на фиг. 4, отмечены грубые качественные структуры, соответствующие разным областям фазового пространства. Негрубым структурам на фиг. 3, помеченным двумя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые фиг. 4, разделяющие соответствующие области.

Поступила 10 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schuller M., Gärtner W. W.* Large-signal circuit theory for negative-resistance diodes, in particular tunnel diodes. Proc. IRE, 1961, vol. 49, No. 8, p. 1268—1278.
2. *Miranker W. L.* The occurence of limit cycles in the equations of a tunnel diode circuit. IRE Trans. on Circuit Theory, 1962, vol. CT-9, No. 4, p. 316—320.
3. *Ваганов В. И., Корж В. И.* Качественный анализ переходного процесса в туннельно-диодном триггере. Изв. вузов. Радиотехника, 1965, т. 8, № 2.
4. *Лисицкая И. Н., Синицкий Л. А.* Исследование периодических режимов в автономных цепях с нелинейным отрицательным сопротивлением. В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Киев, «Наукова думка», 1965, вып. 3, стр. 39—45.
5. *Лисицкая И. Н.* Исследование электрической цепи с нелинейным отрицательным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации. Изв. вузов. Радиофизика, 1966, т. 9, № 5.
6. *Ortel W. C. G.* The monostable tunnel diode trigger circuit. Proc. IEEE, 1966, vol. 54, No. 7, p. 936—946.
7. *Mizushina S.* Triggerd operations of tunnel diode oscillators and pulse generators. IEEE J. Solid-State Circuits, 1967, vol. SC-2, No. 3, p. 73—81.
8. *Гришкина Н. А., Королев В. И.* Динамика схемы на туннельных диодах. Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, № 7.
9. *Сидоров А. С.* Теория и проектирование нелинейных импульсных схем на туннельных диодах. М., «Сов. радио», 1971.
10. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.

УДК 534

ДВУХЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Б. И. Чешанков

(София)

Исследуются двухчастотные колебания консервативной системы с n степенями свободы. Задача сводится к изучению канонических систем, описывающих резонансные явления.

Одночастотные и многочастотные колебания рассматривались ранее в работах [1–3].

1. Рассмотрим консервативную систему с n степенями свободы, которая имеет устойчивое положение равновесия и совершает относительно малые движения в его окрестности. Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(1.1)\qquad \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot{q}_k + c_{ik}q_k) = -\sum_{k,j=1}^{n}\left[a_{ik}^{(j)}\left(q_k\ddot{q}_j + \frac{1}{2}\dot{q}_k\dot{q}_j\right) + \frac{1}{2}c_{ik}^{(j)}q_kq_j\right] -$$

$$-\sum_{k,j,s=1}^{n}\left[\frac{1}{2}a_{ik}^{(js)}\left(q_kq_j\ddot{q}_s + q_k\dot{q}_j\dot{q}_s\right) + \frac{1}{6}c_{ik}^{(js)}q_kq_jq_s\right] - \ldots\ (i = 1, 2, \ldots n)$$

Пусть в системе имеются двухчастотные колебания с частотами ω_1 и $\omega_2(\omega_2 \geqslant \omega_1)$. Рассмотрим резонансные двухчастотные решения системы (1.1).

Рангом резонанса будем называть степень резонирующих членов в правых частях уравнений (1.1). Для них отношение ω_2 / ω_1 является существенным.

2. Рассмотрим сначала резонанс второго порядка. Положим в (1.1) $q_k = \varepsilon \bar{q}_k$, где ε — малый положительный параметр и далее черту сверху отбрасываем. Введем безразмерное время $\tau = \omega_1 t$. Тогда из (1.1) находим

$$\sum_{k=1}^{p} (a_{ik}q_k'' + \bar{c}_{ik}q_k) = -\varepsilon \sum_{k,j=1}^{n} \left[a_{ik}^{(j)}\left(q_k q_j'' + \frac{1}{2} q_k' q_j'\right) + \frac{1}{2} \bar{c}_{ik}^{(j)} q_k q_j\right] \tag{2.1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

$$\bar{c}_{ik} = \frac{c_{ik}}{\omega_1^2}, \qquad \bar{c}_{ik}^{j} = \frac{c_{ik}^{(j)}}{\omega_1^2}, \qquad \bar{c}_{ik}^{(js)} = \frac{c_{ik}^{(js)}}{\omega_1^2}, \ldots$$

где члены степени выше второй отброшены.

