Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ—УКЛОНЕНИЯ В СИСТЕМАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Н. Н. Красовский, В. М. Решетов

(Свердловск)

Рассматриваются игровые задачи сближения — уклонения для линейной управляемой системы, описываемой дифференциальными уравнениями с малым параметром при части производных [1]. На основе процедуры управления с поводырем [2,3] строится стратегия, которая обеспечивает сближение или уклонение порождаемых ею движений относительно заданного замкнутого целевого множества в пределах другого замкнутого множества фазовых состояний. В частности, рассматривается задача уклонения в течение сколь угодно большого промежутка времени. Работа опирается на формализацию дифференциальных игр, данную в работе [2]. В качестве примера рассмотрена задача об уклонении для системы, асимптотической по малому параметру к одной системе из работы [4].

1. Пусть управляемая система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = Ax + Bu + Cv \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат; u и v — $r^{(1)}$- и $r^{(2)}$-мерные векторы управляющих воздействий первого и второго игроков; A, B, C — постоянные матрицы соответствующих размерностей; управляющие воздействия первого и второго игроков стеснены условиями

$$u \in P, \quad v \in Q^{[\alpha]} \tag{1.2}$$

где P и Q — ограниченные, выпуклые множества в векторных пространствах $\{u\}$ и $\{v\}$. Символ R^α означает евклидову α-окрестность множества R, символ $R^{[\alpha]}$ — замкнутую евклидову α-окрестность R. Рассматриваемые векторы трактуются как вектор-столбцы.

Будем использовать термины стратегий, движений, ломаных Эйлера и соответствующие их обозначения в том смысле, как они определены в статье [2].

Пусть в k-мерном подпространстве $\{x\}_k$ n-мерного фазового пространства $\{x\}$ заданы некоторые замкнутые множества M и N. Будем решать следующую задачу, поставленную перед вторым игроком. Эта задача будет состоять в построении стратегии V, работающей в схеме управления с поводырем и обеспечивающей для всех движений — ломаных Эйлера $x_\Delta[t]$, порождаемых этой стратегией,— встречу

$$\{x_\Delta[\tau^*]\}_k \in M^{[\varepsilon]}, \quad \{x_\Delta[t]\}_k \in N^{[\varepsilon]} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \tau^*) \tag{1.3}$$

с окрестностью $M^{[\varepsilon]}$ в пределах окрестности $N^{[\varepsilon]}$ при любых действиях первого игрока, совместимых с ограничением (1.2). Значение τ^* в (1.3) может зависеть от движения. В частности, множество N может совпадать со всем пространством $\{x\}_k$, тогда второе условие в (1.3) выполняется автоматически. Множество M может вообще отсутствовать, тогда первое условие в (1.3) исключается, а второе должно выполняться при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, где число ϑ оговаривается по условиям задачи. В частности, при $\vartheta = \infty$ получим один из вариантов задачи об уклонении на бесконечном отрезке времени. Заметим еще, что дополнительное условие $\tau^* \leqslant \vartheta$ может быть присоединено к (1.3) и в общем случае.

Будем предполагать, что система (1.1) представима в виде

$$z^{\cdot} = A_1 z + D_1 y + B_1 u + C_1 v, \quad \mu y^{\cdot} = A_2 z + D_2 y + C_2 v \tag{1.4}$$

Здесь z — k-мерный вектор, причем пространство $\{z\}_k$ как раз совпадает с подпространством $\{x\}_k$; y — $(n-k)$-мерный вектор; $\mu > 0$ — малый параметр.

Задача тогда формулируется следующим образом. Для заданной начальной позиции $\{t_0, z_0, y_0\}$ и $\varepsilon > 0$ требуется найти способ управления с поводырем [2] V, который при достаточно малом значении параметра μ и при достаточно малом шаге разбиения $\delta = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ оси t обеспечивает для всех аппроксимирующих ломаных Эйлера $x_\Delta[t] = \{z_\Delta[t] = z_\Delta[t, t_0, z_0, y_0, V, u[\cdot]], \; y_\Delta[t] = y_\Delta[t, t_0, z_0, y_0, V, u[\cdot]]\}$ встречу

$$\{z_\Delta[\tau^*]\} \in M^{[\varepsilon]}, \quad \{z_\Delta[t]\} \in N^{[\varepsilon]} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \tau^*) \tag{1.5}$$

