Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ РАВНЫХ ЧАСТОТ

А. Г. Сокольский

(Москва)

Вопрос об устойчивости решается в нелинейной постановке. Рассмотрены случаи простых и непростых элементарных делителей характеристической матрицы линейной системы. Для второго случая найдена вещественная нормальная форма гамильтониана линейной задачи и соответствующее нормализующее преобразование. В зависимости от коэффициентов функции Гамильтона в первом случае доказаны неустойчивость и устойчивость по Ляпунову, а во втором случае — неустойчивость и формальная устойчивость.

1. Рассмотрим автономную гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Координаты q_1, q_2 и импульсы p_1, p_2 выберем таким образом, чтобы точка $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ была положением равновесия системы дифференциальных уравнений, а функцию Гамильтона представим в виде ряда

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots + H_m + \ldots \tag{1.1}$$

где H_m — полиномы степени m координат и импульсов.

Если H_2 — знакоопределенная функция, то по теореме Ляпунова [1] положение равновесия устойчиво. Если H_2 не будет знакоопределенной функцией, но имеет место устойчивость в первом приближении и частоты ω_1, ω_2 линейной задачи не связаны резонансными соотношениями до четвертого порядка включительно, то вопрос об устойчивости в большинстве случаев решается при помощи теоремы Арнольда — Мозера [2, 3].

Пусть существуют целые n_1 и n_2 такие, что $0 < |n_1| + |n_2| \leqslant 4$ и $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0$, тогда теорема Арнольда — Мозера неприменима, и задача устойчивости нуждается в особом исследовании. Устойчивость при резонансах $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ исследована в работе А. П. Маркеева [4]. Цель данной работы — получение условий устойчивости и неустойчивости при резонансе $\omega_1 = \omega_2$, а также выражение этих условий через коэффициенты форм H_2, H_3, H_4.

Первый этап решения задачи состоит в нахождении нормальной формы линейной системы. По аналогии со случаем некратных частот можно было бы предположить, что нормальной формой в данном случае будет форма Жордана. Однако соответствующая ей система дифференциальных уравнений не будет канонической.

Рассмотрим подробнее линейную систему с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H_2 = {}^1/_2 a_{11}q_1^2 + a_{12}q_1q_2 + {}^1/_2 a_{22}q_2^2 + c_{11}q_1p_1 + c_{12}q_1p_2 + {}\\ + c_{21}q_2p_1 + c_{22}q_2p_2 + {}^1/_2 b_{11}p_1^2 + b_{12}p_1p_2 + {}^1/_2 b_{22}p_2^2 = {}^1/_2 \mathbf{q}'H\mathbf{q} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Канонические уравнения движения такой системы запишем в виде

$$dq / dt = JHq \tag{1.3}$$

$$q = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix}, \quad H = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_{11} & c_{12} \\ a_{12} & a_{22} & c_{21} & c_{22} \\ c_{11} & c_{21} & b_{11} & b_{12} \\ c_{12} & c_{22} & b_{12} & b_{22} \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

В силу кратности корней характеристического уравнения линейной системы (1.3) его можно записать так:

$$\lambda^4 + 2\omega^2\lambda^2 + \omega^4 = 0 \tag{1.4}$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = i\omega$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = -i\omega$ — корни характеристического уравнения.

Пусть $D_k(\lambda)$ — наибольший общий делитель всех миноров определяющей матрицы $(JH - \lambda E)$ порядка k [5]. В исследуемой задаче всегда $D_0 = D_1 = D_2 = 1$. Кроме того, $D_4 = \lambda^4 + 2\omega^2\lambda^2 + \omega^4$. В зависимости от коэффициентов a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} возможны два случая: 1) $D_3 = \lambda^2 + \omega^2$, 2) $D_3 = 1$. Инвариантные многочлены матрицы $(JH - \lambda E)$ соответственно для первого и второго случая равны: $i_1 = i_2 = \lambda^2 + \omega^2$, $i_3 = i_4 = 1$ и $i_1 = (\lambda^2 + \omega^2)^2$, $i_2 = i_3 = i_4 = 1$.

