Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОЙ ВЫПУКЛОСТИ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СИНТЕЗА

П. Б. Гусятников

(Москва)

Приводятся условия, достаточные для завершения преследования по принципу независящей от времени обратной связи, работа примыкает к исследованиям [1–7].

1. Пусть линейная задача преследования в n-мерном евклидовом пространстве R описывается

а) линейным векторным дифференциальным уравнением

$$dz / dt = Cz - u + v \tag{1.1}$$

где C — постоянная квадратная матрица порядка n, $u = u(t) \in P$ и $v = v(t) \in Q$ — измеримые при $t \geqslant 0$ вектор-функции, называемые управлениями игроков (соответственно догоняющего и убегающего); $P \subset R$ и $Q \subset R$ — выпуклые компакты;

б) терминальным множеством M, представимым в виде $M = M_0 + W_0$, где M_0 — линейное подпространство пространства R, W_0 — некоторое компактное выпуклое множество в подпространстве L, являющемся ортогональным дополнением в R к M_0.

Обозначим через π оператор ортогонального проектирования на L; размерность L обозначим через ν, а единичную сферу в L — через K. Будем предполагать, что $\nu \geqslant 2$. Матрицу e^{tC} обозначим через $\Phi(t)$.

Всякое решение $z(t)$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ в смысле Каратеодори [1] уравнения (1.1) с начальным значением $z(T_1) = z_0$ будем называть движением и обозначать $z(t) = z(t;\ T_1, z_0, u, v, T_2)$.

Цель догоняющего состоит в приведении точки z на множество M, убегающий старается помешать этому. Будем говорить, что преследование может быть закончено из точки z_0 за время $t(z_0)$, если существует такая (называемая «синтезом») вектор-функция $u(z) \in P$, определенная на всем пространстве R, что, каково бы ни было управление $v(t)$ убегающего, догоняющий, применяя в каждый момент времени управление $u(z(t))$, может обеспечить попадание точки z на множество M за время, не превосходящее числа $t(z_0)$.

Отметим, что решение задачи преследования с помощью синтеза $u(z, t)$, зависящего от времени, имеется в ряде работ (см., например, [2, 3]).

2. Будем предполагать, что для задачи (1.1) выполнены условия 1—3 работ [6,7], обозначения которых сохраним и в данной статье. Под леммами 1 и 2 будем понимать соответствующие леммы работы [7]. В [3] доказана следующая лемма.

Лемма 3. Функция $T(z)$ полунепрерывна снизу на R.

Легко проверяется, что $(z, T(z)) \in D$ для любого z такого, что $0 < T(z) < +\infty$.

Условие 4. Пусть $z \in R$, такова, что $0 < T = T(z) < +\infty$ и

$$\frac{\partial \lambda(z, T)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \lambda(z, T)}{\partial t^2} = 0$$

Тогда функция $\partial^2 \lambda(z, t) / \partial t^2$ дифференцируема в точке $(z, T(z))$, причем

(2.1) $\quad \partial^3 \lambda(z, T) / \partial t^3 > 0$

(2.2) $\quad \dfrac{\partial^3 \lambda(z, T)}{\partial t^3} - \left(\left|\dfrac{\partial^3 \lambda(z, T)}{\partial z \partial t^2} \cdot G(z, T)\right|\right) > 0$

Замечание. Если в соотношениях (2.1), (2.2) знак строгого неравенства заменить на знак нестрогого неравенства, то соотношения эти перейдут в необходимые условия оптимальности [6,7] времени $T(z)$.

Пусть $z \in R$, $0 < T(z) < +\infty$.

Определим функцию $\varphi(z) \in K$ следующим образом: $\varphi(z) = \psi(z, T(z))$, т. е. (см. [6,7]) в качестве $\varphi(z)$ возьмем вектор, входящий в соотношение

$$\pi \Phi(T(z)) z = W(T(z), \varphi(z))$$

и положим $u(z) = u\, T(z), \varphi(z)$. Если же $T(z) = 0$ или $T(z) = +\infty$, полагаем $u(z) = u^*$, где u^* — некоторый фиксированный вектор из P.

3. Рассмотрим теперь векторное дифференциальное уравнение (уравнение синтеза)

(3.1) $\quad dz / dt = Cz - u(z) + v_0(t)$

где $v_0(t)$ — произвольное управление убегающего.

