]$$

В работе [11] показано, что при достаточно общих предположениях система нелинейных уравнений (3.8) допускает некоторое решение (x^*, ψ^*). Таким образом, система (3.5) принимает следующий вид:

$$\varphi^\cdot = \omega + \varepsilon\Phi(\varphi, z, y, \sqrt{\varepsilon}), \quad z^\cdot = \varepsilon F_{11}^*(\varphi) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\langle X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi z + \tag{3.9}$$
$$+ \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\psi}\langle X(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi y + \varepsilon F_{12}^*(\varphi) y + \varepsilon Z^*(\varphi, z, y, \sqrt{\varepsilon})$$
$$y^\cdot = \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial b(x^\circ)}{\partial x} z + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\psi}\langle\Psi(\varphi, \psi^\circ, x^\circ)\rangle_\varphi y + \varepsilon F_{21}^*(\varphi) y + \varepsilon Y^*(\varphi, z, y, \sqrt{\varepsilon})$$

Здесь средние значения векторной функции $F_{11}^*(\varphi)$, матриц $F_{12}^*(\varphi)$ и $F_{21}^*(\varphi)$ по совокупности переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ равны нулю, а векторные функции Z^* и Y^* удовлетворяют оценке

$$\|Z^*(\varphi, z, y, \sqrt{\varepsilon})\| + \|Y^*(\varphi, z, y, \sqrt{\varepsilon})\| < M(\sqrt{\varepsilon} + \|y\|^2) \tag{3.10}$$

Введем теперь следующие обозначения. Если порядок s квадратной матрицы $(\partial/\partial x)\langle X\rangle_\varphi$ не менее порядка m квадратной матрицы $(\partial/\partial\psi)\langle\Psi\rangle_\varphi$, то

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\langle X\rangle, \quad B = \frac{\partial}{\partial\psi}\langle X\rangle, \quad C = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad E = \frac{\partial}{\partial\psi}\langle\Psi\rangle$$

Напротив, если $s < m$, то

$$A = \frac{\partial}{\partial\psi}\langle\Psi\rangle, \quad B = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial}{\partial\psi}\langle X\rangle, \quad E = \frac{\partial}{\partial x}\langle X\rangle$$

Таким образом, меняя в случае необходимости местами переменные z и y в системе (3.9), достаточно исследовать при достаточно малых $0 < \mu < \mu_0$ асимптотику собственных векторов и собственных значений матрицы

$$H(\mu) = \begin{Vmatrix} \mu A & B \\ C & \mu E \end{Vmatrix} \qquad (\mu = +\sqrt{\varepsilon})$$

Здесь квадратная матрица A имеет порядок $n = \max(s, m)$, а квадратная матрица E имеет порядок $r = \min(s, m)$. Для того, чтобы собственные значения матрицы $H(\mu)$ имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все собственные значения матрицы CB были действительны и отрицательны [8].

Будем предполагать выполненными следующие предположения [8]:

1) Собственные значения матрицы CB действительны, отрицательны и различны. Соответствующие им числа

$$l_i = \frac{1}{2\,\mathrm{Sp}\,\Omega^*}(\lambda_i) \sum_{\alpha,\beta}\left(e_{\alpha\beta} + \frac{1}{\lambda_i}\sum_{\nu,\delta} c_{\alpha\nu}a_{\nu\delta}b_{\delta\beta}\right)\Omega^*_{\alpha\beta}(\lambda_i) \tag{3.11}$$

где матрица $\Omega^*(\lambda_i)$ составлена из алгебраических дополнений, соответствующих элементов матрицы $\Omega(\lambda_i) = CB - \lambda_i I$, отрицательны.

2) В случае $n > r$ уравнение

$$\Psi(\rho) = \begin{vmatrix} A - I\rho & B \\ C & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.12}$$

имеет $n - r$ различных корней $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-r}$, лежащих слева от мнимой оси.

При выполнении этих предположений все собственные значения матрицы $H(\mu)$ различны и имеют отрицательные вещественные части; матрица, составленная из собственных векторов $H(\mu)$, неособая при $\mu = 0$ [8]. Это означает, что неособым преобразованием переменных система уравнений (3.9) приводится к виду (3.1) с выполнением оценок (3.2).

Имеет место теорема.

