

Уравнения (8) с учетом (9), согласно (12) и (15), можно записать так:

$$(16) \quad \varepsilon'^2 = 2 (-\Delta \cos \varepsilon + 3\kappa) \\ (\sigma = \lambda \text{ при } \kappa = a, \omega = \lambda \text{ при } \kappa = b)$$

Уравнения (14) таким же образом запишутся в виде

$$(17) \quad \varepsilon'^2 = 2 (j \Delta \sin \varepsilon + 3\kappa) \\ (\sigma = \lambda \text{ при } \kappa = a, j = +1; \omega = \lambda \text{ при } \kappa = b, j = -1)$$

Уравнения (16) совпадают с уравнениями (9) работы [2], если сделать подстановку

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \psi & \theta & x_1 & y_1 & z_1 & x & y & z & I & A^\circ & B^\circ & C^\circ & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta - \pi/2 & \eta & \xi & \xi & y_1 & x_1 & -z_1 & A_2 & B_1 & A_1 & C_1 & \sigma - \pi/2 & \omega - \pi/2 \end{array}$$

Уравнения (17) совпадают с уравнениями (9) работы [1] при той же подстановке.

Рассмотрение движения в осях z^*x^* представляет определенные неудобства, так как они с течением времени меняют свое расположение по отношению к основным элементам карданова подвеса (что исключено для осей z_1x_1) и могут, по-видимому, служить для интерпретации движения.

Поступила 26VI1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Богоявленский А. А. Частное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1959, т. 22, вып. 5.
2. Богоявленский А. А. Об одном частном решении задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ВЕРХНЕГО КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ НЕПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

М. Ю. Жуков, Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Асимптотическим методом [1,2] определяются верхние критические давления непологих сферических оболочек при равномерном внешнем давлении в зависимости от угла раствора и способа опорного закрепления. Рассматривается случай, когда параметр относительной тонкостенности достаточно мал. Найденные значения хорошо согласуются с результатами расчетов прямыми численными методами и позволяют продолжить их в область сколь угодно тонких оболочек, где машинный счет становится малоэффективным.

1. Уравнения и краевые условия. Рассматриваются уравнения Рейсснера для непологих сферических оболочек при осесимметричной деформации [1]

$$(1.1) \quad \varepsilon^2 \left\{ \sin \xi (\Phi - \xi)'' + \cos \xi (\Phi - \xi)' - \frac{\cos \Phi}{\sin \xi} (\sin \Phi - \sin \xi) + \nu (\cos \Phi - \cos \xi) \right\} = \\ = \Psi \sin \Phi - T \cos \Phi \\ \varepsilon^2 \left\{ \sin \xi \Psi'' + \cos \xi \Psi' - \left[\frac{\cos^2 \Phi}{\sin \xi} - \nu \Phi' \cos \Phi \right] \Psi \right\} = \cos \Phi - \cos \xi + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \nu \sin \Phi T' - (\sin^2 \xi p)' + \left[\frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sin \xi} + \nu \Phi' \cos \Phi \right] T - \nu \sin \xi p \cos \Phi \right\}$$

с каждым из краевых условий

$$(1.2) \quad \begin{array}{l} 1) \Phi(0) = \Psi(0) = 0, \quad M(b) = 0, \quad \Psi(b) = -\varepsilon k u(b) \sin b \\ 2) \Phi(0) = \Psi(0) = 0, \quad \Phi(b) = b, \quad N(b) = 0 \\ 3) \Phi(0) = \Psi(0) = 0, \quad \Phi(b) = b, \quad u(b) = 0; \end{array}$$

Все величины, входящие в (1.1), (1.2), безразмерные и связаны с размерными соотношениями