Решением уравнения (3.1) назовем всякую абсолютно непрерывную функцию $z(t)$, удовлетворяющую этому уравнению для почти всех значений t (решение в смысле Каратеодори [1]).

Теорема. Пусть для задачи (1.1) выполнены условия 1—4. Пусть $z_0 \in R$, $0 < T_0 = T(z_0) < +\infty$. Тогда, каково бы ни было управление $v_0(t)$ убегающего, решение $z(t)$ уравнения (3.1) с начальным значением $z(0) = z_0$ существует на некотором отрезке $[0, \delta]$, зависящем от управления $v_0(t)$ таком, что $\delta \leqslant T(z_0)$ и $z(\delta) \in M$. Таким образом, из точки z_0 возможно закончить преследование за время $T(z_0)$.

Доказательство теоремы проведем раздельно для трех случаев.

1°. Пусть $\partial \lambda(z_0, T_0) / \partial t > 0$. Тогда (см. [7]) в некоторой окрестности точки z_0 функции $T(z)$ и $\varphi(z)$ непрерывно дифференцируемы и, следовательно (см. условие 1), найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для любого управления $v_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \delta_1$ решение $z(t)$ уравнения (3.1) $(z(0) = z_0)$ существует, единственно и

$$dT(z(t)) / dt \leqslant -1$$

почти всюду на $[0, \delta_1]$. Так что для любых t_1 и t_2, таких, что $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \delta_1$, выполнено неравенство

$$0 < T(z(t_2)) \leqslant T(z(t_1)) - (t_2 - t_1) < +\infty \tag{3.2}$$

2°. Пусть $\partial\lambda(z_0, T_0) / \partial t = 0$, $\partial^2\lambda(z_0, T_0) / \partial t^2 < 0$.
Покажем, что, каково бы ни было управление $v_0(t)$ убегающего, найдется такое $\delta_1 > 0$, зависящее от этого управления, что на отрезке $[0, \delta_1]$ существует (но не обязательно единственное) решение $z(t)$ уравнения (3.1) ($z(0) = z_0$), удовлетворяющее соотношению (3.2).

Выберем $\Delta > 0$ настолько малым, чтобы для любого движения $z(t; 0, z_0, u, v, \Delta)$ выполнялось неравенство $T(z(t)) \geqslant {}^1/_2 T_0$, $0 \leqslant t \leqslant \Delta$. Это возможно в силу леммы 3. При этом можно считать, что

$$\Delta \leqslant \delta^* = \min \delta(t), \quad {}^1/_2 T_0 \leqslant t \leqslant T_0$$

где $\delta(t)$ — непрерывная положительная функция, даваемая леммой 2 в [6].

Пусть m — произвольное натуральное число. Вектор-функцию $z_m(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \Delta$ определим по индукции следующим образом: $z_m(0) = z_0$, а на каждом из отрезков $[\beta_m^k, \beta_m^{k+1})$; $0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1$, $\beta_m^k = 2^{-m} k\Delta$ полагаем

$$z_m(t) = z(t; \beta_m^k, z_m(\beta_m^k), u_m, v_0, \beta_m^{k+1})$$
$$u_m(t) \equiv u_m^k(t) = u(T(z_m(\beta_m^k)) - (t - \beta_m^k), \varphi(z_m(\beta_m^k)));$$
$$\beta_m^k \leqslant t < \beta_m^{k+1}$$

где v_0 — управление $v_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \Delta$.

Поскольку $\Delta \leqslant \delta^*$, то в соответствии с альтернативой работы [6]

$$T(z_m(t)) \leqslant T(z_m(\beta_m^k)) - (t - \beta_m^k), \quad t \in [\beta_m^k, \beta_m^{k+1}]. \tag{3.3}$$