Подойдем к этой задаче следующим образом. Следуя [1], положим в (1.4) $\mu = 0$; предполагая определитель $|D_2^{-1}| \neq 0$, найдем из второго уравнения величину

$$y^\circ(z, v) = -D_2^{-1} A_2 z - D_2^{-1} C_2 v \tag{1.6}$$

Составим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$z^{\cdot\circ} = A_1 z^\circ + D_1 y^\circ(z^\circ, v) + B_1 u + C_1 v = A z^\circ + B u + C v \tag{1.7}$$

$$(A = A_1 - D_1 D_2^{-1} A_2, \quad B = B_1, \quad C = C_1 - D_1 D_2^{-1} C_2)$$

Следуя [2,3], сопоставим уравнению (1.7) уравнение движения поводыря

$$w^{\cdot} = A w + B u_* + C v_* \tag{1.8}$$

где управляющие воздействия u_* и v_* стесним условиями

$$u_* \in P^{[\alpha]}, \quad v_* \in Q \tag{1.9}$$

Будем дальше предполагать выполненными следующие условия.

1°. Для заданной начальной позиции $\{t_0, w_0\} = \{t_0, z_0\}$ для системы (1.8), (1.9) разрешима задача второго игрока о сближении движений $w[t]$ с M в пределах N, т. е. существует позиционная стратегия [2] $V \div v(t, w)$, которая обеспечивает встречу

$$\{w[\tau^*]\} \in M, \quad \{w[t]\} \in N \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \tau^* \leqslant \vartheta) \tag{1.10}$$

(При наличии M полагаем значение ϑ конечным, при отсутствии M может быть $\vartheta = \infty$.)

2°. Система

$$(1.11)\qquad s^{\cdot} = As - Bp(s) + Cq(s)$$

стабилизируема (см. [5], стр. 477), т. е. подходящим выбором линейных функций $p(s) = p_0's$ и $q(s) = q_0's$ (штрих означает транспонирование) систему (1.11) можно сделать асимптотически устойчивой по Ляпунову (см. [6], стр. 56).

3°. Система

$$(1.12)\qquad y^{\cdot} = D_2 y$$

является асимптотически устойчивой по Ляпунову.

В общем случае, согласно [2] при выполнении условия 1° при каком либо конечном ϑ, для системы (1.8), (1.9) существует лежащий в N v-стабильный мост W, на котором второй игрок может удержать все движения $w[t]$ вплоть до встречи с M внутри N при $\tau^* \leqslant \vartheta$. В случае отсутствия M при условии 1° (где первое включение (1.10) тогда не требуется) при $\vartheta < \infty$ и $\vartheta = \infty$ существование подходящего v-стабильного моста W, лежащего в N, следует из работы [7].

Согласно теореме Ляпунова (см. [6], стр. 79), для асимптотически устойчивой системы

$$(1.13)\qquad s^{\cdot} = As - Bp_0's + Cq_0's$$

для любой наперед выбранной определенно-отрицательной квадратичной формы $\beta(s)$ найдется определенно-положительная квадратичная форма $\lambda(s)$, для которой будет выполняться равенство

$$(1.14)\qquad \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{(1.13)} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'(As - Bp_0's + Cq_0's) = \beta(s)$$

$$\left(\beta(s) = \sum_{i,j=1}^{k}\beta_{ij}s_is_j, \quad \lambda(s) = \sum_{i,j=1}^{k}\lambda_{ij}s_is_j\right)$$

Здесь $(d\lambda / dt)_{(1.13)}$ — полная производная по времени для функции $\lambda(s)$ в силу системы (1.13).

Основной результат состоит в следующем. При выполнении условий 1°—3°, опираясь на v-стабильный мост W и на функцию $\lambda(s)$, для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно организовать такую процедуру управления с поводырем

$$V \div \{v(\tau, z, w), \quad u_*(\tau, z, w), \quad v_*(t, \tau, z, w, u_*(\cdot))\}$$

что для всех движений $z_\Delta[t] = z_\Delta[t, t_0, z_0, V, u[\cdot]]$, порожденных этой процедурой, будет выполнено условие (1.5), если только параметр μ будет достаточно мал и шаг разбиения $\delta = \sup_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ оси t также будет достаточно мал.

