ЛИТЕРАТУРА

1. *Срубщик Л. С.* Асимптотика уравнений Рейсснера в нелинейной теории симметрично загруженных оболочек вращения. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 3.
2. *Срубщик Л. С.* Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
3. *Погорелов А. В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
5. *Погорелов А. В.* Закритические упругие состояния строго выпуклых оболочек в температурном поле. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 5.
6. *Ларченко В. В., Мельник В. В., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б.* О верхней критической нагрузке тонких непологих сферических оболочек и влияние на нее несовершенства края. Тр. 8 Всес. конф. по теории оболочек и пластин, »Наука», 1973, стр. 316—320.

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРЫЖКЕ НА ЛЫЖАХ С ТРАМПЛИНА

И. А. Крылов, Л. П. Ремизов

(Москва)

В зависимости от мощности трамплина лыжник совершает полет в течение 2.5—4.5 *сек* и может влиять на траекторию движения в воздухе посредством изменения угла атаки тела. Спрашивается, каким образом следует спортсмену управлять своим телом в полете, чтобы приземлиться как можно дальше?

Ниже представлены формулировка этой задачи и ее численное решение на ЭВМ как задачи оптимального управления при следующих предположениях: рассматривается движение центра масс системы лыжник — лыжи под действием силы тяжести, силы сопротивления R и подъемной силы Y. Уравнения движения и начальные условия имеют вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{m} - g\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Y}{mv} - \frac{g\cos\theta}{v}$$

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\theta$$

$$R = {}^1/_2\, \rho\, v^2 S\, c_x, \qquad Y = {}^1/_2\, \rho\, v^2 S c_y$$

$$t = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ v = v_0,\ \theta = \theta_0$$

Здесь t — время, x, y, v, θ — соответственно горизонтальная дальность, высота, модуль скорости и угол наклона скорости к оси x, m — масса системы, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность воздуха, S — характерная площадь, c_x и c_y — аэродинамические коэффициенты.

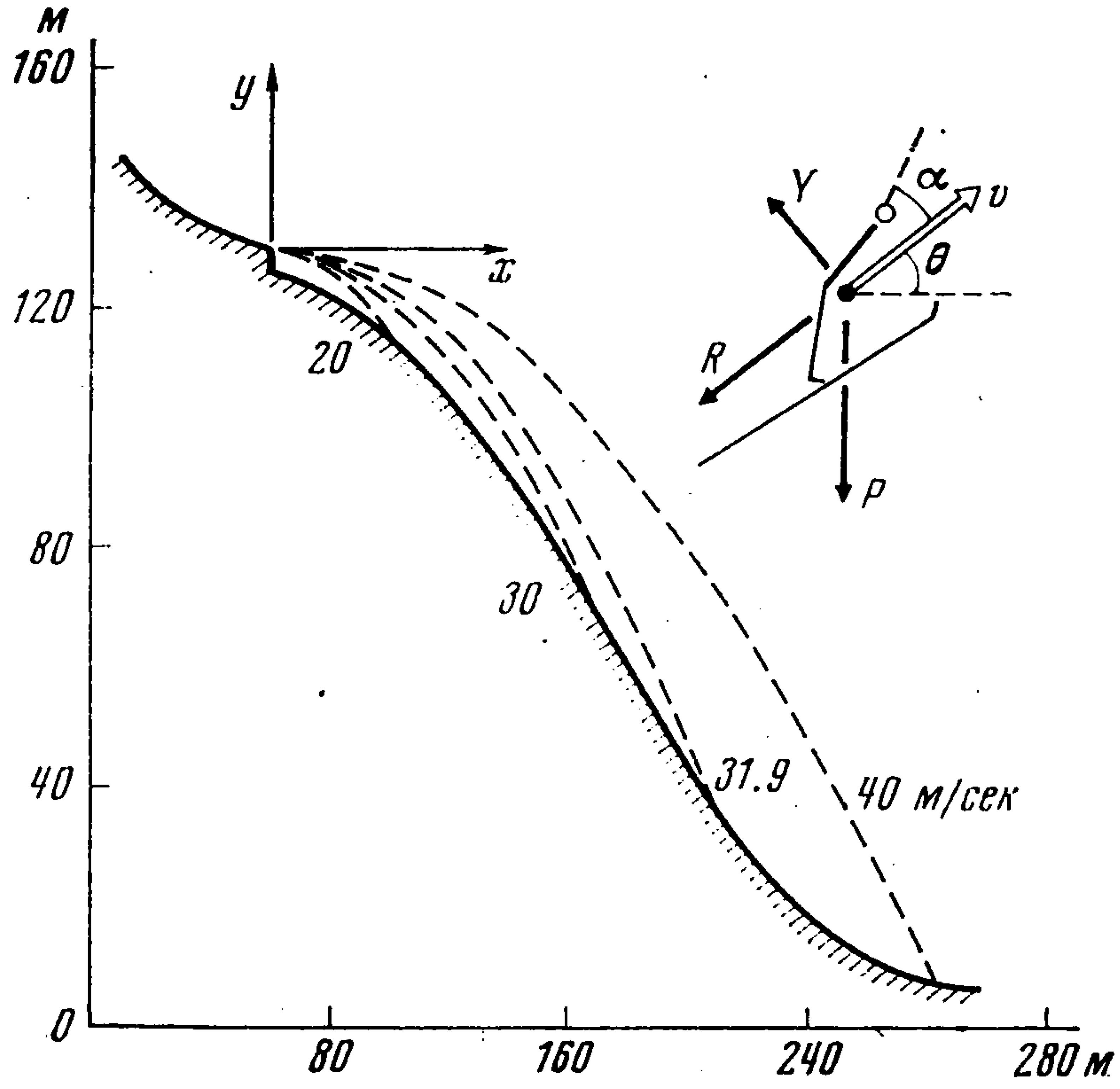
Зависимости c_y и c_x от угла атаки α взяты из [1], где приведены экспериментальные кривые, полученные в результате продувки лыжников в аэродинамической трубе. Для удобства вычислений эти кривые аппроксимированы зависимостями $c_y(\alpha) = -0.000250\,\alpha^2 + 0.0228\,\alpha - 0.0920$, $c_x(\alpha) = 0.0103\,\alpha$.