Множество движений компактно [2]. Поэтому существуют подпоследовательность $z_i^*(t) = z_{m_i}(t)$ и управление $u_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \Delta$ такие, что на отрезке $[0, \Delta]$

$$z_i^*(t) \rightrightarrows z(t; 0, z_0, u_0, v_0, \Delta) = z(t)$$

(здесь $\rightrightarrows$ — символ равномерной сходимости). При этом [1] для любого $t \in [0, \Delta]$ и для любой последовательности $\{t_i\}_{i=1}^\infty \subset [0, \Delta]$, сходящейся к t

$$\lim_{i\to\infty} z_i^*(t_i) = z(t) \tag{3.4}$$

Обозначим через N множество всех последовательностей двоично-рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Можно доказать, что найдется такое $\delta_1 \in (0, \Delta]$, что для любого $\tau \in [0, \delta_1]$ и для любой последовательности $\{\alpha_i\}$ из N, сходящейся к τ / Δ, имеет место

$$\lim_{i\to\infty} T(z_i^*(\alpha_i\Delta)) = T(z(\tau)) \tag{3.5}$$

Обозначим через $\theta(\tau)$

$$\theta(\tau) = \sup \overline{\lim_{i\to\infty}} T(z_i^*(\alpha_i\Delta))$$

(sup в правой части берется по всем сходящимся к τ / Δ последовательностям $\{\alpha_i\}$ из N), тогда равенство (3.5) эквивалентно равенству (см. лемму 3)

$$\theta(\tau) = T(z(\tau))$$

для всех $\tau \in [0, \delta_1]$. Его и будем доказывать.

Из (3.3) следует, что для любого двоично-рационального $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$T(z_i^*(\alpha\Delta)) \leqslant T_0 - \alpha\Delta$$

для всех i, откуда немедленно

$$\theta(\tau) \leqslant T_0 - \tau \tag{3.6}$$

Далее, поскольку $\lambda(z_i^*(\alpha_i\Delta), t) < 0$, $0 \leqslant t < T(z_i^*(\alpha_i\Delta))$ и $\lambda(z_i^*(\alpha_i\Delta), T(z_i^*(\alpha_i\Delta))) = 0$, то (см. (3.4))

$$\lambda(z(\tau), t) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} T(z_i^*(\alpha_i\Delta))$$

$$\lambda(z(\tau), \varlimsup_{i\to\infty} T(z_i^*(\alpha_i\Delta))) = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda(z(\tau), t) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \theta(\tau), \quad \lambda(z(\tau), \theta(\tau)) = 0 \tag{3.7}$$

Поэтому, если $T(z(\tau)) < \theta(\tau)$, то необходимо

$$\frac{\partial}{\partial t}\lambda(z(\tau), T(z(\tau))) = 0 \tag{3.8}$$

Если теперь предположить, что существует последовательность

$$\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0, \Delta], \ \lim_{i\to\infty} \tau_i = 0 \text{ такая, что } T_i = T(z(\tau_i)) < \theta(\tau_i) = \theta_i,$$

получим, пользуясь неравенством (3.6) и полунепрерывностью $T(z)$ снизу

$$T_0 \leqslant \lim T_i \leqslant \varlimsup T_i \leqslant \varlimsup \theta_i \leqslant T_0$$

В связи с этим (лемма 2) для всех достаточно больших i на отрезке $[T_i, \theta_i]$ существует непрерывная вторая производная функции $\lambda(z(\tau_i), t)$. В силу (3.7), (3.8) найдется тогда $\xi_i \in [T_i, \theta_i]$ такое, что

$$\partial^2\lambda(z(\tau_i), \xi_i) / \partial t^2 = 0 \tag{3.9}$$

Имеем

$$T_0 \leqslant \varliminf T_i \leqslant \varliminf \xi_i \leqslant \varlimsup \xi_i \leqslant \lim \theta_i \leqslant T_0$$

Отсюда, в силу непрерывности вторых производных функции $\lambda(z, t)$ в точке (z_0, T_0) и равенства (3.9), получаем

$$0 = \lim_{i\to\infty} \partial^2\lambda(z(\tau_i), \xi_i) / \partial t^2 = \partial^2\lambda(z_0, T_0) / \partial t^2$$

Противоречие. Равенство (3.5) доказано.