$$\begin{aligned} r_0 &= R \sin \xi, \quad z_0 = R \cos \xi, \quad \gamma^2 = 12(1 - \nu^2), \quad k_0 = kE\gamma\varepsilon^3, \quad \varepsilon^2 = \frac{h}{R\gamma} \\ p &= \frac{P_H}{\varepsilon^4\gamma E}, \quad q = \frac{P_V}{\varepsilon^4\gamma E}, \quad p = -Q \sin \Phi, \quad q = Q \cos \Phi, \quad \Psi = \frac{\Psi_H}{\varepsilon^4 R^2 \gamma E} \\ T &= \frac{\Psi_V}{\varepsilon^4 R^2 \gamma E} = - \int_0^\xi \sin \xi q \, d\xi, \quad N = \frac{N_\xi}{\varepsilon^4 R \gamma E} = \frac{\Psi \cos \Phi + T \sin \Phi}{\sin \xi} \\ u &= \frac{u_0}{R\varepsilon^2} = \sin \xi \Psi' + \sin^2 \xi p - \nu \Psi \cos \Phi - \nu T \sin \Phi \\ M &= \frac{M_\xi}{Eh^2\varepsilon^2} = \Phi' - 1 + \nu \frac{\sin \Phi - \sin \xi}{\sin \xi} \end{aligned}$$

Здесь $\Phi(\xi)$ — угол, который элемент оболочки составляет с осью абсцисс до и после деформации в точке, отвечающей параметру ξ , Ψ_H , Ψ_V , P_H , P_V — соответственно горизонтальные и вертикальные составляющие напряжения и нагрузки, u_0 — горизонтальное смещение, M_ξ — изгибающий момент, N_ξ — радиальное усилие, E — модуль юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки, R — радиус оболочки, k_0 — коэффициент упругого скольжения края оболочки, Q — интенсивность внешней нагрузки.

Граничные условия в (1.2) соответствуют разным способам закрепления края оболочки. Далее будем исследовать задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Построение асимптотики. Метод построения асимптотических разложений при $\varepsilon \rightarrow 0$ для задач (1.1), (1.2) изложен в [1]. Здесь ограничимся построением главных членов асимптотики. Полагая в (1.1) $\varepsilon = 0$, получим

$$(2.1) \quad \Psi_0(\xi) \sin \Phi_0(\xi) + \cos \Phi_0(\xi) \int_0^\xi \sin \xi q(\xi, \Phi_0(\xi)) \, d\xi = 0, \quad \cos \Phi_0(\xi) = \cos \xi$$

Эта система имеет решение

$$(2.2) \quad \Phi_0(\xi) = \xi, \quad \Psi_0(\xi) = -\frac{1}{4} Q \sin 2\xi$$

которое отвечает безмоментной напряженной форме равновесия, совпадающей с исходной поверхностью. Решение (2.2) удовлетворяет уравнениям (1.1), но не удовлетворяет граничным условиям (1.2). Поэтому асимптотическое представление решения, соответствующего] форме равновесия в докритической стадии, разыскивается при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$(2.3) \quad \Phi(\xi, \varepsilon) \sim \xi + g_0 \left(\frac{b - \xi}{\varepsilon} \right), \quad \Psi(\xi, \varepsilon) \sim -\frac{1}{4} Q \sin 2\xi + h_0 \left(\frac{b - \xi}{\varepsilon} \right)$$

Здесь функции g_0 , h_0 сосредоточены в зоне краевого эффекта (в окрестности $\xi = b$) и компенсируют невязку в выполнении граничных условий (1.2) у функций $\Phi_0(\xi)$ и $\Psi_0(\xi)$.

Далее, используя (2.3), для правой части первого уравнения (1.1) с учетом (2.1) и (2.2) получим

$$I(\xi, \varepsilon) = (\Psi_0 + h_0) \sin(\xi + g_0) + Q \cos(\xi + g_0) \int_0^\xi \sin \xi [\cos(\xi + g_0) - \cos \xi] \, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} Q \sin^2 \xi \cos (\xi + g_0) = - \frac{1}{2} Q \sin \xi \sin g_0 + h_0 \sin (\xi + g_0) - \\ - 2Q \cos (\xi + g_0) \int_0^\xi \sin \xi \sin \left(\xi + \frac{g_0}{2} \right) \sin \frac{g_0}{2} d\xi$$

Произведем замену $\xi = b - \varepsilon t$ и найдем главный член разложения по степеням εt в окрестности точки $\xi = b$. Заметим, что интеграл в последнем выражении — величина порядка ε . Он равен

$$\varepsilon \int_b^\infty \sin b \sin \left[b + \frac{1}{2} g_0(t) \right] \sin \frac{g_0(t)}{2} dt + O(\varepsilon^2)$$