Обозначим $\omega_2 / \omega_1 = \beta$ ($\beta \geqslant 1$). Двухчастотные решения системы (2.1) ищем в виде

$$q_k = L_k^{(1)} B \cos(\tau - \psi) + L_k^{(2)} A \cos(\beta\tau - \varphi) + \varepsilon q_{k1} + \varepsilon^2 q_{k2} + \ldots \tag{2.2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

где A, B, φ, ψ — медленно меняющиеся функции τ, а q_{k1}, $q_{k2}, \ldots$ — аддитивные поправки, которые выражаются однозначно через A, B, φ, ψ и τ. Нормальные функции $L_k^{(j)}$ (k, $j = 1, 2, \ldots n$) получаются из систем алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (-a_{ik}\omega_j^2 + c_{ik}) L_k^{(j)} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

и обладают свойствами ортогональности, т. е.

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} L_i^{(j)} L_k^{(s)} = 0, \qquad \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} L_i^{(j)} L_k^{(s)} = 0 \qquad (j \neq s)$$

Все собственные частоты $\omega_j (j = 1, 2, \ldots n)$ при сделанных предположениях являются рациональными числами.

Подставим (2.2) в (2.1), умножим i-е уравнение на $L_i^{(1)}$ и сложим все уравнения. Потом снова умножим i-е уравнение на $L_i^{(2)}$ и опять сложим все уравнения. Получим

$$(B'' + 2B\psi' - B\psi'^2)\cos(\tau - \psi) + (B\psi'' - 2B' + 2B'\psi')\sin(\tau - \psi) + \tag{2.3}$$

$$+ \varepsilon \frac{1}{m_1} \sum_{i,k=1}^{n} L_i^{(1)} (a_{ik} q_{k1}'' + \bar{c}_{ik} q_{k1}) = -\varepsilon F_1$$

$$(A'' + 2\beta A\varphi' - A\varphi'^2)\cos(\beta\tau - \varphi) + (A\varphi'' - 2\beta A' + 2A'\varphi')\sin(\beta\tau - \varphi) +$$

$$+ \varepsilon \frac{1}{m_2} \sum_{i,k=1}^{n} L_i^{(2)} (a_{ik} q_{k1}'' + \bar{c}_{ik} q_{k1}) = -\varepsilon F_2$$

Здесь

$$F_r = \frac{1}{m_r} \left\{ \frac{1}{4} [(q_{11}^{(r)} - h_{11}^{(r)}) B^2 + (q_{22}^{(r)} - \beta^2 h_{22}^{(r)}) A^2] + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} (g_{11}^{(r)} - 3h_{11}^{(r)}) B^2 \cos(2\tau - 2\psi) +$$

$$+ \frac{1}{4} (g_{22}^{(r)} - 3\beta^2 h_{22}^{(r)}) A^2 \cos(2\beta\tau - 2\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} [g_{12}^{(r)} - h_{12}^{(r)} (1 - \beta + \beta^2)] AB \cos[(\beta - 1)\tau - \varphi + \psi] +$$

$$+\frac{1}{2}[g_{12}^{(r)}-h_{12}^{(r)}(1+\beta+\beta^2)]\,AB\cos[(\beta+1)\tau-\varphi-\psi]\}\ (r=1,2)$$

$$m_r=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}L_i^{(r)}L_k^{(r)}>0$$

$$h_{sq}^{(r)}=\sum_{i,k,j=1}^{n}a_{ik}^{(j)}L_i^{(s)}L_k^{(q)}L_j^{(r)},\quad g_{sq}^{(r)}=\sum_{i,k,j=1}^{n}\bar{c}_{ik}^{(j)}L_i^{(s)}L_k^{(q)}L_j^{(r)}$$

Из последних выражений следует, что

$$h_{sq}^{(r)}=h_{sr}^{(q)}=\ldots,\qquad g_{sq}^{(r)}=q_{sr}^{(q)}=\ldots$$

т. е. соответственные коэффициенты $h_{sq}^{(r)}$, $g_{sq}^{(r)}$ с одинаковыми индексами равны, независимо от расположения индексов.