Угол атаки может меняться в интервале от $\alpha_{\min}(t)$ до $\alpha_{\max}(t)$.

Движение моделируется на профиле трамплина г. Планица (Югославия), на котором был установлен абсолютный мировой рекорд дальности в прыжках — 165 *м* (см. фиг. 1; в правом верхнем углу дана схема углов и сил, действующих на лыжника в полете).

Требуется установить зависимость от времени угла атаки $\alpha(t)$ для максимальной дальности прыжка, измеряемой по профилю трамплина от стола отрыва. Очевидно, что задачи о максимуме дальности в момент окончания полета T и максимуме горизонтальной дальности $x\ (T)$ в данном случае эквивалентны.

Сформулированная вариационная задача со свободным правым концом и нефиксированным временем отличается от задачи из [2] видом зависимостей c_x и c_y от угла атаки и условиями окончания процесса. Как будет показано, качественное поведение оптимального угла атаки от времени имеет тот же характер, что и в [2].

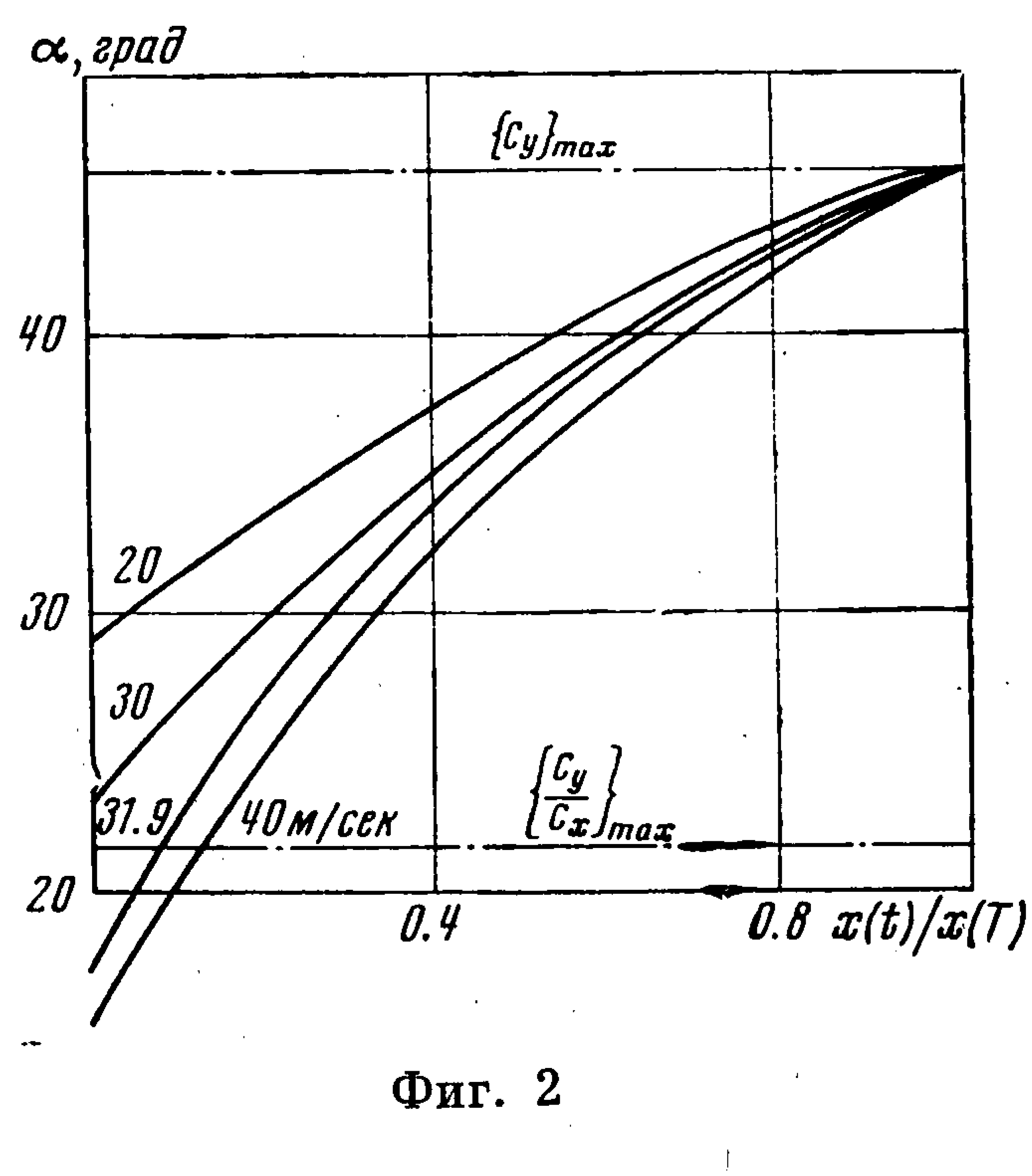


Фиг. 1

Задачу удобно рассматривать в безразмерных переменных, выбрав в качестве единицы скорости v_0, единицы времени v_0 / g, единицы массы m.

Таким образом, необходимо определить такое управление $\alpha\ (t)$, которое максимизирует функционал $x\ (T)$ в момент времени T, когда лыжник оказывается на горе приземления трамплина, т. е. при условии $h\ (x\ (T),\ y\ (T)) = 0$, где $h\ (x,\ y) = 0$ — профиль трамплина.

В соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина могут быть выписаны уравнения для сопряженных переменных, краевые условия на правом конце и пра-



Фиг. 2

вило выбора α, максимизирующего функцию Гамильтона для любых значений координат и импульсов.

В таком виде задача была численно решена на ЭВМ при помощи алгоритма из [3] для четырех значений начальной скорости $v_0 = 20$, 30, 31.9 и 40 *м/сек* при угле отрыва $\theta_0 = 0.0902$. В соответствии с экспериментальными данными брались следующие значения параметров:

$$\frac{S}{mg} = 0.01 \frac{м^2}{кг}, \quad \rho = 0.125 \frac{кг\ сек^2}{м^4}, \quad \alpha_{\min} = 5°, \quad \alpha_{\max} = 80°$$

На фиг. 2 приведены зависимости оптимальных управлений $\alpha°(t)$ для перечисленных начальных скоростей движения, которым соответствуют дальности полетов в 39, 113, 174 и 245 *м*. Третий вариант расчета оптимальной траектории выбран по начальным условиям, в которых был совершен рекордный прыжок на 165 *м*. Это, однако, не дает прав на далеко идущие выводы, поскольку аэродинамические характеристики рекордсмена не известны.