При удалении от границы решение (2.3) должно переходить в решение (2.2), поэтому $\{g_0(t), h_0(t)\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что при этом последний интеграл сходится. Таким образом, в окрестности $\xi = b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$I(\xi, \varepsilon) = - \frac{1}{2} Q \sin b \sin g_0(t) + h_0(t) \sin [b + g_0(t)] + O(\varepsilon)$$

Поступая аналогичным образом с остальными членами уравнений (1.1), для определения функций $g_0(t), h_0(t)$ приходим к системе нелинейных дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями

$$(2.4) \quad \sin b g_0'' + \frac{1}{2} Q \sin b \sin g_0 - h_0 \sin (b + g_0) = 0 \\ \sin b h_0'' - \cos (b + g_0) + \cos b = 0$$

$$(2.5) \quad 1) g_0'(0) = 0, h_0(0) + \Psi_0(b) = k \sin^2 b h_0'(0), g_0(\infty) = h_0(\infty) = 0 \\ 2) g_0(0) = 0, h_0(0) \cos b - \frac{1}{2} Q \sin b = 0, g_0(\infty) = h_0(\infty) = 0 \\ 3) g_0(0) = 0, h_0'(0) = 0, g_0(\infty) = h_0(\infty)$$

Условия на бесконечности получаются из требования перехода асимптотического решения (2.3) внутри области в (2.2).

В случае краевых условий 3) в (2.5) (абсолютно глухая заделка) и 1) в (2.5) при $k = \infty$ (неподвижный шарнир) можно показать, следуя [2], что значения верхнего критического давления $Q^* = 4$. При этом $g_0 = h_0 = 0$, и асимптотические представления строятся в виде

$$\Phi(\xi, \varepsilon) \sim \xi + \varepsilon g_1 \left(\frac{b - \xi}{\varepsilon} \right), \quad \Psi(\xi, \varepsilon) \sim - \frac{1}{4} Q \sin 2\xi + \varepsilon h_1 \left(\frac{b - \xi}{\varepsilon} \right)$$

Здесь функции g_1, h_1 определяются из уравнений и краевых условий

$$g_1'' + \frac{1}{2} Q g_1 - h_1 = 0, \quad h_1'' + g_1 = 0 \\ 1) g_1(0) = 0, h_1'(0) = - \frac{1}{2} Q (1 - \nu), \quad g_1(\infty) = h_1(\infty) = 0 \\ 2) g_1'(0) = 0, h_1'(0) = - \frac{1}{2} Q (1 - \nu), \quad g_1(\infty) = h_1(\infty) = 0$$

Формулы для g_1, h_1 легко выписать в явном виде.

3. Решение уравнений краевого эффекта (2.4), 1), 2) в (2.5). Будем разыскивать наименьшее значение параметра Q , при котором, в любой достаточно малой его окрестности, в задачах (2.4), 1), 2) в (2.5) появляется еще одно решение.

Для этого воспользуемся методом, близким к изложенному в [2-4]. Ищем решение в виде

$$(3.1) \quad g_0 = \sum_{m+n \geq 1}^N g_{mn} z_1^m z_2^n, \quad h_0 = \sum_{m+n \geq 1}^N h_{mn} z_1^m z_2^n \\ z_1 = c_1 e^{r_1 t}, z_2 = c_2 e^{r_2 t}, r_1 = -a - ib, r_2 = -a + ib \\ a = (1/2 - 1/8 Q)^{1/2}, \quad b = (1/2 + 1/8 Q)^{1/2}$$

Здесь z_1, z_2 — убывающие на бесконечности фундаментальные решения линеаризованной системы (2.4)

$$g_0'' + 1/2 Q g_0 - h_0 = 0, \quad h_0'' + g_0 = 0$$

Выделяя линейные члены, перепишем (2.4) в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} g_0'' + 1/2 Q g_0 - h_0 &= h_0 (\cos g_0 - 1) - 1/2 Q (\sin g_0 - g_0) + \operatorname{ctg} b h_0 \sin g_0 \\ h_0'' + g_0 &= \operatorname{ctg} b (\cos g_0 - 1) - (\sin g_0 - g_0) \end{aligned}$$

