

К ВОПРОСУ О ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ  
ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

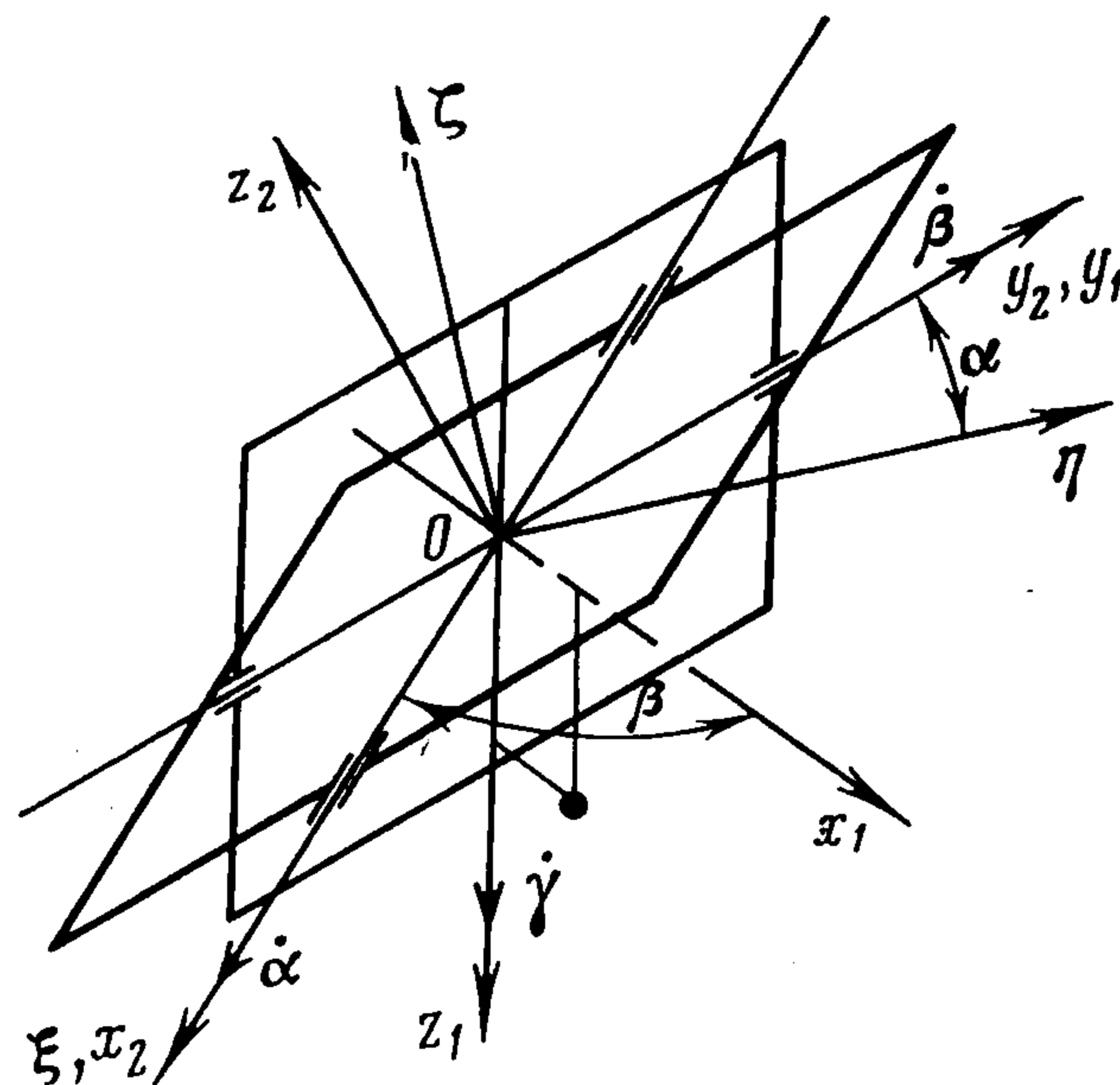
А. А. Богоявленский

(Москва)

Частные решения уравнений движения тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, когда ось внешнего кольца горизонтальна, рассматривались в работах [1,2].

Ниже рассматриваются частные решения указанной задачи, когда ось вращения внешнего кольца карданова подвеса горизонтальна и центр тяжести гироскопа и кожуха расположен не на оси симметрии эллипсоида инерции гироскопа, а в плоскости, проходящей через ось симметрии перпендикулярно оси вращения внутреннего кольца. Эти последние решения также дополняют одно другое симметричным образом, как и ранее указанные.

