Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

О ПРИВЕДЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ АНАЛИТИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Рассматривается задача о приведении системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n в окрестности простой особой точки к нормальной форме при наличии или отсутствии резонансов. Показано, что такое приведение возможно в классе аналитических преобразований, если исходная система допускает аналитическую группу симметрии определенной размерности.

Рассмотрим вещественную автономную систему порядка n

$$x^{\cdot} = f(x), \qquad f(0) = 0 \tag{1}$$

Предполагается, что вектор-функция $f(x)$ аналитична в окрестности точки $x = 0$, среди собственных значений λ_k линейной части нет кратных, существует лишь конечное число m линейно-независимых формальных операторов

$$X = \sum \xi_i(x)\, \partial/\partial x_i \not\equiv \mu L$$

($\xi_i(x)$ — формальные степенные ряды), коммутирующих с оператором $L = \Sigma f_i(x)\partial / \partial x_i$ сдвига по траекториям системы (1) $[L, X] = 0$.

Системе (1) ставится в соответствие максимальная конечномерная группа G аналитических преобразований окрестности точки $x = 0$, сохраняющих эту систему — аналитическая группа симметрии (ср. [1]) (элементы алгебры $\mathbf{L}$ группы G — аналитические инфинитезимальные операторы).

Пусть l — число независимых резонансных соотношений $\lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_n k_n = 0$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1,\ k_i \geqslant 0)$.

Теорема. Для приводимости системы (1) в окрестности точки $x = 0$ к нормальной форме аналитическим преобразованием достаточно, а при $l = 0.1$ и необходимо выполнение условия $\dim G = m$.

Доказательство. Пусть φ — обратимое преобразование, приводящее систему (1) к нормальной форме

$$y_i^{\cdot} = y_i p_i, \qquad i \leqslant n \tag{2}$$

Легко проверить, что система (2) допускает группу с операторами

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{3}$$

в которых при $l \neq 0$ постоянные α_i связаны независимыми соотношениями вида

$$\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = 0 \tag{4}$$

где целые $k_i \geqslant 0$, $\Sigma k_i > 0$. При $l = 0$ необходимо лишь $\alpha_i \neq \mu\lambda_i$.

Достаточность. Пусть $\dim G = m$. Тогда аналитичны все операторы $X \in \mathbf{L}$. Аналитичны, следовательно, и соответствующие уравнения Ли

(5) $$dx_i' \,/\, d\tau = \xi_i(x')$$

где τ — канонический групповой параметр. Найдутся далее такие постоянные $c_1, \ldots, c_{m+1}$, что уравнение (5), отвечающее оператору

$$X = c_1X_1 + \ldots + c_mX_m + c_{m+1}L$$

приводится преобразованием φ к виду

$$dy_i' = \alpha_i y_i'$$

На числа α_i можно наложить при этом, кроме условий (4), еще $n - l - 1$ условий того же типа. Получим тождественно резонансную систему (6), не имеющую малых знаменателей. Но тогда, согласно [2], преобразование φ аналитично.

Необходимость. Пусть преобразование φ аналитично. Если $l = 0$, то в уравнениях (2) $p_i \equiv \lambda_i$ [3, 4]. В этом случае система (2) не допускает аналитических первых интегралов. Поэтому система определяющих уравнений

$$\sum_{i=1} \lambda_i y_i \frac{\partial \eta_j}{\partial y_i} = \lambda_j \eta_j$$

имеет лишь те аналитические решения, которые отвечают операторам (3). При $l = 1$ функции p_i содержат конечное число членов, а базис алгебры, отвечающей группе симметрии системы (2), — лишь (коммутирующие) операторы (3); [5]. Таким образом, при $l = 0, 1$ система (2) аналитична и $m = n - 1$.

Преобразование φ^{-1} превращает каждый оператор Y в некоторый оператор X, коммутирующий с L. Если φ — сходящееся преобразование, то φ^{-1} также сходится. Поскольку все операторы Y аналитичны, то соответствующие операторы X необходимо аналитические. По теореме Ли алгебре $\boldsymbol{L}$ отвечает аналитическая группа симметрии той же размерности: $\dim G = m$.

Теорема доказана.

Из нее вытекает несколько очевидных следствий.

Следствие 1. Для локальной аналитической эквивалентности двух систем вида (1) с группами G и G' необходимо:

а) чтобы системы были формально эквивалентны, т. е. совпадали их конечномерные инварианты (ср. [6]);

б) группы G и G' были локально изоморфны; достаточно, чтобы при выполнении условий а), б), $\dim\, G = m$.

Следствие 2. При $l = 0, 1$ система (1) приводится к нормальной форме аналитическим преобразованием тогда и только тогда, если группа G коммутативна и $\dim G = n - 1$.

Следствие 3. При $l - 1$ все аналитические нормальные формы, полученные из данной системы (1) формальными преобразованиями, аналитически эквивалентны.

Замечания. 1) Вопрос о приведении систем дифференциальных уравнений к нормальной форме исследовался во многих работах, наиболее полно — в работе [4]. Сформулированный в предлагаемой заметке теоретико-групповой критерий представляет, с точки зрения автора, некоторый принципиальный интерес и то практическое преимущество, что задача разыскания аналитической алгебры L линейна. Кроме того, если при $l = 0$ выполнены условия Зигеля [3] $| \Sigma k_i \lambda_i - \lambda_j | > a k^{-\nu}$, то все особые интегральные поверхности и кривые системы (1) описываются аналитическими уравнениями (в компонентах операторов X) внутри области, в которую операторы X можно аналитически продолжить из окрестности точки $x = 0$, где они аналитичны в силу доказанной теоремы. Эти интегральные многообразия можно приближенно найти.

2) В этой работе рассматривались лишь системы, имеющие конечномерную формальную алгебру операторов. Такие системы заведомо не могут допускать формальных первых интегралов и в этом смысле являются невырожденными. Поэтому вещественные системы с аналитической группой симметрии оказываются вне действия теоремы III работы [4].

3) Хотя в гамильтоновых системах положение несколько иное, доказанная в этой работе теорема указывает на определенное сходство с ситуацией, устанавливаемой результатом Рюссмана [7], согласно которому существование дополнительного аналитического интеграла гарантирует сходимость преобразования Биркгофа (такому интегралу в системе с двумя степенями свободы отвечает аналитическая однопараметрическая группа симметрии).

Поступила 24 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шноль Э. Э.* О группах, соответствующих простейшим задачам классической механики. Теорет. и матем. физ., 1972, т. 11, вып. 3.
2. *Плисс В. А.* О приведении аналитической системы дифференциальных уравнений к нормальной форме. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1—2.
3. *Зигель К. Л.* О нормальной форме аналитических дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. Сб. перев. Сер. матем., 1961, т. 5, вып. 2.
4. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25; 1972, т. 26.
5. *Мархашов Л. М.* Инварианты многомерных систем с одним резонансным соотношением. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
6. *Мархашов Л. М.* Аналитическая эквивалентность систем второго порядка при произвольном резонансе. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
7. *Rüssman H.* Über das Verhalten analytischer Hamiltonischer Differenzialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Math. Ann., 1964, Bd 169, S. 285—300.