В первом случае определяющая матрица имеет простые элементарные делители и нормальная форма $i\omega\,(q_1p_1 + q_2p_2)$ имеет вещественный вид

$$H_2 = {}^1/_2\,(p_1^2 + \omega^2 q_1^2) - {}^1/_2\,(p_2^2 + \omega^2 q_2^2)$$

Этот случай исследуется в п. 2.

Во втором случае элементарные делители непросты. Тогда [6] существует линейное комплексное каноническое преобразование P, приводящее гамильтониан (1.2) системы (1.3) к виду

$$H_2^* = i\omega\,(q_1^* p_1^* + q_2^* p_2^*) + q_2^* p_1^* \tag{1.5}$$

причем в работе [6] указан конструктивный путь нахождения матрицы преобразования P, но вопрос о вещественной форме нормализованного гамильтониана не обсуждается. Найдем здесь эту форму.

Линейным комплексным каноническим преобразованием с матрицей (a и b — любые комплексные числа)

$$D = \begin{Vmatrix} b & ib & -a & -ia \\ a & ia & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2a} & -\dfrac{i}{2a} & 0 & 0 \\ -\dfrac{b}{2a^2} & \dfrac{ib}{2a^2} & \dfrac{1}{2a} & -\dfrac{i}{2a} \end{Vmatrix}$$

гамильтониан (1.5) можно привести к виду

$$H_2 = {}^1/_2\,(q_1^2 + q_2^2) + \omega\,(q_1p_2 - q_2p_1) \tag{1.6}$$

Теперь к исходной системе с гамильтонианом (1.2) применим преобразование $N = PD$, а числа a и b подберем так, чтобы преобразование было вещественным. Это всегда можно сделать, так как λ-матрицы, соответствующие гамильтонианам (1.2) и (1.6), имеют в поле действительных чисел равные элементарные делители [5].

Устойчивость положения равновесия в случае непростых элементарных делителей исследуется в п. 3.

2. Пусть $\omega_1 = \omega_2$ и элементарные делители просты. Функцию Гамильтона (1.1) линейным вещественным каноническим преобразованием можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & H = {}^1/_2 (p_1^2 + \omega^2 q_1^2) - {}^1/_2 (p_2^2 + \omega^2 q_2^2) + H_3 + \\
& + H_4 + \ldots + H_m + \ldots \\
& H_m = \sum_{\nu=m} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_4}, \quad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4
\end{aligned}
$$

Для приведения форм H_3 и H_4 разложения (2.1) к нормальному виду использовалось преобразование Биркгофа [7] в комплексных координатах, причем проводимая нормализация принципиально ничем не отличается от аналогичных преобразований работы [4] для резонансов $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$. В конце концов, уничтожив форму H_3 и упростив H_4, гамильтониан (2.1) можно привести к виду (обозначения для переменных оставлены прежние)

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad & H = \frac{\omega}{2} [(q_1^2 + p_1^2) - (q_2^2 + p_2^2)] + \frac{c_{20}}{4} (q_1^2 + p_1^2)^2 + \\
& + \frac{c_{11}}{4} (q_1^2 + p_1^2)(q_2^2 + p_2^2) + \frac{c_{02}}{4} (q_2^2 + p_2^2)^2 + \\
& + \frac{k_{2002}}{2} [(q_1 q_2 - p_1 p_2)^2 - (q_1 p_2 + q_2 p_1)^2] + l_{2002} (q_1 q_2 - p_1 p_2) \times \\
& \times (q_1 p_2 + q_2 p_1) + \frac{1}{2} (q_1^2 + p_1^2) [k_{1120} (q_1 p_2 + q_2 p_1) + \\
& + l_{1120} (q_1 q_2 - p_1 p_2)] + \frac{1}{2} (q_2^2 + p_2^2) [k_{1102} (q_1 p_2 + q_2 p_1) + \\
& + l_{1102} (q_1 q_2 - p_1 p_2)] + H_5 + \ldots \\
& c_{20} = -x_{2020} - \frac{3}{2} u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{2,2} - \frac{1}{2} u_{4,4} - \frac{3\omega^2}{8} u_{7,7} + \frac{\omega^2}{24} u_{8,8} \\
& c_{11} = x_{1111} + 2u_{1,6} + 2u_{3,3} - \frac{\omega^2}{6} u_{8,8} - 2u_{2,5} - 2u_{4,4} + \frac{\omega^2}{6} u_{9,9} \\
& c_{02} = -x_{0202} + \frac{3}{2} u_{5,5} - \frac{1}{2} u_{6,6} + \frac{1}{2} u_{3,3} + \\
& + \frac{3\omega^2}{8} u_{10,10} - \frac{\omega^2}{24} u_{9,9} \\
& k_{2002} = x_{2002} - \frac{1}{2} u_{1,3} - u_{2,4} + \frac{\omega^2}{8} u_{7,9} + u_{3,6} + \\
& + \frac{1}{2} u_{4,5} - \frac{\omega^2}{8} u_{8,10} \\
& l_{2002} = y_{2002} - \frac{1}{2} v_{1,3} + v_{2,4} + \frac{\omega^2}{8} v_{7,9} - v_{3,6} + \frac{1}{2} v_{4,5} - \frac{\omega^2}{8} v_{8,10} \\
& k_{1120} = x_{1120} - \frac{1}{2} u_{2,1} + u_{1,4} + u_{3,2} - \frac{1}{2} u_{2,6} - \\
& - \frac{1}{2} u_{6,4} - \frac{\omega^2}{4} u_{8,7} + \frac{\omega^2}{12} u_{9,8}
\end{aligned}
$$