Для решения системы (2.3) используем одно дополнение [4] к существующим асимптотическим методам в теории нелинейных колебаний.

Из анализа системы (2.3) следует теорема.

Теорема 1. Резонанс второго ранга возможен только при $\beta\approx 2$.

Пусть $\beta\approx 2$. Тогда, используя тригонометрические тождества для $\cos(\tau-\psi+\lambda)$ и $\cos(\beta\tau-\varphi-\lambda)$, где $\lambda=(\beta-2)\tau-\varphi+2\psi$, и сравнивая соответствующие члены в (2.3), получим вариационную систему

$$\begin{aligned}
&B''+2B\psi'-B\psi'^2=-\varepsilon\frac{1}{2m_1}[g_{12}^{(1)}-h_{12}^{(1)}(1-\beta+\beta^2)]\,AB\cos\lambda\\
&B\psi''-2B'+2B'\psi'=\varepsilon\frac{1}{2m_1}[g_{12}^{(1)}-h_{12}^{(1)}(1-\beta+\beta^2)]\,AB\sin\lambda\\
&A''+2\beta A\varphi'-A'^2=-\varepsilon\frac{1}{4m_2}(q_{11}^{(2)}-3h_{11}^{(2)})\,B^2\cos\lambda\\
&A\varphi''-2\beta A'+2'\varphi'=-\varepsilon\frac{1}{4m_2}(g_{11}^{(2)}-3h_{11}^{(2)})\,B^2\sin\lambda
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Будем искать решение системы (2.3) только в первом приближении, поэтому уравнений для нахождения аддитивных поправок составлять не будем.

Из системы (2.4), учитывая, что $\beta\approx 2$, с точностью до членов первого порядка малости относительно ε, находим укороченную систему Ван дер Поля относительно переменных A, B, φ и ψ.

Из первого и третьего уравнений (2.4) получаем интеграл

$$\sigma^2A^2+B^2=\sigma^2\varkappa^2\qquad(\sigma^2=4\,m_2\,/\,m_1)\tag{2.5}$$

где $\varkappa^2$ — постоянная интегрирования, пропорциональная полной энергии механической системы. Соотношение (2.5) соответствует интегралу энергии и связывает амплитуды A и B для каждого момента времени. Из (2.5) видно, что если одна из амплитуд уменьшается, то другая возрастает.

Из (2.4), учитывая (2.5), получаем относительно переменных A^0, λ автономную систему

$$dA^\circ/du=(1-A^{\circ 2})\sin\lambda,\quad d\lambda/du=2m+\frac{1}{A^\circ}(1-A^{\circ 2})\cos\lambda\tag{2.6}$$

Здесь

$$u=\varepsilon\tau\frac{g_{11}^{(2)}-3h_{11}^{(2)}}{4m_1}\varkappa,\qquad A^\circ=\frac{A}{\varkappa},\qquad 2m=\frac{\beta-2}{\varepsilon}\,\frac{4m_1}{(g_{11}^{(2)}-3h_{11}^{(2)})\varkappa}$$

В выражение для m нельзя подставить $\beta\approx 2$, так как предполагаем, что расстройка $\beta-2$ имеет порядок малости ε.

Система вида (2.6) относительно амплитуды A° или $B^0 = B / (\sigma \varkappa)$ и переменной λ (включающей фазы φ и ψ), с минимальным числом параметров, будем называть каноническими для рассматриваемого резонанса.

Из (2.6) после исключения u и интегрирования находим (c_0 — постоянная интегрирования)

$$mA^{\circ 2} + A^\circ (1 - A^{\circ 2}) \cos \lambda = c_0$$

Исследование системы (2.6) на фазовой плоскости XY, для которой $X = A^\circ \cos \lambda$, $Y = A^\circ \sin \lambda$, т. е. A° и λ — полярные координаты, дает полное представление о всех возможных движениях механической системы. Фазовые траектории системы (2.6) определяются выражением (2.7) и все они симметричны относительно оси X. Ввиду (2.5) все реальные траектории лежат на границе или внутри круга $A^\circ = 1$.