Неподвижная система координат  $O\xi\eta\zeta$  неизменно связана с осью вращения внешнего кольца карданова подвеса (фиг. 1). Ось  $\xi$  направлена по оси вращения внешнего кольца. Система осей координат  $Ox_2y_2z_2$  неизменно связана с внешним кольцом. Оси  $x_2$  и  $y_2$  направлены по осям вращения внешнего и внутреннего колец. Система координат  $Ox_1y_1z_1$  неизменно связана с кожухом. Ось  $y_1$  направлена по оси вращения кожуха, ось  $z_1$  — по оси вращения ротора. Оси  $x_1, y_1, z_1$  являются главными осями эллипсоида инерции кожуха относительно неподвижной точки  $O$ .



Фиг. 1

Предположим, что эллипсоид инерции ротора относительно точки  $O$  есть эллипсоид вращения вокруг оси  $z_1$ .

Примем обозначения:  $\alpha$  — угол поворота внешнего кольца карданова подвеса,  $\beta$  — угол поворота кожуха (внутреннего кольца),  $\gamma$  — угол поворота ротора в кожухе (угол собственного вращения гироскопа вокруг оси  $z_1$ ),  $A_2$  — момент инерции внешнего кольца карданова подвеса относительно оси  $\xi$ ;  $A_1, B_1, C_1$  — главные моменты инерции кожуха относительно осей  $x_1, y_1, z_1$ ;  $A, B, C$  — моменты инерции ротора относительно тех же осей.

Таблица косинусов углов между осями систем координат  $\xi, \eta, \zeta$  и  $x_1, y_1, z_1$  имеет следующий вид:

	$x_1$	$y_1$	$z_1$
(1) $\xi$	$\cos \beta$	0	$\sin \beta$
$\eta$	$\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha \cos \beta$
$\zeta$	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$

Общая кинетическая энергия системы равна

$$2T = (A_0 - C_0 \sin^2 \beta) \alpha'^2 + B_0 \beta'^2 + C (\gamma' + \alpha' \sin \beta)^2$$

$$A_0 = A + A_1 + A_2, \quad B_0 = A + B_1, \quad C_0 = A + A_1 - C_1$$

Предположим, что трения в подшипниках нет и активные силы, действующие на систему, — силы тяжести.

Пусть распределение масс рассматриваемой системы таково, что выполняются условия  $A_0 = B_0, C_0 = 0$ . Уравнения движения системы запишутся в виде уравнений

Лагранжа для переменных  $\alpha, \beta, \gamma$

$$(2) \quad \begin{aligned} d [A_0 \alpha' + C \sin \beta (\gamma' + \alpha' \sin \beta)] / dt &= \partial U / \partial \alpha \\ A_0 \beta'' - C \cos \beta (\gamma' + \alpha' \sin \beta) \alpha' &= \partial U / \partial \beta \\ d [C (\gamma' + \alpha' \sin \beta)] / dt &= \partial U / \partial \gamma \end{aligned}$$

Имеет место интеграл кинетической энергии

$$(3) \quad A_0 (\alpha'^2 + \beta'^2) + C (\gamma' + \alpha' \sin \beta)^2 = 2U + 2h$$

Направим ось  $\zeta$  неподвижной системы координат вертикально вверх, ось  $\xi$  расположена горизонтально (фиг. 1). Предположим, что центр тяжести ротора и кожуха лежит в плоскости  $x_1 z_1$  и имеет в ней координаты  $x_0, z_0$ .

Тогда, согласно таблице (1), силовая функция имеет вид

$$(4) \quad \begin{aligned} U &= mg \cos \alpha (x_0 \sin \beta - z_0 \cos \beta) \\ (m &- \text{масса ротора и кожуха}) \end{aligned}$$

В этом случае уравнения движения (2), кроме интеграла (3), допускают интеграл, соответствующий циклической координате  $\gamma$

$$(5) \quad \gamma' + \alpha' \sin \beta = r_0 \quad (r_0 = \text{const})$$

При частном значении  $r_0 = 0$  существует еще один первый интеграл

$$(6) \quad A_0 \alpha' \beta' = mg \sin \alpha (x_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta) + l \quad (l = \text{const})$$

Сделаем замену переменных

$$(7) \quad \sigma = \beta + \alpha, \quad \omega = \beta - \alpha$$

Уравнения движения при силовой функции (4) и  $r_0 = 0$  дают первые интегралы

$$(8) \quad \begin{aligned} A_0 \sigma'^2 &= 2mg (x_0 \sin \sigma - z_0 \cos \sigma) + l_1 \\ A_0 \omega'^2 &= 2mg (x_0 \sin \omega - z_0 \cos \omega) + l_2 \\ (l_1 + l_2 &= 4h, \quad l_1 - l_2 = 4l) \end{aligned}$$

В соответствии с интегралами (3) и (6) постоянные  $h, l$  и  $l_1, l_2$  связаны соотношениями, указанными в скобках.