$$l_{1120} = y_{1120} - \frac{1}{2} v_{2,1} + v_{1,4} + v_{3,2} - \frac{1}{2} v_{2,6} - \frac{1}{2} v_{6,4} - \frac{\omega^2}{4} v_{8,7} + \frac{\omega^2}{12} v_{9,8}$$

$$k_{1102} = x_{1102} + \frac{1}{2} u_{6,2} + u_{2,3} - 2u_{5,3} - u_{4,6} + \frac{1}{2} u_{6,5} + \frac{\omega^2}{4} u_{9,10} - \frac{\omega^2}{12} u_{8,9}$$

$$l_{1102} = y_{1102} + \frac{1}{2} v_{6,2} + v_{2,3} - 2v_{5,3} - v_{4,6} - \frac{1}{2} v_{6,5} + \frac{\omega^2}{4} v_{9,10} - \frac{\omega^2}{12} v_{8,9}$$

$$u_{i,j} = x_i x_j + y_i y_j, \quad v_{i,j} = x_i y_j - x_j y_i \qquad (i = 1, \ldots, 10)$$

$$x_{2020} = -\frac{1}{2}\left(3\omega^2 h_{0040} + h_{2020} + \frac{3}{\omega^2} h_{4000}\right)$$

$$x_{1111} = \omega^2 h_{0022} + h_{0220} + h_{2002} + \frac{1}{\omega^2} h_{2200}$$

$$x_{0202} = -\frac{1}{2}\left(3\omega^2 h_{0004} + h_{0202} + \frac{3}{\omega^2} h_{0400}\right)$$

$$x_{2002} = \frac{1}{4}\left(\omega^2 h_{0022} + h_{0220} + h_{1111} + h_{2002} + \frac{1}{\omega^2} h_{2200}\right)$$

$$y_{2002} = \frac{1}{4}\left(-\omega h_{0121} - \omega h_{1012} + \frac{1}{\omega} h_{1210} + \frac{1}{\omega} h_{2101}\right)$$

$$x_{1120} = \frac{1}{4}\left(3\omega h_{0130} + \omega h_{1021} + \frac{1}{\omega} h_{2110} + \frac{3}{\omega} h_{3001}\right)$$

$$y_{1120} = \frac{1}{4}\left(-3\omega^2 h_{0031} + h_{1120} - h_{2011} + \frac{3}{\omega^2} h_{3100}\right)$$

$$x_{1102} = \frac{1}{4}\left(3\omega h_{1003} + \omega h_{0112} + \frac{1}{\omega} h_{1201} + \frac{3}{\omega} h_{0310}\right)$$

$$y_{1102} = \frac{1}{4}\left(-3\omega^2 h_{0013} + h_{0211} - h_{1102} + \frac{3}{\omega^2} h_{1300}\right)$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} h_{1020} - \frac{3}{2\omega^2} h_{3000},$$