Каноническая система (2.6) подробно исследована в [5,6] при изучении резонансных движений конкретных механических систем с двумя степенями свободы.

3. Рассмотрим резонанс третьего ранга. Пусть у рассматриваемой механической системы есть некоторая внутренняя симметрия, и кинетическая и потенциальная энергии симметричны относительно обобщенных координат q_i ($i = 1, 2, \ldots n$).

Тогда $a_{ik}^{(j)} = c_{ik}^{(j)} = 0, \ldots$ и система (1.1) содержит только члены нечетной степени. В случае, когда такой симметрии нет, для резонанса третьего порядка получаются опять те же основные результаты, хотя и после более продолжительных выкладок, так как вычисления надо проводить до второго приближения.

Теперь в (1.1) подставим $q_k = \varepsilon^{1/2} \bar{q}_k$, опять после этого отбрасываем черту сверху и вводим безразмерное время $\tau = \omega_1 t$. Получим систему

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} q_k'' + \bar{c}_{ik} q_k) = -\varepsilon \sum_{k,j,s=1}^{n} \Big[\frac{1}{2} a_{ik}^{(js)} (q_k q_j q_s'' + q_k q_j' q_s') + \tag{3.1}$$
$$+ \frac{1}{6} \bar{c}_{ik}^{(js)} q_k q_j q_s \Big] \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Решение системы (3.1) ищем в виде (2.2). После аналогичных преобразований снова получаем систему (2.3), однако теперь

$$F_r = \frac{1}{m_r} \Big\{ \frac{1}{8} [(g_{11}^{(2r)} - 2h_{11}^{(1r)}) B^3 + 2 (g_{12}^{(2')} - h_{12}^{(2r)} (\beta^2 + 1)) A^2 B] \cos (\tau - \psi) +$$
$$+ \frac{1}{8} [(g_{22}^{\prime (2r)} - 2\beta^2 h_{22}^{(2r)}) A^3 + 2 (g_{12}^{(1r)} - h_{12}^{(1r)} (1 + \beta^2)) AB^2] \cos (\beta\tau - \varphi) +$$
$$+ \frac{1}{24} (g_{11}^{(1r)} - 6h_{11}^{(1r)}) B^3 \cos (3\tau - 3\psi) + \frac{1}{24} (g_{22}^{(2r)} - 6\beta^2 h_{22}^{(2r)}) A^3 \cos (3\beta\tau - 3\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{8} [g_{12}^{(1r)} - h_{12}^{(1r)} (\beta^2 - 2\beta + 3)] AB^2 \cos [(\beta - 2) \tau - \varphi + 2\psi] +$$
$$+ \frac{1}{8} [g_{12}^{(1r)} - h_{12}^{(1r)} (\beta^2 + 2\beta + 3)] AB^2 \cos [(\beta + 2) \tau - \varphi - 2\psi] +$$
$$+ \frac{1}{8} [g_{22}^{(1r)} - h_{22}^{(1r)} (1 - 2\beta + 3\beta^2)] A^2 B \cos [(2\beta - 1) \tau - 2\varphi + \psi] +$$
$$+ \frac{1}{8} [g_{22}^{(1r)} - h_{22}^{(1r)} (1 + 2\beta + 3\beta^2)] A^2 B \cos [(2\beta + 1) \tau - 2\varphi - \psi] \Big\} \quad (r = 1, 2)$$

$$h_{rt}^{(pq)} = \sum_{i, k, j, s=1}^{n} a_{ik}^{(js)} L_i^{(r)} L_k^{(t)} L_j^{(p)} L_s^{(q)}, \qquad g_{rt}^{(pq)} = \sum_{i, k, j, s=1}^{n} \bar{c}_{ik}^{(js)} L_i^{(r)} L_k^{(t)} L_j^{(p)} L_s^{(q)}$$

Как и выше, имеем

$$h_{rt}^{(pq)} = h_{rq}^{(pt)} = \ldots, \qquad g_{rt}^{(pq)} = g_{rq}^{(pt)} = \ldots$$

Из анализа системы (2.3) в этом случае следует теорема.