Теперь подставляя (3.1) в (3.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях $z_1^m z_2^n$, получим рекуррентную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения комплексных коэффициентов g_{mn}, h_{mn}

$$(3.3) \quad \begin{aligned} g_{mn} + (mr_1 + nr_2)^2 h_{mn} &= G_1(g_{kp}, h_{kp}) \\ [(mr_1 + nr_2)^2 + 1/2 Q] g_{mn} - h_{mn} &= G_2(g_{kp}, h_{kp}) \end{aligned}$$

Здесь $G_1(g_{kp}, h_{kp}), G_2(g_{kp}, h_{kp})$ — функции, соответствующие правым частям системы (3.2), зависящие от g_{kp}, h_{kp} , причем $k + p < m + n$ ($G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ при $m + n = 1$). Ограничимся в (3.1) конечным числом членов N . При этом $\sin g_0, \cos g_0$, в правой части (3.2) заменяем разложением в ряд по g_0 , а число членов выбираем в зависимости от N .

В уравнениях (3.3) существует произвол в определении h_{10}, h_{01} . В дальнейшем для удобства возьмем $h_{10} = \overline{h_{01}}$. При этом для любых $m + n \geq 1$ получим $g_{mn} = \overline{g_{nm}}, h_{mn} = \overline{h_{nm}}$. Таким образом, все коэффициенты g_{nm}, h_{mn} могут быть вычислены по h_{10}, h_{01} .

Для определения c_1, c_2 подставляем (3.1) с известными коэффициентами в краевые условия (2.5). Получаем систему двух нелинейных уравнений

$$(3.4) \quad \begin{aligned} 1) \quad \Phi_1(c_1, c_2, Q) &\equiv \sum_{m+n \geq 1}^N (mr_1 + nr_2) g_{mn} c_1^m c_2^n = 0 \\ \Phi_2(c_1, c_2, Q) &\equiv - \sum_{m+n \geq 1}^N [1 - k \sin^2 b (mr_1 + nr_2)] h_{mn} c_1^m c_2^n + \frac{1}{4} Q \sin 2b = 0 \\ 2) \quad \Phi_1(c_1, c_2, Q) &\equiv \sum_{m+n \geq 1}^N g_{mn} c_1^m c_2^n = 0 \\ \Phi_2(c_1, c_2, Q) &\equiv - \sum_{m+n \geq 1}^N \cos b h_{mn} c_1^m c_2^n + \frac{1}{2} Q \sin b = 0 \end{aligned}$$

Процесс счета начинается при значении параметра $Q = 0$, для которого задача (2.4), (2.5) имеет тривиальное решение $c_1 = c_2 = 0$.

Значения $c_1(Q), c_2(Q)$ ищем методом Ньютона в сочетании с методом последовательного нагружения по параметру Q [2].

Соответствующие расчеты по описанному алгоритму проводились на «Odra-1024». Выбор шага при движении по параметру осуществлялся автоматически, а группировка членов при одинаковых степенях $z_1^m z_2^n$ в правой части (3.2) производилась при помощи программы полиномиального прораба. Контроль расчетов производился при помощи первого интеграла