2. Искомая процедура V строится следующим образом. Составим еще одну вспомогательную систему

$$(2.1)\qquad z^{*\cdot} = Az^* + Bu^* + c^*$$

где управляющие воздействия u^* и c^* стеснены условиями

$$(2.2)\qquad u^* \in P, \qquad c^* \in \Gamma^*$$

В качестве множества Γ^* в (2.2) выберем строго выпуклое множество, содержащее множество $\Gamma = \{c : c = Cv, v \in Q^{[\alpha]}\}$ и аппроксимирующее его так, что для любого вектора $c^* \in \Gamma^*$ ближайший к нему вектор $c \in \Gamma$ удовлетворяет неравенству $\| c - c^* \| \leqslant \zeta$, где $\zeta > 0$ — некоторое достаточно малое число, смысл малости которого будет пояснен ниже. Кроме того, потребуем, чтобы вектор $c^{*\circ} \in \Gamma^*$, удовлетворяющий условию

$$l'c^{*\circ} = \min_{c^* \in \Gamma^*} l'c^* \tag{2.3}$$

удовлетворял условию Липшица по l. Указанный выбор множества Γ^* по Γ и $\zeta > 0$ всегда возможен.

Будем предполагать еще (уже по сути дела без ограничения общности), что отображение $c = Cv$ при $c \in \Gamma$ и $v \in Q^{[\alpha]}$ является взаимно однозначным.

Вычислим пока совсем формально полную производную по времени $d\lambda / dt$ функции $\lambda(s)$, полагая в ней $s = z^* - w$, где z^* и w — решения уравнений (2.1) и (1.8) соответственно. Получим

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)'_{s=z^*-w} (A(z^* - w) + B(u^* - u_*) + c^* - Cv_*) \tag{2.4}$$

Для какого-либо значения τ при $z^* = z^*[\tau]$ и $w = w[\tau]$ выбираем $u_*^\circ(z^*, w)$ из условия максимума

$$\max_{u_* \in P^{[\alpha]}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)' Bu_* = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)' Bu_*^\circ \tag{2.5}$$

Затем по найденному значению u_*°, полагая (пока формально), что в момент τ выполнено включение $\{\tau, w[\tau]\} \in W$, выбираем для какого-то интервала $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \delta$ функцию $v_*[t] = v_*^\circ(t, \tau, z^*, w, u_*^\circ)$ ($z^* = z^*[\tau]$, $w = w[\tau]$) из условия или удержания движения $w[t]$ (1.8) на мосту W при $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \delta$ или до встречи с M при $\tau^* < \tau + \delta$. Такой выбор управления $v_* = v_*^\circ$ возможен вследствие v-стабильности моста W (см. [2]). «Управление» $c_0^*(z^*, w)$ выбираем из условия минимума

$$\min_{c^* \in \Gamma^*} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)' c^* = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)' c_0^* \tag{2.6}$$

По выбранному $c_0^*(z^*, w)$ подбираем ближайший к нему вектор $c_0(z^*, w) \in \Gamma$, а затем по $c_0(z^*, w)$ определяем $v^\circ \in Q^{[\alpha]}$ при $\| z^* - w \| \geqslant \nu_* > 0$, дополняя построение $v^\circ \in Q^{[\alpha]}$ при $\| z^* - w \| < \nu_*$ так, чтобы функция $v^\circ(z^*, w)$ удовлетворяла условию Липшица. Смысл достаточно малой постоянной $\nu_* > 0$ будет пояснен ниже. Заметим, что по данным построениям вектор $v^\circ(z^*, w)$ будет удовлетворять условию Липшица по $z^* - w$ и при этом будет выполнено неравенство

$$\| c_0^* - Cv^\circ \| \leqslant \zeta \tag{2.7}$$

Управление системой, складывающейся из объекта (1.4) и поводыря (1.8), в дискретной схеме $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ ($i = 0, 1, \ldots, \tau_0 = t_0$) будет осуществляться следующим образом. В начальный момент полагаем $\{t_0, w_0\} = \{t_0, z_0\}$. Далее на каждом полуинтервале $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ фазовый вектор поводыря $w_\Delta[t]$ изменяется в соответствии с уравнением (1.8), где

$$u_* = u_*^\circ(z_\Delta[z_i],\quad w_\Delta[\tau_i]) \tag{2.8}$$

$$v_*[t] = v_*^\circ(t,\tau_i, z_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i], u_*^\circ(z_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i])) \tag{2.9}$$