Теорема 2. Резонанс третьего ранга возможен только при $\beta \approx 1$ и $\beta \approx 3$.

Пусть сначала $\beta \approx 1$. Используя тождества для $\cos(\tau - \psi \pm \lambda)$, $\cos(\tau - \psi + 2\lambda)$, $\cos(\beta\tau - \varphi \pm \lambda)$ и $\cos(\beta\tau - \varphi - 2\lambda)$, где $\lambda = (\beta - 1)\tau - \varphi + \psi$, и учитывая $\beta \approx 1$, получаем укороченную систему Ван дер Поля

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad \frac{dB}{\varepsilon d\tau} &= -\frac{1}{16m_1}\{[(g_{12}^{(22)} - 2h_{12}^{22})A^3 + (g_{12}^{(11)} - 2h_{12}^{(11)})AB^2]\sin\lambda + \\
&+ (g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})A^2B\sin 2\lambda\} \\
\frac{d\psi}{\varepsilon d\tau} &= -\frac{1}{16m_1}\{(g_{11}^{(11)} - 2h_{11}^{(11)})B^2 + 2(g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})A^2 + (g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)}) \times \\
&\times A^2\cos 2\lambda + [(g_{22}^{(12)} - 2h_{22}^{(12)})\frac{A^3}{B} + 3(g_{12}^{(11)} - 2h_{12}^{(11)})AB]\cos\lambda\} \\
\frac{dA}{\varepsilon d\tau} &= \frac{1}{16m_2}\{(g_{12}^{(11)} - 2h_{12}^{(11)})B^3 + (g_{12}^{(22)} - 2h_{12}^{(22)})A^2B\sin\lambda + \\
&+ (g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})AB^2\sin 2\lambda\} \\
\frac{d\varphi}{\varepsilon d\tau} &= -\frac{1}{16m_2}\Big\{(g_{22}^{(12)} - 2h_{22}^{(12)})A^2 + 2(g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})B^2 + (g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)}) \times \\
&\times B^2\cos 2\lambda + [(g_{12}^{(11)} - 2h_{12}^{(11)})\frac{B^3}{A} + 3(g_{12}^{(22)} - 2h_{12}^{(22)})AB]\cos\lambda\Big\}
\end{aligned}
$$

Из первого и третьего уравнений (3.2) получаем снова интеграл (2.5), однако теперь $\sigma^2 = m_2 / m_1$.

Из (3.2) и (2.5) получаем каноническую систему для резонанса

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad dA^\circ / \partial u &= (1 - A^{\circ 2})^{3/2}\ [b(1 - A^{\circ 2}) + cA^{\circ 2}]\sin\lambda + \\
&+ 2A^\circ(1 - A^{\circ 2})\sin 2\lambda \\
\partial\lambda / du &= 2m + 4aA^{\circ 2} + [b(1 - 4A^{\circ 2})(1 - A^{\circ 2})^{1/2}A^{\circ -1} + \\
&+ cA^\circ(3 - 4A^{\circ 2})(1 - A^{\circ 2})^{-1/2}]\times \\
&\times\cos\lambda + 2(1 - 2A^{\circ 2})\cos 2\lambda
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
u = \varepsilon\tau\frac{1}{32m_1}(g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})\varkappa^2, \qquad b = 2\sigma\frac{g_{12}^{(11)} - 2h_{12}^{(11)}}{g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)}}
$$

$$
m = \frac{\beta - 1}{\varepsilon}\,\frac{16m_1}{(g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})\varkappa^2} - \sigma^2\frac{g_{11}^{(11)} - 2h_{11}^{(11)}}{g_{22}^{(11)} - 2_{22}^{(11)}} + 2
$$

$$
4a = 2\frac{g_{22}^{(22)} - 2h_{22}^{(22)}}{(g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)})\sigma^2} + 2\sigma^2\frac{g_{11}^{(11)} - 2h_{11}^{(11)}}{g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)}} - 8
$$

$$
c = \frac{2}{\sigma}\,\frac{g_{22}^{(12)} - 2h_{22}^{(12)}}{g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)}}, \qquad A^\circ = \frac{A}{\varkappa}, \qquad g_{22}^{(11)} - 2h_{22}^{(11)} \neq 0
$$