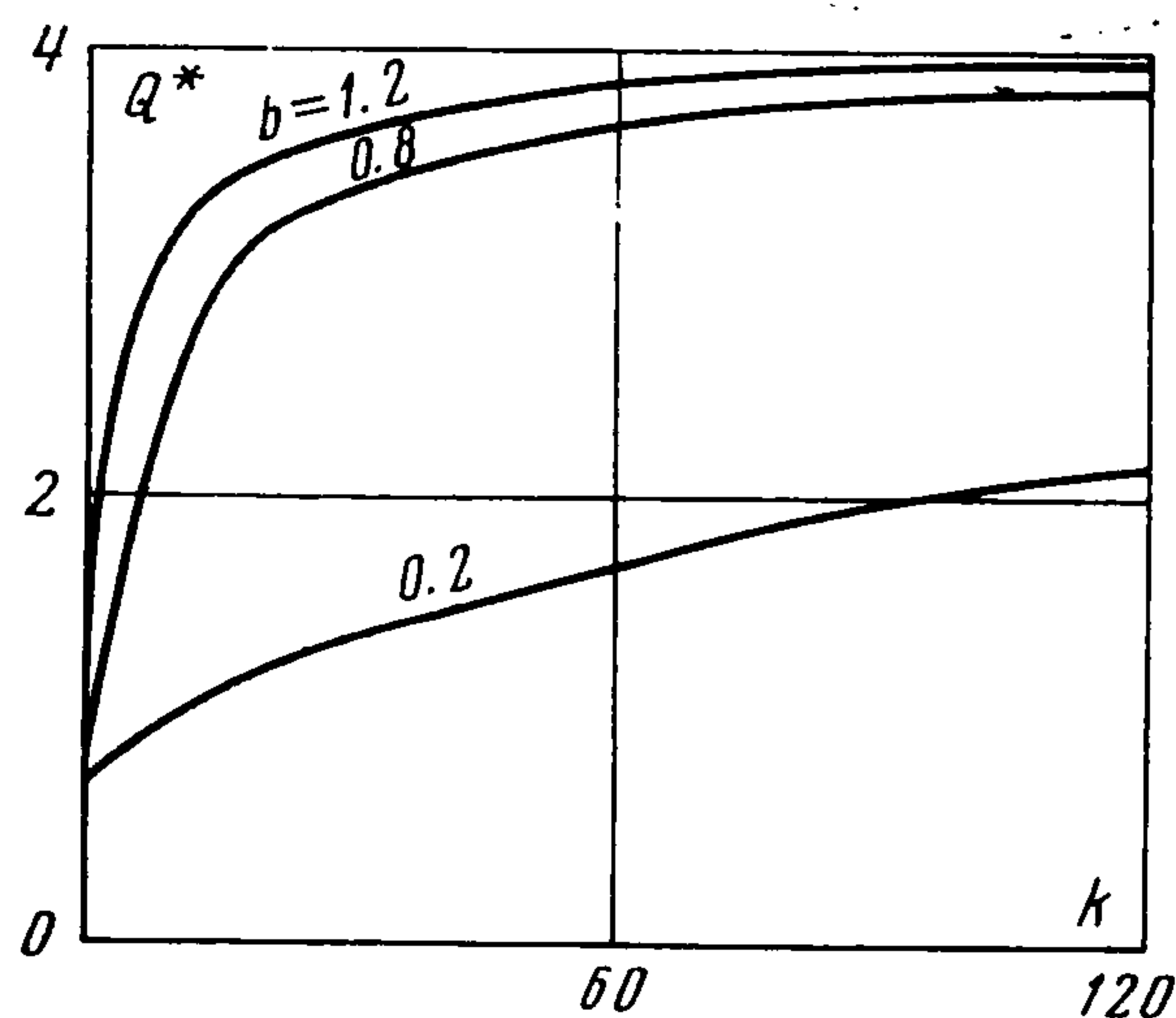
$$1/2 \sin b [(g_0')^2 - (h_0')^2] - 1/2 Q \sin b (\cos g_0 - 1) - h_0 [\cos(b + g_0) - \cos b] = 0$$

который получается из (2.4), если умножить первое уравнение на $-g_0'$, второе на h_0' , сложить и проинтегрировать от t до ∞ . Полагая $t = 0$ и используя соответствующие краевые условия, получаем контрольные формулы для каждого случая закрепления. Ниже приведены результаты расчетов Q^* для краевых условий 1) из (1.2) при $k = 0$ (нижняя строка) и 2) из (1.2) (верхняя строка).