Фазовый вектор $\{z_\Delta[t],\ y_\Delta[t]\}$ объекта изменяется в соответствии с уравнением (1.4), где

$$v = v^\circ(z_\Delta[\tau_i],\quad w_\Delta[\tau_i]) \tag{2.10}$$

причем управляющее воздействие $u = u[t]$ в (1.4) в соответствии с постановкой задачи вырабатывается первым игроком на основании того или иного избранного им закона управления. При этом можем столкнуться с любой измеримой реализацией $u = u[t]$, стесненной только условием $u[t] \in P$. Управления же u_* (2.8), v_* (2.9) и v (2.10) по смыслу задачи вырабатываются вторым игроком, задачу которого решаем.

3. Покажем, что при условиях 1°—3° описанная в п. 2 процедура $V \div \{v^\circ, u_*^\circ, v_*^\circ\}$ выбора управлений v, u_* и v_* для всякого наперед выбранного значения $\varepsilon > 0$ при подходящем выборе $\zeta > 0$, $\nu_* > 0$, $\mu > 0$ и $\delta > 0$ обеспечит ε-близость движений $z_\Delta[t]$ и $w_\Delta[t]$ при $t \geqslant t_0$, а также, начиная с некоторого момента $t = t_0 + \delta^*$ $(\delta^* > 0)$, — соответствующую близость движений $y_\Delta[t]$ и $y_\Delta^\circ(z_\Delta[t], v)$, причем $\delta^* > 0$ — любая наперед выбранная малая величина.

В самом деле, вследствие асимптотической устойчивости системы (1.12) в силу теоремы Ляпунова (см. [6], стр. 79) для любой наперед выбранной определенно-отрицательной квадратичной формы $\eta(y)$ можно указать определенно-положительную квадратичную форму $\xi(y)$, полная производная которой $(d\xi / dt)_{1.12}$ в силу уравнения (1.12) будет удовлетворять условию

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta(y), \qquad \eta(y) = \sum_{i,j=1}^{n-k} \eta_{ij} y_i y_j, \qquad \xi(y) = \sum_{i,j=1}^{n-k} \xi_{ij} y_i y_j \tag{3.1}$$

Положим теперь

$$s = z_\Delta[t] - w_\Delta[t], \qquad y^* = y_\Delta^*[t] - y_\Delta^\circ(z_\Delta[t],\ v(z_\nabla[t],\ w_\Delta[t]))$$

и составим уравнения возмущенного движения на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$

$$ds_\Delta[t] / dt = As_\Delta[t] + D_1 y_\Delta^*[t] + B(u - u_*) + C(v - v_*) \tag{3.2}$$

$$\frac{dy_\Delta^*[t]}{dt} = \frac{1}{\mu} D_2 y_\Delta^*[t] - \frac{dy_\Delta^\bullet(z_\Delta[t], v)}{dt}$$

Все дифференцирования в (3.2) являются законными, так как при сделанном выборе управлений соответствующие функции при $\tau_i < t < \tau_{i+1}$ абсолютно непрерывны. Поэтому равенства (3.2) имеют смысл при почти всех значениях из каждого полуинтервала $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$. При переходе ко всей полуоси $t \geqslant t_0$ можно сохранить равенства (3.2). Необходимо только учесть в нем, что в моменты $t = \tau_i$ вследствие скачкообразных изменений

$$v[\tau_i]-v[\tau_i-0]=v(z[\tau_i],\ w[\tau_i])-v(z[\tau_{i-1}],\ w[\tau_{i-1}])$$

слагаемое $dy^\circ(z, v)/dt$ надлежит трактовать уже как обобщенную производную, которая будет содержать член вида $\varkappa_i\delta(t-\tau_i)$, где $\delta(t-\tau_i)$ — импульсная δ-функция. При этом вектор $\varkappa_i$ будет удовлетворять оценке

$$\|\varkappa_i\|\leqslant K_0\delta,\quad K_0=\text{const},\quad \delta=\sup_i(\tau_{i+1}-\tau_i)\quad (i=0,1,\ldots) \tag{3.3}$$