Следует заметить, что в спортивной практике до сих пор считалось [1], что наибольшая длина прыжка достигается при сохранении постоянного угла атаки, соответствующего максимальному аэродинамическому качеству. Траектория полета в этом случае при начальной скорости 30 *м / сек*, согласно расчетам, меньше оптимальной на 13 *м*. Дальность прыжка при условии сохранения угла атаки с максимальным значением коэффициента подъемной силы при этих же начальных условиях меньше длины оптимальной траектории только на 10 *м*. На фиг. 1 показаны траектории для четырех указанных вариантов. Профиль трамплина Планицы деформирован (вытянут вдвое по вертикали — см. масштабную сетку) для наглядности.

Приведенные графики позволяют сделать следующие выводы. Если в начальной части полета лыжник должен принимать положение с малым углом наклона, обеспечивающим незначительное лобовое сопротивление, то во второй половине полета угол атаки тела следует постепенно приближать к углу с максимальным значением коэффициента подъемной силы, т. е. в конечной фазе полета отдается предпочтение качеству планирования в ущерб сопротивлению воздуха. В полетах со скоростью 20—25 *м / сек*, что свойственно для трамплинов средней мощности, фактор лобового сопротивления играет меньшую роль по сравнению с прыжками на больших трамплинах (начальная скорость 28—33 *м/сек*). Поэтому при прыжках на средних трамплинах оптимальные траектории дают прыжки с довольно большим углом атаки в первой фазе движения (около 30°), в то время как при прыжках на больших трамплинах лучшие результаты дают полеты с малым углом атаки в начале полета (от 15 до 23°).

Поступила 31 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грозин Е. А.* Прыжки на лыжах с трамплина. М., Физкультура и спорт, 1971.
2. *Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.* О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.
3. *Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.* Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 1.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 24/V-1974 г. Т- 13210 Подписано к печати 22/VII-1974 г. Тираж 2860 экз.
Зак. 684 Формат бумаги 70×108 1/16 Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 15,8

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10