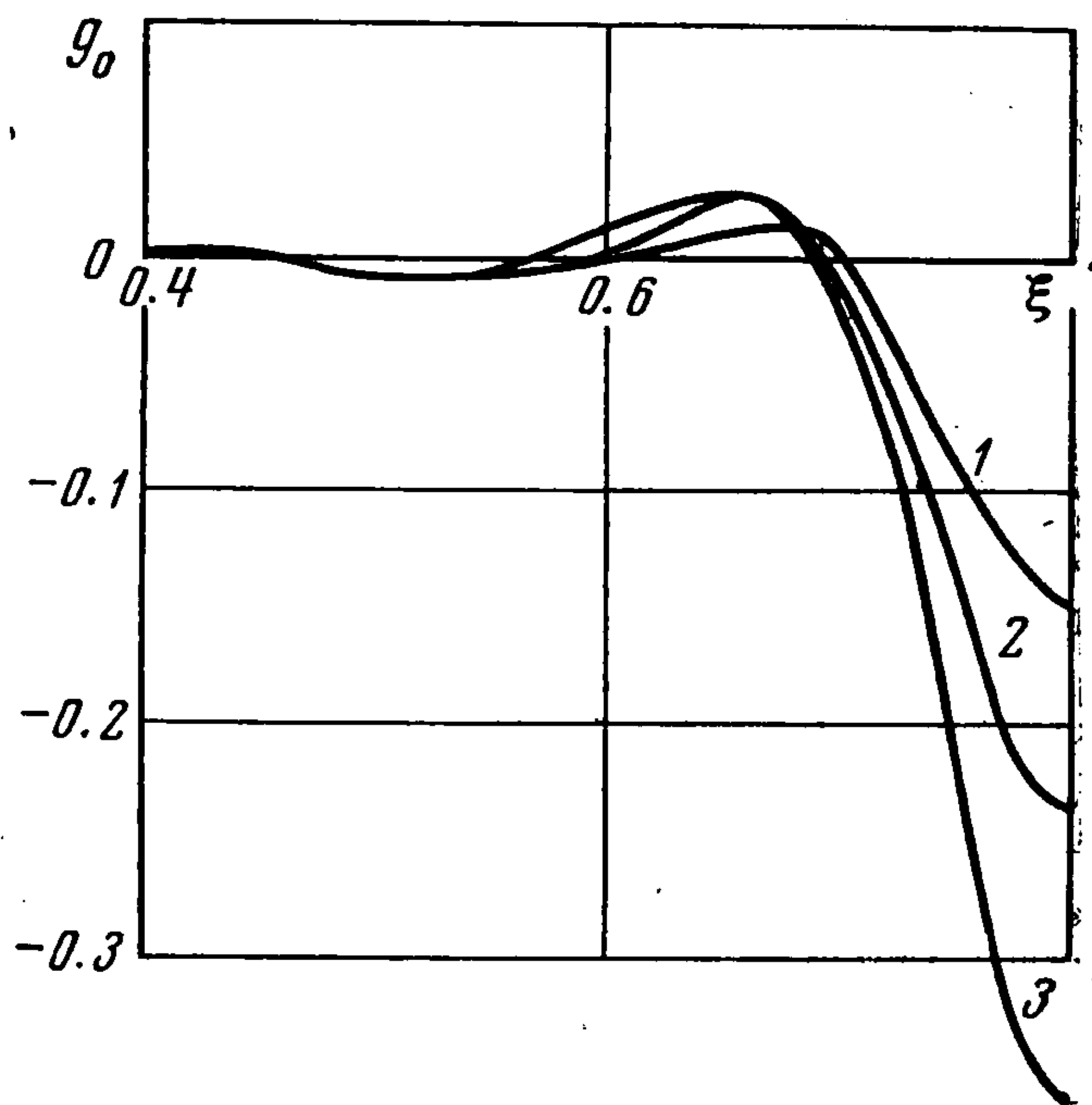
$b = 0.2,$	$0.4,$	$0.6,$	$0.8,$	$1.0,$	$1.2,$	$1.4,$	1.57
$Q^* = 1.753,$	$1.721,$	$1.703,$	$1.557,$	$1.596,$	$1.505,$		
$Q^* = 0.796$	$0.815,$	$0.858,$	$0.932,$	$1.046,$	$1.209,$	$1.472,$	2

Зависимость $Q^*(k)$ при фиксированных углах b (краевые условия 1) из (1.2) при $k \neq 0$ показаны на фиг. 1.

Отметим, что уравнения (2.3), (2.4) инвариантны относительно замены b на $\pi - b$, g_0 на $-g_0$, h_0 на $-h_0$. Поэтому результаты для $b > \pi/2$ могут быть получены из приведенных путем замены b на $\pi - b$.