Оценим изменение функции Ляпунова

$$\gamma(s, y^*)=\lambda(s)+\xi(y^*) \tag{3.4}$$

в силу (3.2), где управления u_*, v_*, v выбираются, согласно формулам (2.8)—(2.10). Вычисляя, теперь уже не формально полную производную по времени $(d\gamma/dt)_{(3.2)}$ функции $\gamma(s, y^*)$ (3.4) в силу системы (3.2), получим

$$\begin{gathered}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{(3.2)}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'(As_\Delta[t]+D_1y_\Delta^*[t]+B(u[t]-u_*(s_\Delta[\tau_i]))+\\ +C(v(s_\Delta[\tau_i])-v_*[t]))+\left(\frac{\partial\xi}{\partial y^*}\right)'\times\\ \times\left(\frac{1}{\mu}D_2y_\Delta^*[t]-\frac{dy_\Delta^\circ(z_\Delta[t], v(s_\Delta[\tau_i]))}{dt}\right)\quad(\tau_i\leqslant t<\tau_{i+1})\end{gathered} \tag{3.5}$$

При этом в моменты $t=\tau_i$ составляющая $\xi(y^*[t])$ в функции $\gamma(s[t], y^*[t])$ вследствие (3.3) будет еще претерпевать скачки

$$\xi(y^*[\tau_i])-\xi(y^*[\tau_i-0])\leqslant K_0\delta \tag{3.6}$$

Учитывая (1.14), (2.5)—(2.7) и (3.1), можно проверить, что на полуинтервале $\tau_i\leqslant t<\tau_{i+1}$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\frac{d\gamma}{dt}\leqslant\beta(s_\Delta[t])+\frac{1}{\mu}\eta(y_\Delta^*[t])+K_1\|s_\Delta[t]\|\,\|y_\Delta^*[t]\|+\\ +K_2\|y_\Delta^*[t]\|+K_3\zeta\|s_\Delta[t]\|+K_4(1+\|s_\Delta[t]\|+\|y_\Delta^*[t]\|)\delta+\\ +K_5(\tau_i-\tau_{i-1})^2\quad \text{при } \nu_*\leqslant s_\Delta[t]\|\leqslant\nu^*\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\gamma}{dt}\leqslant\frac{1}{\mu}\eta(y_\Delta^*[t])+L_1(1+\|y_\Delta^*[t]\|)\delta+\\ +L_2\|y_\Delta^*[t]\|+L_3\nu_*^2+L_4\zeta\nu_*\quad \text{при } \|s_\Delta[t]\|<\nu_*\end{gathered} \tag{3.8}$$

где K_j ($j=1,\ldots,5$) и L_j ($j=1,\ldots,4$) — постоянные величины. Здесь ν^* — настолько малая постоянная, что в области $\|s_\Delta[t]\|\leqslant\nu^*$ выполняется неравенство

$$\begin{gathered}\min_{v\in Q[\alpha]}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'Cv+\max_{u\in P}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'Bu-\min_{v\in Q}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'Cv-\\ -\max_{u\in P[\alpha]}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'Bu<\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)'[-Bp_0's+Cq_0's]\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из оценок (3.7) и (3.8) с учетом неравенства (3.6) стандартными в теории устойчивости движения [5,6,8] и в теории дифференциальных уравнений с малым параметром [1] рассуждениями нетрудно показать справедливость следующего утверждения. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдутся столь малые значения $\nu_*(\varepsilon)>0$, $\zeta(\varepsilon)>0$ и значения

$\mu_0(\varepsilon) > 0$, $\delta_0(\varepsilon, \mu) > 0$ такие, что при $\mu \leqslant \mu_0(\varepsilon)$ описанная процедура выбора управлений, работающая в схеме управления с поводырем, для всех движений $s_\Delta[t]$ и $y_\Delta{}^*[t]$, порожденных этой процедурой и имеющих шаг разбиения $\sup_i(\tau_{i+1} - \tau_i) \leqslant \delta_0(\varepsilon, \mu)$, будет обеспечивать выполнение неравенств

(3.10) $$\| s_\Delta[t] \| \leqslant \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant t_0; \qquad \| y_\Delta{}^*[t] \| \leqslant \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant t_0 + \delta$$

Так как при этом выбор управления $v_*(t, \tau_i, z_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i], u_*(\cdot))$ обеспечивает сохранение движения $w_\Delta[t]$ на W, то получаем окончательно следующий результат.