Система (3.3) имеет интеграл (c_0 — постоянная интегрирования)

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & mA^{\circ 2} + aA^{\circ 4} + [bA^\circ(1 - A^{\circ 2})^{3/2} + cA^{\circ 3}(1 - A^{\circ 2})^{1/2}]\cos\lambda + A^{\circ 2}\times \\
&\times(1 - A^{\circ 2})\cos 2\lambda = c_0
\end{aligned}
$$

4. Исследуем систему (3.3) на фазовой плоскости XY ($X = A^\circ\cos\lambda$, $Y = A^\circ \times \sin\lambda$, где A° и λ — полярные координаты).

Фазовые траектории системы (3.3) определяются выражением (3.4) и все они симметричны относительно оси X. Все реальные траектории лежат на границе или внутри круга $A^\circ = 1$.

Определим в первую очередь особые точки системы (3.3). Из условий $dA^\circ / du = d\lambda / du = 0$ видно, что существуют три вида особых точек: точки (a), которые лежат на оси X; точки ($б$), которые лежат на кривой

$$
K\{b(1 - A^{\circ 2}) + cA^{\circ 2} + 4A^\circ(1 - A^{\circ 2})^{1/2}\cos\lambda = 0\}
$$

(это всегда две точки, расположенные симметрично относительно оси X) и точки (*в*), которые лежат на граничной окружности $A° = 1$.

Система (3.3) в частном случае $b = c = 0$ подробно исследована в [7].

Рассмотрим сначала случай $b \neq 0$, $c = 0$. Теперь кривая K представляет собой полуэллипс.

Полярный угол точек (*в*) определяется выражением

$$\cos\lambda = \pm\left(\frac{1+m}{2} + a\right)^{1/2}$$

т. е. это четыре точки, расположенные симметрично относительно осей X и Y.

Абсциссы точек (*а*) определяются из уравнения

$$m^*X = -2a^*X^3 - \frac{1}{2}(1-4X^2)(1-X^2)^{1/2}\left(m^* = \frac{m+1}{b}, \quad a^* = \frac{a-1}{b}\right) \tag{4.1}$$

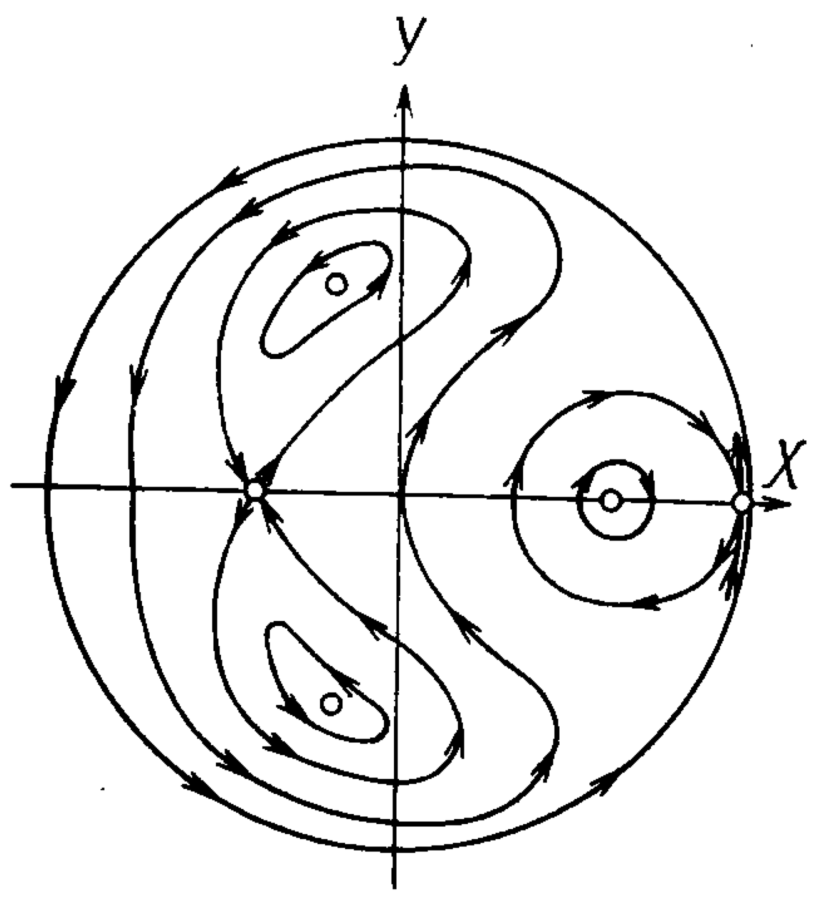
Из (4.1) видно, что точек (*а*) либо одна, либо три (за исключением граничных случаев). Наглядную картину о расположении особых точек (*а*) получим, решая уравнение (4.1) графически.