Поскольку для любой последовательности $\{\alpha_i\}$ из N, сходящейся к $\tau / \Delta \in [0, \delta / \Delta]$, выполнено соотношение

$$\varphi(z_i^*(\alpha_i\Delta)) = \psi(z_i^*(\alpha_i\Delta), T(z_i^*(\alpha_i\Delta)))$$

получим, пользуясь леммой 1 и соотношениями (3.4), (3.5)

$$\varphi(z(\tau)) = \psi(z(\tau), T(z(\tau))) = \lim_{i\to\infty} \varphi(z_i^*(\alpha_i\Delta)) \tag{3.10}$$

Можно показать, что всюду на $[0, \delta_1]$

$$\lim_{i\to\infty} u_{m_i}(\tau) = u(T(z(\tau)), \varphi(z(\tau))) = u(z(\tau)) \tag{3.11}$$

В самом деле, пусть $\tau \in [0, \delta_1]$ и последовательность $\alpha_i = \beta_{m_i}^{k_i}$ такова, что

$$\beta_{m_i}^{k_i} \leqslant \tau < \beta_{m_i}^{k_i+1}$$

Тогда, по определению функции u_m

$$u_{m_i}(\tau) = u\left(T\left(z_i^*\left(\alpha_i\Delta\right)\right) - \left(\tau - \alpha_i\Delta\right),\ \varphi\left(z_i^*\left(\alpha_i\Delta\right)\right)\right)$$

Поскольку $\alpha_i\Delta \to \tau$, то из формул (3.5), (3.10) и условия 1 (непрерывность $u(r, \varphi)$) получаем (3.11).

По теореме Лебега имеем поэтому для любого $t \in [0, \delta_1]$

$$z(t) = \lim_{i\to\infty} z_i^*(t) = z_0 + \lim_{i\to\infty}\int_0^t \{Cz_i^*(\tau) - u_{m_i}(\tau) + v_0(\tau)\}\,d\tau =$$

$$= z_0 + \int_0^t \{Cz(\tau) - u(z(\tau)) + v_0(\tau)\}\,d\tau$$

и, следовательно, почти всюду на $[0, \delta_1]$

$$dz(t)\,/\,dt = Cz(t) - u(z(t)) + v_0(t)$$

т. е. $z(t)$ — решение уравнения (3.1) и $z(0) = z_0$.

Из неравенства (3.3) непосредственно следует, что для любых двоично-рациональных $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $0 \leqslant \alpha^{(1)} \leqslant \alpha^{(2)} \leqslant 1$ имеет место неравенство

$$T\left(z_i^*\left(\alpha^{(2)}\Delta\right)\right) \leqslant T\left(z_i^*\left(\alpha^{(1)}\Delta\right)\right) - \left(\alpha^{(2)}\Delta - \alpha^{(1)}\Delta\right)$$

для всех достаточно больших i. Выбирая последовательности $\{\alpha_i^{(1)}\}$ и $\{\alpha_i^{(2)}\}$ из N, сходящиеся соответственно к $t_1\,/\,\Delta$ и $t_2\,/\,\Delta$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \delta_1$, получим, пользуясь (3.5), соотношение (3.2).

3°. Пусть $\partial\lambda(z_0, T_0)\,/\,\partial t = \partial^2\lambda(z_0, T_0)\,/\,\partial t^2 = 0$. Можно доказать, что для любого управления $v_0(t)$ убегающего найдется такое $\delta_1 > 0$, что на отрезке $[0, \delta_1]$ существует решение $z(t)$ уравнения (3.1) ($z(0) = z_0$), удовлетворяющее соотношению (3.2).

Можно проверить, что в этом случае все рассуждения для второго случая можно дословно повторить вплоть до предположения о невыполнении равенства (3.5) и вытекающего из этого предположения равенства (3.9). Более того, как только соотношение (3.5) доказано, можно дословно повторить и все идущие вслед за его доказательством рассуждения, включая получение неравенства (3.2). Таким образом, остается лишь показать, что равенство (3.9) приводит к противоречию.

Поскольку $\xi_i \to T_0$ при $i \to \infty$, то в соответствии с условием 4

$$0 = \frac{\partial^2\lambda(z(\tau_i), \xi_i)}{\partial t^2} = A(\xi_i - T_0) + (B[z(\tau_i) - z_0]) + \beta_i \tag{3.12}$$

где A — число $\partial^3\lambda(z_0, T_0)\,/\,\partial t^3$, B — вектор $\partial^3\lambda(z_0, T_0)\,/\,\partial z\partial t^2$ и $\beta_i\left((\xi_i - T_0)^2 + |z(\tau_i) - z_0|^2\right)^{-1/2} \to 0$, $i \to \infty$.