$$x_2 = -\omega h_{0021} - \frac{1}{\omega} h_{2001},$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} h_{0111} - \frac{1}{2} h_{1002} + \frac{1}{2\omega^2} h_{1200},$$

$$x_4 = -\frac{\omega}{2} h_{0021} + \frac{1}{2\omega} h_{1110} + \frac{1}{2\omega} h_{2001},$$

$$x_5 = \frac{3\omega}{2} h_{0003} + \frac{1}{2\omega} h_{0201},$$

$$x_6 = h_{1002} + \frac{1}{\omega^2} h_{1200},$$

$$x_7 = h_{0030} - \frac{1}{\omega^2} h_{2010},$$

$$x_8 = \frac{1}{\omega} h_{0120} - \frac{1}{\omega} h_{1011} - \frac{1}{\omega^3} h_{2100},$$

$$x_9 = -h_{0012} + \frac{1}{\omega^2} h_{0210} - \frac{1}{\omega^2} h_{1101},$$

$$x_{10} = -\frac{1}{\omega} h_{0102} + \frac{1}{\omega^3} h_{0300},$$

$$y_1 = \frac{3\omega}{2} h_{0030} + \frac{1}{2\omega} h_{2010}$$

$$y_2 = h_{0120} + \frac{1}{\omega^2} h_{2100}$$

$$y_3 = -\frac{\omega}{2} h_{0012} + \frac{1}{2\omega} h_{0211} + \frac{1}{2\omega} h_{1101}$$

$$y_4 = -\frac{1}{2} h_{0120} - \frac{1}{2} h_{1011} + \frac{1}{2\omega^3} h_{2100}$$

$$y_5 = -\frac{1}{2} h_{0102} - \frac{3}{2\omega^2} h_{0300}$$

$$y_6 = -\omega h_{0012} - \frac{1}{\omega} h_{0210}$$

$$y_7 = \frac{1}{\omega} h_{1020} - \frac{1}{\omega^3} h_{3000}$$

$$y_8 = h_{0021} + \frac{1}{\omega^2} h_{1110} - \frac{1}{\omega^2} h_{2001}$$

$$y_9 = \frac{1}{\omega} h_{0111} - \frac{1}{\omega} h_{1002} + \frac{1}{\omega^3} h_{1200}$$

$$y_{10} = -h_{0003} + \frac{1}{\omega^2} h_{0201}$$

В «полярных» координатах r_1, r_2, φ_1, φ_2, определяемых формулами

$$q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \quad p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i$$

гамильтониан (2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} H &= \omega(r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ &+ 2r_1r_2[k_{2002}\cos 2(\varphi_1+\varphi_2) - l_{2002}\sin 2(\varphi_1+\varphi_2)] + \\ &+ 2r_1\sqrt{r_1r_2}[k_{1120}\sin(\varphi_1+\varphi_2) - l_{1120}\cos(\varphi_1+\varphi_2)] + \\ &+ 2r_2\sqrt{r_1r_2}[k_{1102}\sin(\varphi_1+\varphi_2) + l_{1102}\cos(\varphi_1+\varphi_2)] + O(r_i^{5/2}) \end{aligned}$$

Обозначим $A = 2\sqrt{k_{2002}^2 + l_{2002}^2}$, $B = 2\sqrt{k_{1120}^2 + l_{1120}^2}$, $C = 2\sqrt{k_{1102}^2 + l_{1102}^2}$ и пусть $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Тогда, определяя углы θ_1, θ_2, θ_3 с помощью соотношений

$$\sin 2\theta_1 = \frac{2k_{2002}}{A}, \quad \sin\theta_2 = -\frac{2l_{1120}}{B}, \quad \sin\theta_3 = \frac{2l_{1102}}{C}$$

$$\cos 2\theta_1 = -\frac{2l_{2002}}{A}, \quad \cos\theta_2 = \frac{2k_{1120}}{B}, \quad \cos\theta_3 = \frac{2k_{1102}}{C}$$