Введем обозначения для постоянных

$$(9) \quad a = \frac{h+l}{3A_0} = \frac{l_1}{6A_0}, \quad b = \frac{h-l}{3A_0} = \frac{l_2}{6A_0}, \quad n = \frac{mgx_0}{A_0}, \quad c = \frac{mgz_0}{A_0}$$

Сделаем замену переменных

$$(10) \quad n \sin \sigma - c \cos \sigma + a = -2\mu, \quad n \sin \omega - c \cos \omega + b = -2\nu$$

Уравнения (8) в новых переменных

$$(11) \quad \begin{aligned} (dw/dt)^2 &= 4w^3 - (3\kappa^2 + \Delta^2)w - \kappa(\kappa^2 - \Delta^2) \\ (w = \mu &\text{ при } \kappa = a, \quad w = \nu \text{ при } \kappa = b, \quad \Delta^2 = c^2 + n^2) \end{aligned}$$

Уравнению (11) удовлетворяет функция Вейерштрасса  $\wp_1(\tau)$  с инвариантами  $g_2'$ ,  $g_3'$  и  $\wp_2(\tau)$  с инвариантами  $g_2''$ ,  $g_3''$

$$g_2' = 3a^2 + \Delta^2, \quad g_3' = a(a^2 - \Delta^2), \quad g_2'' = 3b^2 + \Delta^2, \quad g_3'' = b(b^2 - \Delta^2)$$

если положить  $d\tau/dt = \pm 1$ .

Возьмем знак плюс. Согласно (10) получим

$$-2\wp_1(\tau) = n \sin \sigma - c \cos \sigma + a, \quad -2\wp_2(\tau) = n \sin \omega - c \cos \omega + b$$

Первое равенство дает для  $\sin \sigma$  квадратное уравнение, решая которое, получим

$$\sin \sigma = 1/\Delta^2 \{ -n(2\wp_1 + a) \pm n[\Delta^2 - (2\wp_1 + a)^2]^{1/2} \}$$

Аналогичное выражение получим для  $\sin \omega$ .

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$  выражаются в функциях Вейерштрасса, согласно замене переменных (7) и полученным выражениям  $\sin \sigma$ ,  $\sin \omega$ . Угол  $\gamma$  вычисляется квадратурой из  $r_0 = 0$ .

Правая часть уравнения (11) есть полином третьей степени от  $w$ , который имеет три вещественных корня

$$e_{1,2} = \frac{1}{2} (\mp \Delta - \kappa), \quad e_3 = \kappa$$

Пусть  $n > 0$ ,  $c > 0$ . Из равенств (10) можно вывести следующее заключение.

Рассмотрим плоскость  $z_1, x_1$  (фиг. 2). Проведем в ней прямоугольные оси  $z^*x^*$ , получающиеся поворотом осей  $z_1, x_1$  на угол  $\pi/2 - \lambda$  против часовой стрелки.

Возьмем в плоскости центр тяжести ротора и кожуха с координатами  $z_0, x_0$ . В новых осях он будет иметь координаты

$$(12) \quad z^* = x_0 \cos \lambda + z_0 \sin \lambda, \quad x^* = x_0 \sin \lambda - z_0 \cos \lambda$$

Обозначим через  $\varepsilon$  угол наклона радиуса вектора точки  $(z_0, x_0)$  и оси  $-x^*$ . Если принять  $\lambda = \sigma$ , то

$$\sin \varepsilon = \frac{x_0 \sin \sigma - z_0 \cos \sigma}{(z_0^2 + x_0^2)^{1/2}} = -\frac{2\mu + a}{\Delta}$$

Следовательно, переменная  $\mu$  изменяется в пределах  $e_1 \leq \mu \leq e_2$ . Такое же соотношение можно вывести и для переменной  $\nu$ :  $e_1 \leq \nu \leq e_2$ . Действительные механические движения будут иметь место при  $e_3 > e_1$ . Это условие для переменных  $\mu$  и  $\nu$  дает соответственно неравенства

$$h \pm l + mg(x_0^2 + z_0^2)^{1/2} > 0$$

При других ограничениях на расположение центра тяжести ротора и кожуха, например  $n > 0$ ,  $c < 0$  (и т. д.), таким же образом можно найти ограничения на постоянные интегралов для действительного механического движения.