Теорема 2. Предположим, что

1) Правые части системы дифференциальных уравнений (1.1) удовлетворяют ранее сформулированным условиям периодичности и гладкости.

2) При некоторых векторах x° и ψ° выполняются необходимые условия синхронизма, сформулированные в теореме 1.

3) Компоненты вектора $\omega(x^\circ)$ удовлетворяют условиям сильной несоизмеримости (3.7).

4) Существует решение x^*, ψ^* системы (3.8).

5) Выполняются предположения, обеспечивающие специальную асимптотику собственных значений и собственных векторов матрицы $H(\mu)$.

При этих предположениях система уравнений (1.1) допускает при достаточно малых ε гладкое интегральное n-мерное устойчивое тороидальное многообразие вида

$$\begin{aligned} x &= x^\circ + \varepsilon x^* + \varepsilon A(\varphi) + \varepsilon f_1(\varphi, \varepsilon) \\ \psi &= \psi^\circ + \sqrt{\varepsilon} f_2(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon\psi^* + \varepsilon B(\varphi) \end{aligned} \tag{3.13}$$

единственное в области

$$\begin{aligned} &\| x - x^\circ - \varepsilon x^* - \varepsilon A(\varphi) \| \leqslant \varepsilon\delta_0, \quad \| \psi - \psi^\circ - \varepsilon\psi^* - \\ &- \varepsilon B(\varphi) \| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,\delta_0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

где δ_0 — некоторое фиксированное число. Функции $f_1(\varphi, \varepsilon)$ и $f_2(\varphi, \varepsilon)$ непрерывны по ε и стремятся к нулю вместе с ε.

Заметим, что если собственные числа матрицы CB различны, причем действительным и отрицательным собственным числам соответствуют ненулевые числа l_i, определяемые по формуле (3.11), и уравнение (3.12) имеет $n-r$ различных корней, лежащих по обе стороны от мнимой оси, то тороидальное интегральное многообразие (3.13) также существует, однако будет седловым [1].

4. Синхронизм в квазигамильтоновой системе. В качестве приложения найденных выше необходимых и достаточных условий существования синхронизма рассмотрим задачу о синхронизации в системе объектов, описываемых уравнениями вида ($\varepsilon > 0$ — малый параметр)

$$\varphi_0^{\cdot} = \omega_0, \quad \varphi_i^{\cdot} = \omega_i(J_i) - \varepsilon\left[\frac{\partial X_i}{\partial J_i} Q_i + \frac{\partial L}{\partial J_i}\right] + \varepsilon^2(\ldots) \tag{4.1}$$

$$J_i^{\cdot} = \varepsilon\left[\frac{\partial X_i}{\partial \varphi_i} Q_i + \frac{\partial L}{\partial \varphi_i}\right] + \varepsilon^2(\ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

где

$$X_i = X_i(\varphi_i, J_i), \qquad Q_i = Q_i(\varphi_i, J_i) \tag{4.2}$$

$$L = L(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, J_1, J_2, \ldots, J_n)$$

Периодические решения (n-степенной синхронизм первого порядка кратности) изучены Р. Ф. Нагаевым [12].

Пусть при некотором векторе J° выполнено первое из необходимых условий синхронизма (1.4). Выпишем формулы (1.5), определяющие замену переменных в новых обозначениях системы уравнений (4.1)

$$\psi_s = \frac{1}{\Delta}\varphi_s, \qquad v_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{\alpha=0}^{n} p_{i\alpha}\varphi_\alpha \quad (s = 0, 1, \ldots, n-m;\ i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.3}$$

Система (4.1) принимает вид

$$\psi_0^{\cdot} = \frac{\omega_0}{\Delta}, \quad \psi_s^{\cdot} = \frac{1}{\Delta}\left\{\omega_s(J_s) - \varepsilon\left[\frac{\partial X_s}{\partial J_s} Q_s + \frac{\partial L}{\partial J_s}\right]\right\} + \varepsilon^2(\ldots) \tag{4.4}$$

$$v_i^{\cdot} = \frac{1}{\Delta}\left\{p_{i0}\omega_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}\left[\omega_\alpha(J_\alpha) - \varepsilon\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial J_\alpha} Q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\right)\right]\right\} + \varepsilon^2(\ldots)$$

$$J_k^{\cdot} = \varepsilon\left[\frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k} Q_k + \frac{\partial L}{\partial \varphi_k}\right] + \varepsilon^2(\ldots) \quad (s = 1, \ldots, n-m;\ i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$$