получаем

$$\begin{aligned} (2.3) \qquad H &= \omega(r_1 - r_2) + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ &+ Ar_1r_2\sin 2(\varphi_1+\varphi_2+\theta_1) + Br_1\sqrt{r_1r_2}\sin(\varphi_1+\varphi_2+\theta_2) + \\ &+ Cr_2\sqrt{r_1r_2}\sin(\varphi_1+\varphi_2+\theta_3) + O(r_i^{5/2}) \end{aligned}$$

При помощи интеграла $H = h = \text{const}$ понизим порядок системы на две единицы [8]; новый гамильтониан будет 2π-периодичен по новой независимой переменной. Так как движение рассматривается в достаточно малой окрестности начала координат, то можно считать $r_1, r_2 \sim \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Пусть начальные условия таковы, что $h \sim \varepsilon^{3/2}$. Тогда, разрешая уравнение (2.3) относительно r_2, получаем

$$r_2 = -K_0(r_1, \varphi_1, \varphi_2) - K_1(r_1, \varphi_1, \varphi_2, h), \quad K_1 = O(r_1^{5/2})$$

$$\begin{aligned} K_0 &= -r_1 - \frac{1}{\omega}r_1^2[(c_{20}+c_{11}+c_{02}) + A\sin 2(\varphi_1+\varphi_2+\theta_1) + \\ &+ B\sin(\varphi_1+\varphi_2+\theta_2) + C\sin(\varphi_1+\varphi_2+\theta_3)] \end{aligned}$$

Здесь K_1 — 2π-периодическая по φ_1 и новой независимой переменной φ_2 функция. Если ввести вместо φ_1 новый угол $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \theta_1$, а вместо r_1 новый импульс r, то полученной системе с одной степенью свободы будет соответствовать гамильтониан

$$\begin{aligned} (2.4) \qquad K &= r^2(a + b\sin 2\varphi + c\sin\varphi + d\cos\varphi) + K^*(r, \varphi, \varphi_2, h), \\ K^* &= O(r^{5/2}) \end{aligned}$$

где K^* — 2π-периодическая по φ и φ_2 функция, и

$$a = -\frac{1}{\omega}(c_{20}+c_{11}+c_{02}), \quad c = -\frac{1}{\omega}[B\cos(\theta_2-\theta_1) + C\cos(\theta_3-\theta_1)]$$

$$b = -\frac{1}{\omega}A, \quad d = -\frac{1}{\omega}[B\sin(\theta_2-\theta_1) + C\sin(\theta_3-\theta_1)]$$

Из уравнений движения с гамильтонианом (2.3) следует, что при достаточно малых r_1 и r_2 угловая переменная φ_2 будет монотонной функцией времени и, следовательно, в задаче устойчивости φ_2 может играть роль времени.

Таким образом, как и в [4,8], исследование устойчивости системы с двумя степенями свободы удалось свести к исследованию системы с одной степенью свободы.

Теорема 2.1. Если функция $\Phi(\varphi) = a + b \sin 2\varphi + C \sin \varphi + d \cos \varphi$ не обращается в нуль ни при каких φ, то исследуемое положение равновесия устойчиво по Ляпунову. Если существует φ^* $(0 \leqslant \varphi^* \leqslant 2\pi)$ такое, что $\Phi(\varphi^*) = 0$, а $\Phi'(\varphi^*) \neq 0$, то положение равновесия $q_i = p_i = 0$ неустойчиво.

Замечание 2.1. Если существует φ^* такое, что $\Phi(\varphi^*) = \Phi'(\varphi^*) = 0$, то вопрос об устойчивости решается членами более высокого порядка в разложении функции Гамильтона задачи.

Докажем сначала предположение о неустойчивости. Заметим, что из периодичности функции Φ и из того, что $\Phi'(\varphi^*) = 0$, следует, что если уравнение $\Phi(\varphi) = 0$ имеет корни, то их, по крайней мере, два. Обозначим два ближайших между собой корня φ^* и φ^{**} и пусть корень φ^* такой, что $\Phi(\varphi^*) = 0$, а $\Phi'(\varphi^*) < 0$. Докажем тогда неустойчивость по переменной r с помощью теоремы Четаева [9] и результатов работы [10].