Если направить ось  $\eta$  неподвижной системы координат вертикально вверх, то, согласно (1), силовая функция будет иметь вид

$$(13) \quad U = -mg \sin \alpha (x_0 \sin \beta - z_0 \cos \beta)$$

Уравнения движения (2) допускают первые интегралы — кинетической энергии и соответствующий циклической координате  $\gamma$ . При частном значении  $r_0 = 0$  существует еще один интеграл

$$A_0 \alpha' \beta' = mg \cos \alpha (x_0 \cos \beta + z_0 \sin \beta) + l$$

После замены переменных (7) уравнения движения дают первые интегралы

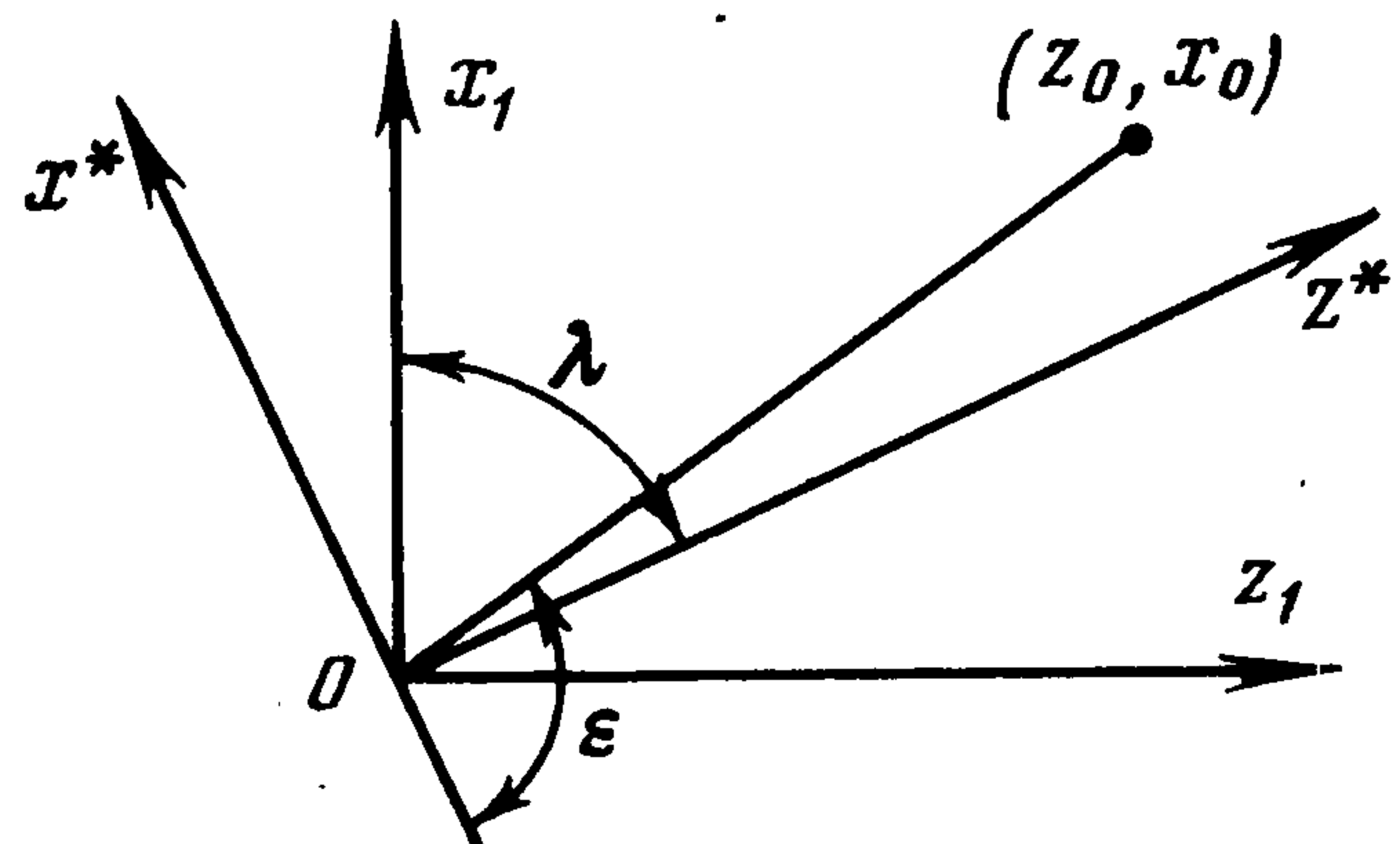
$$(14) \quad \begin{aligned} A_0 \sigma'^2 &= 2mg(x_0 \cos \sigma + z_0 \sin \sigma) + l_1 \\ A_0 \omega'^2 &= -2mg(x_0 \cos \omega + z_0 \sin \omega) + l_2 \end{aligned}$$