Теорема. Пусть выполняются условия 1—3°. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ можно организовать процедуру управления

(3.11) $$V \div \{v(\tau, z, w), \quad u_*(\tau, z, w), \quad v_*(t, \tau, z, w, u_*(\cdot))\}$$

которая при достаточно малых $\mu(\varepsilon) > 0$ и $\delta(\varepsilon, \mu) > 0$ для всех движений $z_\Delta[t] = z_\Delta[t, t_0, z_0, V, u[\cdot]]$, порожденных этой процедурой, будет обеспечивать выполнение условий

$$\{z_\Delta[\tau^*]\} \in M^{[\varepsilon]}, \quad \{z_\Delta[t]\} \in N^{[\varepsilon]} \quad (t_0 \leqslant t \leqslant \tau^*)$$

4. В заключение рассмотрим пример, иллюстрирующий описанную методику построения управления с поводырем для системы, описываемой дифференциальными уравнениями, содержащими малый параметр при части производных.

Пусть две материальные точки $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$ перемещаются на некоторой плоскости П. Материальная точка $m^{(1)}$ единичной массы преследует материальную точку $m^{(2)}$ малой массы μ, испытывающей сопротивление среды, линейное по скорости с единичным коэффициентом пропорциональности. На каждую из точек действует своя управляющая сила $F^{(1)} = u$ и $F^{(2)} = v$ соответственно, причем эти силы стеснены ограничениями $\| u \| \leqslant h^{(1)}$, $\| v \| \leqslant h^{(2)}$.

Пусть $\rho^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — радиус-векторы точек $m^{(i)}$. Вводя обозначения

$$\rho^{(1)} - \rho^{(2)} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \dot\rho^{(1)} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \dot\rho^{(2)} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

получим уравнения движения точек $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$ в форме следующей системы дифференциальных уравнений ($\mu > 0$ — малый параметр):

(4.1) $$z_1^{\cdot} = z_3 - y_1, \quad z_2^{\cdot} = z_4 - y_2, \quad z_3^{\cdot} = u_1, \quad z_4^{\cdot} = u_2$$
$$\mu y_1^{\cdot} = -y_1 + v_1, \quad \mu y_2^{\cdot} = -y_2 + v_2$$

Будем рассматривать задачу уклонения для второго игрока, стремящегося предотвратить встречу по геометрическим координатам точек $m^{(1)}$ и $m^{(2)}$ в течение отрезка времени $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, где ϑ — сколь угодно большое зафиксированное число. Условия (1.5) имеют здесь вид

(4.2) $$\{z_\Delta[t]\} \in N^{[\varepsilon]}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$$

где множество N определяется неравенством $z_1^2 + z_2^2 \geqslant \sigma^2, \sigma > 0$ — достаточно малое число и $\varepsilon < \sigma$.

Перейдем к построению искомой процедуры V выбора управлений, обеспечивающей выполнение условия (4.2). Полагая в (4.1) $\mu = 0$, определим вектор-функцию $y^\circ(z, v)$ (1.6), имеющую здесь вид $y^\circ(z, v) = v$.

Составим вспомогательную систему формы (1.7), описываемую здесь уравнениями

(4.3) $$z_1^{\cdot\circ} = z_3^\circ - v_1, \quad z_2^{\cdot\circ} = z_4^\circ - v_2, \quad z_3^{\cdot\circ} = u_1, \quad z_4^{\cdot\circ} = u_2$$

Сопоставим уравнениям (4.3) уравнения движения поводыря вида (1.8). Получим

(4.4) $$w_1^{\cdot} = w_3 - v_{1*}, \quad w_2^{\cdot} = w_4 - v_{2*}, \quad w_3^{\cdot} = u_{1*}, \quad w_4^{\cdot} = u_{2*}$$

где управляющие воздействия u_* и v_* стесним условиями

$$\|u_*\| \leqslant h^{(1)} + \alpha, \quad \|v_*\| \leqslant h^{(2)} - \alpha \quad (\alpha > 0) \tag{4.5}$$