Фиг. 1



Фиг. 2

4. Асимптотическое значение верхней критической нагрузки. Перейдем к размерным переменным $P = QE\gamma\varepsilon^4$. Тогда для достаточно тонких оболочек при условиях закрепления 1), 2) из (1.2) значения верхних критических нагрузок определяются формулой

$$P = \frac{Q^*E}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left[1 + a_1\left(\frac{h}{R}\right) + \dots\right]$$

где Q^* найдены в п. 3. Величины a_i здесь не находились. В случае абсолютно глухой заделки и неподвижного шарнира (краевые условия 3) из (1.2) и 1) из (1.2) при $k = \infty$ $Q^* = 4$. Этот результат ранее был получен А. В. Погореловым [5].

На фиг. 2 показано развитие краевого эффекта в зависимости от величины нагрузки Q (краевое условие 1) из (1.2) при $k = 0$, $b = 0.8$ для $\varepsilon^2 = 0.109 \cdot 10^{-2}$. Кривым 1—3 соответствуют значения Q , равные 0.458, 0.639, 0.827.

Видно, что потеря устойчивости, т. е. появление новых форм равновесия, определяется в основном развитием в зоне краевого эффекта. На фиг. 3 для сравнения показаны результаты расчетов $h_0(\xi)$ методом «пристрелки» [6] (сплошная кривая) и асимптотическим методом (пунктирная кривая) при $Q = 0.827$,

$\varepsilon^2 = 0.109 \cdot 10^{-2}$ для $\xi \in [0.4, 0.8]$ (при $\xi < 0.4$, $|h_0(\xi)| \leq 10^{-4}$).

Авторы выражают глубокую благодарность Л. Б. Царюку за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Срубщик Л. С. Асимптотика уравнений Рейсснера в нелинейной теории симметрично нагруженных оболочек вращения. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 3.
2. Срубщик Л. С. Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
3. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
5. Погорелов А. В. Закритические упругие состояния строго выпуклых оболочек в температурном поле. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 5.
6. Ларченко В. В., Мельник В. В., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б. О верхней критической нагрузке тонких непологих сферических оболочек и влияние на нее несовершенства края. Тр. 8 Всес. конф. по теории оболочек и пластин, «Наука», 1973, стр. 316—320.

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРЫЖКЕ НА ЛЫЖАХ С ТРАМПЛИНА

И. А. Крылов, Л. П. Ремизов

(Москва)

В зависимости от мощности трамплина лыжник совершает полет в течение 2.5—4.5 сек и может влиять на траекторию движения в воздухе посредством изменения угла атаки тела. Спрашивается, каким образом следует спортсмену управлять своим телом в полете, чтобы приземлиться как можно дальше?

Ниже представлены формулировка этой задачи и ее численное решение на ЭВМ как задачи оптимального управления при следующих предположениях: рассматривается движение центра масс системы лыжник — лыжи под действием силы тяжести, силы сопротивления R и подъемной силы Y . Уравнения движения и начальные условия имеют вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{m} - g \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{Y}{mv} - \frac{g \cos \theta}{v}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta$$

$$R = \frac{1}{2} \rho v^2 S c_x, \quad Y = \frac{1}{2} \rho v^2 S c_y$$

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad v = v_0, \quad \theta = \theta_0$$

Здесь t — время, x , y , v , θ — соответственно горизонтальная дальность, высота, модуль скорости и угол наклона скорости к оси x , m — масса системы, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность воздуха, S — характерная площадь, c_x и c_y — аэродинамические коэффициенты.

Зависимости c_y и c_x от угла атаки α взяты из [1], где приведены экспериментальные кривые, полученные в результате продувки лыжников в аэродинамической трубе. Для удобства вычислений эти кривые аппроксимированы зависимостями $c_y(\alpha) = -0.000250 \alpha^2 + 0.0228 \alpha - 0.0920$, $c_x(\alpha) = 0.0103 \alpha$.

Угол атаки может меняться в интервале от $\alpha_{\min}(t)$ до $\alpha_{\max}(t)$.

Движение моделируется на профиле трамплина г. Планица (Югославия), на котором был установлен абсолютный мировой рекорд дальности в прыжках — 165 м (см. фиг. 1; в правом верхнем углу дана схема углов и сил, действующих на лыжника в полете).

Требуется установить зависимость от времени угла атаки $\alpha(t)$ для максимальной дальности прыжка, измеряемой по профилю трамплина от стола отрыва. Очевидно,