За функцию Четаева возьмем функцию

$$V = r^2 \sin \Psi, \qquad \Psi = \pi / 2\delta (\varphi - \varphi^* + \delta)$$

где достаточно малое число δ подберем так, чтобы в окрестности $\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^* + \delta$ не было других корней функции $\Phi(\varphi)$, а $\Phi'(\varphi)$ сохраняла бы в этой окрестности знак. За область $V > 0$ возьмем область $(r > 0, \varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^* + \delta)$. В силу уравнений движения производная функции V по независимой переменной φ_2 имеет вид

$$\frac{dV}{d\varphi_2} = 2r^3 \{\Phi(\varphi) \frac{\pi}{2\delta} \cos \Psi - \Phi'(\varphi) \sin \Psi\} + O(r^{7/2})$$

а эта функция будет определенно-положительной, так как в области $V > 0$ $\Phi'(\varphi) < 0$ и $\sin \Psi > 0$, а при $\varphi^* - \delta < \varphi < \varphi^*$ функция $\Phi(\varphi) > 0$ и $\cos \Psi > 0$, при $\varphi^* < \varphi < \varphi^* + \delta$ функция $\Phi(\varphi) < 0$, но и $\cos \Psi < 0$, причем выражение, стоящее в фигурных скобках, не обращается в нуль ни в области $V > 0$, ни на ее границе.

Таким образом, утверждение о неустойчивости при существовании корней уравнения $\Phi(\varphi) = 0$ доказано.

Для доказательства устойчивости перейдем к переменным действие J — угол W [11]. Тогда производящая функция канонического преобразования $r, \varphi \to J, W$ равна

$$S(J, \varphi) = \frac{2\pi J}{M} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}}, \qquad M = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi(\varphi)}}$$

отметим, что M существует при выполнении условий теоремы.

В новых переменных гамильтониан (2.4) выглядит так:

$$K(J, W) = \frac{4\pi^2}{M^2} J^2 + K^*(J, W, \varphi_2, h), \qquad K^* = 0(J^{5/2})$$

где функция K^* — 2π-периодическая функция по переменным W и φ^2 и аналитическая по всем переменным в области (c_j — действительные числа)

$$0 < c_1 \leqslant J \leqslant c_2, \quad |h| < c_3, \quad |\operatorname{Im} W, \varphi_2| < c_4$$

Так как $\partial^2 (K - K^*) / \partial J^2 \neq 0$, то, согласно [2], отсюда следует устойчивость положения равновесия $q_i = p_i = 0$.

3. Трудность исследования устойчивости в случае непростых элементарных делителей математически состоит в том, что даже в первом приближении переменные, соответствующие разным степеням свободы, не разделяются. Поэтому и не удается свести исследование устойчивости к изучению системы с одной степенью свободы, как в более простом случае линейных элементарных делителей определяющей матрицы. Весьма интересно также, что в отличие от предыдущего случая и от всех исследуемых случаев устойчивости системы с двумя степенями свободы линейная задача неустойчива из-за наличия в общем решении слагаемых вида $t \sin \omega t$. Учет же нелинейных членов в уравнениях движения может привести как к устойчивости, так и к неустойчивости полной системы [12].

Пусть функция Гамильтона задачи представлена в виде (3.1)

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega (q_1 p_2 - q_2 p_1) + \sum_{\nu=3}^{\infty} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{\nu_3} p_2^{\nu_4} \tag{3.1}$$

Применяя преобразование Биркгофа, форму H_3 в (3.1) опять можно уничтожить полностью, а форму H_4 упростить. После еще более громоздких выкладок, чем в первом случае, функцию Гамильтона (3.1) можно привести к виду

$$\begin{gathered}
H = {}^1/_2 (q_1^2 + q_2^2) + \omega (q_1 p_2 - q_2 p_1) + \\
+ (p_1^2 + p_2^2) [A (p_1^2 + p_2^2) + B (q_1 p_2 - q_2 p_1) + \\
+ C (q_1^2 + q_2^2)] + H_5 + \ldots
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$A = {}^1/_4 k_{2002}, \quad B = -{}^1/_4 (l_{2011} + l_{1102})$$

$$C = -{}^1/_4 (2c_{20} + c_{11} + 2c_{02})$$

$$k_{2002} = x_{2002} + 3 (u_{9,10} - u_{10,9}) + 2 (u_{2,3} - u_{3,2}) + u_{3,6} - u_{6,3}$$