Разделим (3.12) на $(\xi_i - T_0)$ и перейдем к пределу по i. Получим

$$0 = A + \lim_{i\to\infty}\left(B\,\frac{z(\tau_i) - z_0}{\tau_i}\right)\frac{\tau_i}{\xi_i - T_0} + \lim\frac{\beta_i}{\xi_i - T_0} \tag{3.13}$$

Замечая, что (см. (3.6))

$$0 < \frac{\tau_i}{T_0 - \xi_i} \leqslant 1 \tag{3.14}$$

и что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\,\frac{|z(\tau_i) - z_0|}{\tau_i} \leqslant |Cz_0| + \max_{u\in p,\, v\in Q}(|u| + |v|) \tag{3.15}$$

имеем

$$\frac{\beta_i}{\xi_i - T_0} = -\frac{\beta_i}{((\xi_i - T_0)^2 + |z(\tau_i) - z_0|^2)^{1/2}} \left\{1 + \left|\frac{z(\tau_i) - z_0}{\tau_i}\right|^2 \left(\frac{\tau_i}{T_0 - \xi_i}\right)^2\right\}^{1/2} \to 0$$

Остается найти предел второго слагаемого в (3.13).

Последовательность $z_i^*(t)$ равномерно на $[0, \Delta]$ сходится к $z(t)$, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность (сохраним для нее то же обозначение, ибо в качестве $z_i^*(t)$ можно было с самого начала брать именно эту подпоследовательность) такую, что

$$|z(t) - z_i^*(t)| \leqslant \tau_i^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \Delta$$

Тогда очевидно

$$\lim_{i\to\infty} \frac{z(\tau_i) - z_0}{\tau_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{z_i^*(\tau_i) - z_0}{\tau_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} \{Cz_i^*(t) - u_{m_i}(t) + v_0(t)\}\, dt$$

В силу (3.4)

$$\frac{1}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} Cz_i^*(t)\, dt \to Cz_0$$

Далее, поскольку (см. (3.3)) $T(z_i^*(t)) \leqslant T_0 - t$, $t \in [0, \tau_i]$, то на основании полунепрерывности снизу функции $T(z)$

$$\lim_{i\to\infty} \max_{t\in[0,\tau_i]} |T(z_i^*(t)) - T_0| = 0$$

и, следовательно (см. (3.10), (3.11))

$$\lim_{i\to\infty} \max_{t\in[0,\tau_i]} |u_m(t) - u(z_0)| = 0$$

Поскольку

$$\frac{1}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} v_0(t)\, dt = v_i \in Q$$

(множество Q — выпуклый компакт), то без ограничения общности (выбирая, если нужно, из $\{\tau_i\}$ подпоследовательность и именно ее снова обозначая $\{\tau_i\}$) можно считать, что $v_i \to v^* \in Q$, $i \to \infty$. Так что

(3.16) $$\frac{z(\tau_i) - z_0}{\tau_i} \to Cz_0 - u(z_0) + v^*$$

Если $v^* = v(T_0, \varphi(z_0))$, то, воспользовавшись (3.14) и переходя, если это нужно еще раз к подпоследовательности, можно считать, что

$$\frac{\tau_i}{T_0 - \xi_i} \to \alpha^* \in [0, 1], \quad i \to \infty$$

и, следовательно (см. (3.13))

$$0 = A - \alpha^* (B \cdot G(z_0 T(z_0))) = (1 - \alpha^*) A + \alpha^* (A - (B \cdot G(z_0 T_0))) > 0$$

Противоречие.

Если же $v^* \neq v(T(z_0), \varphi(z_0))$, то, пользуясь тем, что $\theta_i \to T_0$, получим (в соответствии с предположением $\partial\lambda(z_0 T_0) / \partial t = 0$)

(3.17) $$0 = \lambda(z(\tau_i), \theta_i) = (F \cdot [z(\tau_i) - z_0]) + \varepsilon_i$$
$$\varepsilon_i ((\theta_i - T_0)^2 + |z(\tau_i) - z_0|^2)^{-1/2} \to 0, \quad i \to \infty$$

где F — вектор $\partial\lambda(z_0, T_0) / \partial z$.