Введем следующие обозначения:

$$b_i(J) = \frac{1}{\Delta}\left[p_{i0}\omega_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}\omega_\alpha(J_\alpha)\right], \quad A_k(J, v) = \left\langle\frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k} Q_k + \frac{\partial L}{\partial \varphi_k}\right\rangle \tag{4.5}$$

$$R_i(J, v) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}\left\langle\frac{\partial X_\alpha}{\partial J_\alpha} Q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial J_\alpha}\right\rangle \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$$

---

[1] Гуртовник А. С., Коган В. П., Неймарк Ю. И. Интегральные тороидальные многообразия в нелинейных системах. III Всес. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений (тезисы докладов), Самарканд, 1973.

где символ $\langle\ \rangle$ означает усреднение по совокупности переменных $\psi_0, \ldots, \ldots, \psi_m$.

Как было показано, существование векторов J° и v°, удовлетворяющих системе нелинейных уравнений

$$(4.6)\qquad p_{i0}\omega_0 + \sum_{\alpha=1}^{n} p_{i\alpha}\omega_\alpha(J_\alpha) = 0, \qquad A_k(J, v) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

является необходимым условием синхронизма m-й степени.

Предполагается, что система (4.6) допускает некоторое изолированное решение J°, v°, при котором компоненты вектора ω_0, $\omega_1(J_1^\circ), \ldots, \ldots, \omega_{n-m}\ (J^0_{n-m})$ удовлетворяют условиям (3.7) сильной несоизмеримости. Как и ранее, считаем, что выполнены предположения, обеспечивающие специальную асимптотику собственных значений и собственных векторов матрицы $H(\mu)$, которая в новых обозначениях (4.5) имеет вид

$$(4.7)\qquad H(\mu) = \begin{Vmatrix} \mu\dfrac{\partial A}{\partial J} & \dfrac{\partial A}{\partial v} \\ \dfrac{\partial b}{\partial J} & \mu\dfrac{\partial R}{\partial v} \end{Vmatrix}$$

В силу теоремы 2 в системе уравнений (4.1) имеет место синхронизм m-й степени, иными словами, система (4.1) допускает устойчивое интегральное многообразие вида

$$(4.8)\qquad J = J^0 + f(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m}\ \mu), \qquad v = v^c + g(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m};\ \mu)$$

где векторные функции f и g стремятся к нулю вместе с μ.

Рассмотрим несколько подробнее необходимое условие устойчивости интегрального многообразия (4.8), состоящее в отрицательности всех собственных чисел матрицы $(\partial b / \partial J)(\partial A / \partial v)$. Ввиду того, что каждая из функций X_i и Q_i зависит только от двух переменных φ_i и J_i, имеют место следующие соотношения:

$$(4.9)\qquad \frac{\partial A_k}{\partial v_s} = \frac{\partial}{\partial v_s}\left\langle \frac{\partial X_k}{\partial \varphi_k} Q_k + \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial v_s}\left\langle \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} \right\rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, m)$$

Пусть $\exp[j(k_0\varphi_0 + k_1\varphi_1 + \ldots + k_n\varphi_n)]$ — любая гармоника функции $L(\varphi, J)$, которая после замены переменных (4.3) примет вид

$$\exp\left[j\sum_{i=0}^{n-m} q_i\psi_i + i\sum_{i=1}^{m} r_i v_i\right]$$

где $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}, r_1, r_2, \ldots, r_m$ — некоторые целые числа. При усреднении по совокупности переменных $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-m}$ остаются те и только те гармоники, у которых $q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-m} = 0$. В силу соотношений (4.3) это означает, что

$$(4.10)\qquad \left\langle \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \right\rangle = \frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{m} p_{si}\frac{\partial}{\partial v_s}\Lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Lambda = \langle L\rangle_\psi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-m}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} L\,d\psi_0\,d\psi_1\ldots d\psi_{n-m}$$

Таким образом, для устойчивости интегрального тора (4.8) необходимо, чтобы были действительны и отрицательны собственные значения матрицы

$$\frac{\partial b}{\partial J}\frac{\partial A}{\partial v}=\frac{1}{\Delta^2}P\frac{d\omega}{dJ}P^T S,\qquad S=\left\|\frac{\partial^2}{\partial v_i\partial v_j}\Lambda\right\| \tag{4.11}$$

Здесь P — прямоугольная матрица P_{ij} ($i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$), ранг которой равен m.