$$l_{2011} = y_{2011} - 6v_{10,8} - 4v_{3,1} + 2v_{6,2} + 2v_{9,9} + v_{2,2} - v_{5,3}$$

$$l_{1102} = y_{2011} - 6v_{8,10} - 4v_{1,3} + 2v_{2,6} + 2v_{9,9} + v_{2,2} - v_{3,5}$$

$$c_{20} = x_{2020} - 9u_{10,7} + 4u_{8,1} + u_{1,6} + u_{9,8} - u_{5,2} - u_{4,3}$$

$$c_{11} = x_{1111} + 4 (u_{9,8} - u_{8,9} + u_{4,3} - u_{3,4}) + 2 (u_{6,5} - u_{5,6} + u_{2,1} - u_{1,2})$$

$$c_{02} = x_{2020} + 9u_{7,10} - 4u_{1,6} - u_{6,1} - u_{8,9} + u_{2,5} + u_{3,4}$$

$$x_{2002} = {}^1/_2 (3h_{0040} + h_{0022} + 3h_{0004})$$

$$y_{2011} = {}^1/_4 (-h_{1021} - 3h_{1003} + 3h_{0130} + h_{0112})$$

$$x_{2020} = {}^1/_4 (h_{2020} - h_{2002} + h_{1111} - h_{0220} + h_{0202})$$

$$x_{1111} = - (h_{2020} + h_{2002} + h_{0220} + h_{0202})$$

$$u_{i,j} = e_i x_j + f_i y_j, \quad v_{i,j} = e_i y_j - f_i x_j \qquad (i, j = 1, \ldots, 10), \ \Omega = \omega^{-1}$$

$$e_1 = \Omega y_1 + \Omega^2 x_2 - 2\Omega^3 y_3, \qquad f_1 = -\Omega x_1 + \Omega^2 y_2 + 2\Omega^3 x_3$$

$$e_2 = \Omega y_2 + 2\Omega^2 x_3, \qquad f_2 = -\Omega x_2 + 2\Omega^2 y_3$$

$$e_3 = \Omega y_3, \qquad f_3 = -\Omega x_3$$

$$e_4 = \Omega y_4 - \Omega^2 (x_1 - x_5) + 2\Omega^3 (y_2 - y_6) + 6\Omega^4 x_3, \qquad f_4 = -\Omega x_4 - \Omega^2 (y_1 - y_5) - 2\Omega^3 (x_2 - x_6) + 6\Omega^4 y_3$$

$$e_5 = \Omega y_5 - \Omega^2 (x_2 - 2x_6) + 4\Omega^3 y_3, \qquad f_5 = -\Omega x_5 - \Omega^2 (y_2 - 2y_6) - 4\Omega^3 x_3$$

$$e_6 = \Omega y_6 - \Omega^2 x_3, \qquad f_6 = -\Omega x_6 - \Omega^2 y_3$$

$$e_7 = {}^1/_3 \Omega y_7 + {}^1/_9 \Omega^2 x_8 - {}^2/_{27} \Omega^3 y_9 - {}^2/_{27} \Omega^4 x_{10}, \qquad f_7 = -{}^1/_3 \Omega x_7 + {}^1/_9 \Omega^2 y_8 + {}^2/_{27} \Omega^3 x_9 - {}^2/_{27} \Omega^4 y_{10}$$

$$e_8 = {}^1/_3 \Omega y_8 + {}^2/_9 \Omega^2 x_9 - {}^2/_9 \Omega^3 y_{10}, \qquad f_8 = -{}^1/_3 \Omega x_8 + {}^2/_9 \Omega^2 y_9 + {}^2/_9 \Omega^3 x_{10}$$

$$e_9 = {}^1/_3 \Omega y_9 + {}^1/_3 \Omega^2 x_{10}, \qquad f_9 = -{}^1/_3 \Omega x_9 + {}^1/_3 \Omega^2 y_{10}$$

$$e_{10} = {}^1/_3 \Omega y_{10}, \qquad f_{10} = -{}^1/_3 \Omega x_{10}$$

$$x_i = x_i^* / 2\sqrt{2}, \quad y_i = y_i^* / 2\sqrt{2} \quad (i = 1, \ldots, 10)$$