Углы Эйлера и ограничения на постоянные интегралов для действительного механического движения вычисляются таким же образом, как указано ранее.

Указанные движения могут быть интерпретированы ранее найденными движениями [1,2] следующим образом.

В плоскости  $z_1x_1$  (фиг. 2) расстояние от начала координат до центра тяжести будет  $A_0 \Delta / mg$

$$(15) \quad z^* = \frac{A_0}{mg} \Delta \sin \varepsilon, \quad x^* = -\frac{A_0}{mg} \Delta \cos \varepsilon, \quad \lambda' = \varepsilon'$$



Фиг. 2

Уравнения (8) с учетом (9), согласно (12) и (15), можно записать так:

$$(16) \quad \varepsilon'^2 = 2(-\Delta \cos \varepsilon + 3\kappa) \\ (\sigma = \lambda \text{ при } \kappa = a, \omega = \lambda \text{ при } \kappa = b)$$

Уравнения (14) таким же образом запишутся в виде

$$(17) \quad \varepsilon'^2 = 2(j \Delta \sin \varepsilon + 3\kappa) \\ (\sigma = \lambda \text{ при } \kappa = a, j = +1; \omega = \lambda \text{ при } \kappa = b, j = -1)$$

Уравнения (16) совпадают с уравнениями (9) работы [2], если сделать подстановку

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \psi & \theta & x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & I & A^\circ & B^\circ & C^\circ & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta - \pi/2 & \eta & \xi & \xi & y_1 & x_1 & -z_1 & A_2 & B_1 & A_1 & C_1 & \sigma - \pi/2 & \omega - \pi/2 \end{array}$$

Уравнения (17) совпадают с уравнениями (9) работы [1] при той же подстановке.

Рассмотрение движения в осях  $z^*x^*$  представляет определенные неудобства, так как они с течением времени меняют свое расположение по отношению к основным элементам карданова подвеса (что исключено для осей  $z_1x_1$ ) и могут, по-видимому, служить для интерпретации движения.

Поступила 26VI1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Богоявленский А. А. Частное решение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1959, т. 22, вып. 5.
2. Богоявленский А. А. Об одном частном решении задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.

УДК 539.3

### ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ВЕРХНЕГО КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ НЕПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

М. Ю. Жуков, Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Асимптотическим методом [1,2] определяются верхние критические давления непологих сферических оболочек при равномерном внешнем давлении в зависимости от угла раствора и способа опорного закрепления. Рассматривается случай, когда параметр относительной тонкостенности достаточно мал. Найденные значения хорошо согласуются с результатами расчетов прямыми численными методами и позволяют продолжить их в область сколь угодно тонких оболочек, где машинный счет становится малоэффективным.

1. Уравнения и краевые условия. Рассматриваются уравнения Рейсснера для непологих сферических оболочек при осесимметричной деформации [1]

$$(1.1) \quad \varepsilon^2 \left\{ \sin \xi (\Phi - \xi)'' + \cos \xi (\Phi - \xi)' - \frac{\cos \Phi}{\sin \xi} (\sin \Phi - \sin \xi) + \nu (\cos \Phi - \cos \xi) \right\} = \\ = \Psi \sin \Phi - T \cos \Phi \\ \varepsilon^2 \left\{ \sin \xi \Psi'' + \cos \xi \Psi' - \left[ \frac{\cos^2 \Phi}{\sin \xi} - \nu \Phi' \cos \Phi \right] \Psi \right\} = \cos \Phi - \cos \xi + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \nu \sin \Phi T' - (\sin^2 \xi p)' + \left[ \frac{\sin \Phi \cos \Phi}{\sin \xi} + \nu \Phi' \cos \Phi \right] T - \nu \sin \xi p \cos \Phi \right\}$$