Пусть задана какая-то начальная позиция $\{t_0, z_0\}$. Сопоставим ей начальную позицию $\{t_0, w_0\} = \{t_0, z_0\}$. Известно [4], что в системе (4.4) для выбранной позиции $\{t_0, w_0\}$ второй игрок всегда может выбрать свое управление v_* таким образом, что при любом сообщаемом ему выборе управления u_* первым игроком он обеспечит уклонение

$$w_1^2[t] + w_2^2[t] > \sigma^2 \tag{4.6}$$

где $\sigma > 0$ — достаточно малое число, зависящее от исходных данных и зафиксированного ϑ. В частности, можно, например [9], выбирать в каждый момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ управление $v_*[t]$ из следующих условий ($(v_*, w^{(i)})$ — скалярное произведение векторов v_* и $w^{(i)}$):

$$(v_*, w^{(i)}) = 0, \quad (v_*, w^{(2)}) \leqslant 0, \quad \|v_*\| = h^{(2)} - \alpha \tag{4.7}$$

$$w^{(1)} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \qquad w^{(2)} = \begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

Тогда в соответствии с результатами статьи [7] для системы (4.4) существует v-стабильный мост W, который проходит через начальную позицию $\{t_0, w_0\}$ и лежит в N при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, т. е. условие 1° выполняется. При этом для удержания движения $w[t]$ на мосту W достаточно выбирать управление v как раз из условий (4.7).

Для стабилизации системы вида (1.11), описываемой здесь уравнениями

$$s_1^{\cdot} = s_3 - q_1(s), \quad s_2^{\cdot} = s_4 - q_2(s), \quad s_3^{\cdot} = -p_1(s), \quad s_4^{\cdot} = -p_2(s)$$

достаточно положить

$$q_1(s) = s_1 + s_3, \quad q_2(s) = s_2 + s_4, \quad p_1(s) = s_3, \quad p_2(s) = s_4$$

т. е. условие 2° здесь тоже выполняется.

Задавшись определенно-отрицательной квадратичной формой $\beta(s)$ (см. (1.14)), например, в виде

$$\beta(s) = -\sum_{i=1}^{4} s_i^2$$

найдем определенно-положительную квадратичную форму $\lambda(s)$, которая в данном случае имеет вид

$$\lambda(s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} s_i^2$$

Система вида (1.12), описываемая здесь уравнениями

$$y_1^{\cdot} = -y_1, \qquad y_2^{\cdot} = -y_2$$

асимптотически устойчива по Ляпунову, что означает выполнение условия 3°.

Таким образом, для данной задачи выполняются условия 1° — 3° теоремы, следовательно, второй игрок может так организовать процедуру управления (3.15) с поводырем, что при достаточно малых значениях параметра $\mu(\varepsilon)$ и достаточно малом шаге разбиения $\delta(\varepsilon, \mu)$ она обеспечит выполнение условия (4.2).

Эта процедура состоит в том, что второй игрок выбирает управление $v_*[t]$ из условий (4.7), а управления u_* и v, согласно следующим формулам:

$$u_{i*} = \frac{(h^{(1)} + \alpha)\, s_{2+i}}{\sqrt{s_3^2 + s_4^2}}, \quad v_i = \frac{h^{(2)} s_i}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \zeta_0 (s_3^2 + s_4^2)}} \quad (i = 1, 2)$$

при $0 < \nu_* \leqslant \|s\| \leqslant \nu_*$, где ζ_0 — постоянное, достаточно малое число.

Что касается величины малых постоянных ν_*, ν^* и ξ_0, то для их нахождения необходимо явно выписать выражение (3.5) для данного примера, произвести его оценку и из этой оценки получить искомые значения.

Заметим еще, что поскольку для любого, достаточно малого $\sigma > 0$, в системе, описываемой уравнениями (4.4), возможно обеспечить уклонение (4.6) в течение бесконечного промежутка времени $t_0 \leqslant t < \infty$ [10], то описанная процедура построения управлений v, u_* и v_* обеспечит уклонение (4.2) при всех $t \geqslant t_0$ в системе, описываемой уравнениями (4.1).

Поступила 18 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2, 3.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
4. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
6. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат. 1950.
7. *Красовский Н. Н.* К игровой задаче уклонения. Дифференциальные уравнения 1972, т. 8, № 2.
8. *Барбашин Е. А.* Об устойчивости по отношению к импульсным воздействиям Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 7.
9. *Барабанова Н. Н., Субботин А. И.* О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
10. *Гусятников П. Б.* Об l-уклонении от встречи в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.