Пусть все величины $d\omega_i/dJ_i$ одного знака, т. е.

$$\operatorname{sign}\frac{d\omega_1}{dJ_1}=\cdots=\operatorname{sign}\frac{d\omega_n}{dJ_n}=\sigma$$

Если матрица $d\omega/dJ$ положительно (отрицательно) определенная, то произведение матриц $P\,(d\omega/dJ)\,P^T$ будет также симметричной положительно (отрицательно) определенной матрицей при условии, что ранг прямоугольной матрицы P максимален [13]. Собственные значения матрицы (4.11) действительны, причем знаки наименьшего $\lambda_{\min}$ и наибольшего $\lambda_{\max}$ совпадают со знаками наименьшего $\lambda^*_{\min}$ и наибольшего $\lambda^*_{\max}$ собственных значений матрицы σS [13].

Таким образом, для устойчивости интегрального тора (4.8) необходимо, чтобы симметричная матрица $-\sigma S$ была положительно определенной.

Будем искать потенциальную функцию $D\,(J^\circ, v)$ [3, 12] вида

$$D=-\sigma\left[\Lambda\,(J^\circ, v)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(J^\circ)\,v_i\right]$$

Из вида функции D следует, что

$$\frac{\partial}{\partial v_s}D=-\sigma\left[\frac{\partial}{\partial v_s}\Lambda+\lambda_s\right],\qquad \frac{\partial^2 D}{\partial v_i\partial v_j}=-\sigma S$$

В силу (4.5) и (4.10) второе из соотношений (4.6) принимает вид

$$A_k\,(J^\circ, v^\circ)=\left\{\left\langle\frac{\partial X_k}{\partial\varphi_k}Q_k\right\rangle+\frac{1}{\Delta}\sum_{s=1}^{m}P_{sk}\frac{\partial\Lambda}{\partial v_k}\right\}_{J=J^\circ,\ v=v^\circ}=0 \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.12) следует матричное равенство

$$\left\{P\left\langle\frac{\partial X}{\partial\varphi}Q\right\rangle+\frac{1}{\Delta}PP^T\frac{\partial\Lambda}{\partial v}\right\}_{J=J^\circ,\ v=v^\circ}=0$$

Параметры $\lambda_1\,(J_1^\circ), \ldots, \lambda_m\,(J_m^\circ)$ определены как решение системы линейных уравнений

$$\frac{1}{\Delta}PP^T\lambda=P\left\langle\frac{\partial X}{\partial\varphi}Q\right\rangle_{J=J^\circ}$$

При таком выборе параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ функция $D\,(J^\circ, v)$ в точке $v=v^\circ$ удовлетворяет условиям стационарности и строгого минимума, основанного на анализе членов второго порядка, если матрица $-\sigma Q$ положительно определенная.

Полученные необходимые и достаточные условия в частном случае полного синхронизма совпадают с результатами Р. Ф. Нагаева [12].

Поступила 17 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beletskii V. V.* Resonance rotation of Celestial bodies and Cassini's laws. Celest. Mech., 1972, vol. 6, No. 3, p. 356—378.
2. *Белецкий В. В., Хентов А. А.* Магнитно-гравитационная стабилизация спутника. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
3. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М., «Наука», 1971.

4. *Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н.* Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженной частицы в магнитном поле. Укр. матем. ж., 1955, т. 7, № 1.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1962.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1969.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* О квазипериодических колебаниях в нелинейных системах. Укр. матем. ж., 1972, т. 24, № 2.
8. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
9. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
10. *Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И.* Интегральные многообразия дифференциальных уравнений с быстровращающейся фазой. Изв. вузов. Радиофизика, 1969, т. 12, № 11.
11. *Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И.* Интегральные многообразия некоторых нелинейных систем. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, № 11.
12. *Нагаев Р. Ф.* Синхронизация в системе существенно нелинейных объектов с одной степенью свободы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1966.