Деля (3.17) на $T_0 - \theta_i$ и замечая, что $0 < \tau_i / T_0 - \theta_i \leqslant 1$ (см. (3.6)), получим, пользуясь (3.15) и переходя, если нужно, еще раз к подпоследовательности

$$0 = (F \cdot \{Cz_0 - u(z_0) + v^*\}) \alpha_*, \quad \alpha_* = \lim_{i\to\infty} \tau_i / T_0 - \theta_i$$

Поскольку в силу леммы 2 и условия 1

$$-\left(F\cdot\{Cz_0-u(z_0)+v^*\}=\frac{\partial\lambda(z_0,T_0)}{\partial t}+(\varphi(z_0)\cdot\Phi(T_0)\{v^*-v(T_0,\varphi(z_0))\}\right)<0$$

то $\alpha_*=0$. Отсюда в соответствии с включением $\xi_i\in[T_i\theta_i]$ следует $\alpha^*=0$, следовательно, предел второго слагаемого в (3.13) равен нулю. Отсюда $A=0$. Противоречие с (2.1). Равенство (3.5) доказано.

Таким образом, как только выполнены условия теоремы, для любого управления $v_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant T_0$ найдется такое $\delta_1>0$, что на отрезке $[0,\delta_1]$ существует решение $z(t)$ уравнения (3.1) ($z(0)=z_0$), удовлетворяющее условию (3.2).

В силу полунепрерывности снизу функции $T(z)$ можно, выбирая $\delta_1>0$ достаточно малым, считать, что

(3.18) $\qquad T(z(t))>0,\qquad t\in[0,\delta_1]$

Зафиксируем $v_0(t)$, $0\leqslant t<T_0$. Определим на множестве Z всех решений $z(t)$, $0\leqslant t\leqslant\delta_1$, $z(0)=z_0$ уравнения (3.1), определенных каждое на своем отрезке $[0,\delta_1]$ и удовлетворяющих неравенствам (3.2) и (3.18), отношение порядка, полагая $z'(t)\prec z''(t)$ тогда и только тогда, когда отрезок $[0,\delta_1']$, на котором определено решение $z'(t)$, содержится в отрезке $[0,\delta_1'']$, на котором определено решение $z''(t)$ и, кроме того, $z'(t)\equiv z''(t)$, $0\leqslant t\leqslant\delta_1$.

Легко проверяется, что всякое линейно упорядоченное подмножество из Z имеет мажоранту, так что по лемме Цорна (см. [8]) в Z существует максимальный элемент $z_0(t)$, $0\leqslant t\leqslant\delta_0$.

Покажем, что $z_0(\delta_0)\in M$. В самом деле, поскольку в силу (3.2)

$$0\leqslant T(z_0(\delta_0))\leqslant T_0-\delta_0<+\infty$$

то, если $T(z_0(\delta))>0$, к точке $z_0'=z_0(\delta_0)$ применимы все рассуждения для случаев 1—3, и, следовательно, существует определенное на некотором отрезке $[\delta_0,\delta_0+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ решение $z'(t)$ уравнения (3.1) с начальным условием $z'(\delta_0)=z_0'$, удовлетворяющее неравенству (3.2) для любых $\delta_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\delta_0+\varepsilon$ и неравенству $T(z'(t))>0$, $t\in[\delta_0,\delta_0+\varepsilon]$. Если теперь

$$z(t)=\begin{cases}z_0(t), & 0\leqslant t\leqslant\delta_0\\ z'(t), & \delta_0\leqslant t\leqslant\delta_0+\varepsilon\end{cases}$$

то, очевидно, $z_0(t)\prec z(t)$, что противоречит максимальности $z_0(t)$. Теорема полностью доказана.

Отметим, что решение уравнения синтеза в общем случае неединственно. В работе [9] имеется условие [1], при котором имеет место единственность, что позволяет применить результаты доказанной теоремы к задаче преследования.

Автор благодарит К. Ф. Мищенко за руководство работой.

Поступила 1 III 1973

---

[1] Гусятников П. Б. К задаче об окончании дифференциальной игры из данной точки. Канд. диссертация. М., 1971.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51, вып. 1.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. *Пшеничный Б. Н.* Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
4. *Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
5. *Гусятников П. Б.* Об одной постановке линейных задач преследования. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 8.
6. *Гусятников П. Б.* Необходимые условия оптимальности в линейной задаче преследования. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
7. *Гусятников П. Б.* Необходимое условие оптимальности времени первого поглощения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы, т. 1. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.