$$x_1^* = -h_{2010} - h_{1101} + h_{0210}, \qquad y_1^* = h_{2001} - h_{1110} - h_{0201}$$

$$x_2^* = -2h_{1020} - 2h_{1002}, \qquad y_2^* = -2h_{0120} - 2h_{0102}$$

$$x_3^* = -3h_{0030} - h_{0012}, \qquad y_3^* = -h_{0021} - 3h_{0003}$$

$$x_4^* = 3h_{3000} + h_{1200}, \qquad y_4^* = h_{2100} + 3h_{0300}$$

$$x_5^* = 2h_{2010} + 2h_{0210}, \qquad y_5^* = 2h_{2001} + 2h_{0201}$$

$$x_6^* = h_{1020} - h_{1002} + h_{0111}, \qquad y_6^* = h_{1011} - h_{0120} + h_{0102}$$

$$x_7^* = h_{3000} - h_{1200}, \qquad y_7^* = h_{2100} - h_{0300}$$

$$x_8^* = h_{2010} - h_{1101} - h_{0210}, \qquad y_8^* = h_{2001} + h_{1110} - h_{0201}$$

$$x_9^* = h_{1020} - h_{1002} - h_{0111}, \qquad y_9^* = h_{1011} + h_{0120} - h_{0102}$$

$$x_{10}^* = h_{0030} - h_{0012}, \qquad y_{10}^* = h_{0021} - h_{0003}$$

Теорема 3.1. Если $A > 0$, то положение равновесия формально устойчиво. Если $A < 0$, то положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.

Для доказательства формальной устойчивости заметим, что при помощи бесконечного числа шагов преобразования Биркгофа (возможно расходящегося) функцию Гамильтона (3.2) можно привести к виду

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \omega (q_1 p_2 - q_2 p_1) + (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)] + \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3}^{\infty} h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} (q_1^2 + q_2^2)^{\alpha_1} (p_1^2 + p_2^2)^{\alpha_2} (q_1 p_2 - q_2 p_1)^{\alpha_3} \tag{3.3}$$

Каноническая система с гамильтонианом (3.3) имеет два формальных интеграла $H = \text{const}$ и $(q_1 p_2 - q_2 p_1) = \text{const}$. Следовательно, выражение $G \equiv H - \omega (q_1 p_2 - q_2 p_1)$ также будет формальным интегралом системы с гамильтонианом (3.3). А так как при $A > 0$ в разложении

$$G = G_2 + G_4 + G_6 + \ldots + G_{2m} + \ldots$$

функция

$$G_2 + G_4 = {}^1/_2 (q_1^2 + q_2^2) + (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)]$$

будет определенно-положительной функцией своих переменных q_1, q_2, p_1, p_2, то, согласно определению [13], отсюда следует формальная устойчивость положения равновесия.

Для доказательства неустойчивости воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости [1]. За функцию Ляпунова возьмем знакопеременную функцию

$$V = q_1 p_1 + q_2 p_2$$

Производная функции V, составленная в силу уравнений движения с гамильтонианом (3.2)

$$dV / dt = -(q_1^2 + q_2^2) + 4A\,(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2B\,(q_1 p_2 - q_2 p_1)\times \times(p_1^2 + p_2^2) + O\left((q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2)^{5/2}\right)$$

при $A < 0$ будет определенно-отрицательной функцией своих переменных. Функция V удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости. Таким образом, теорема (3.1) полностью доказана.

В заключение автор благодарит А. П. Маркеева за ценные советы и обсуждение полученных результатов.

Поступила 6 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.— Л. Изд-во АН СССР, 1956.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6.
3. *Moser J.* Lectures on Hamiltonian systems. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, No. 81, p. 1. (Рус. перев.: Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.)
4. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1966.
6. *Roels J.*, *Louterman G.* Normalisation des systèmes linéaires canoniques et application au problème restreint des trois corps. Celest. Mech., 1970, vol. 3, No. 1, p. 129.
7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
8. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
9. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Изд. 3. М., «Наука», 1965.
10. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
11. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Механика, М., «Наука», 1973.
12. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1954.
13. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems.— Common Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.