Точки (*б*) существуют для m в интервале

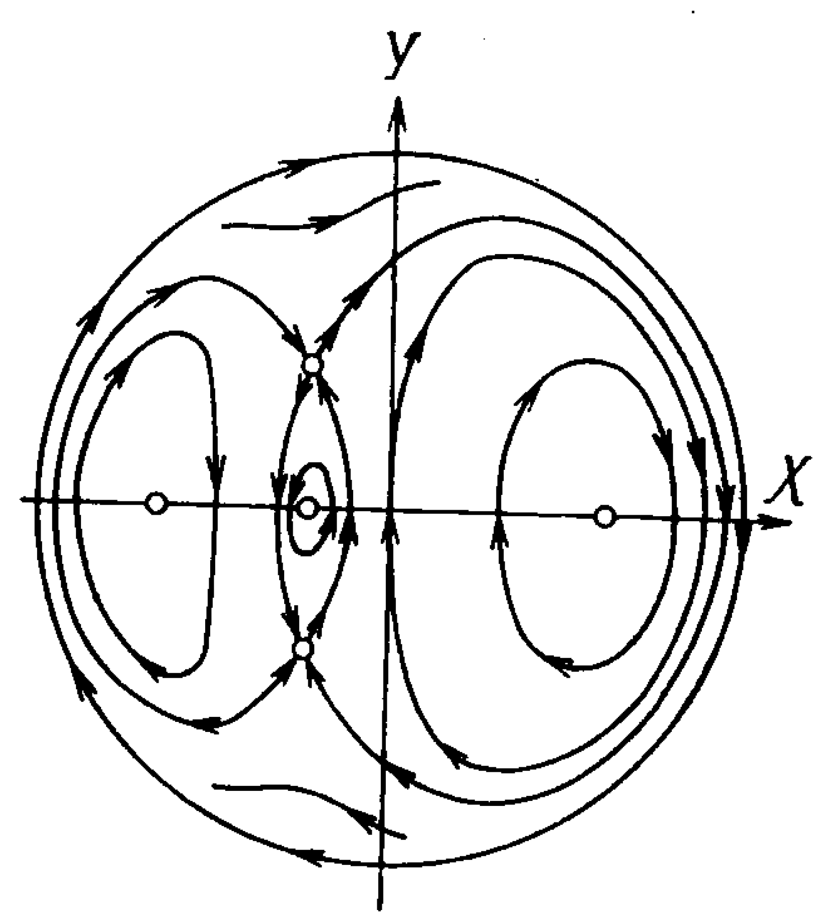
$$(m_{\delta_1}, m_{\delta_2}), \qquad m_{\delta_1} = [16 - b^2(5+2a)] \,/\, (16+b^2), \qquad m_{\delta_2} = -1-2a.$$

Точки (*в*) существуют в интервале $(-1-2a, 1-2a)$.

Различные типичные случаи картин фазовых траекторий определяются числом особых точек и их видом. Система (3.3) даже в случае $c = 0$ дает большое разнообразие таких типичных случаев, поэтому здесь отметим, только некоторые из них. Возможен



Фиг. 1



Фиг. 2

случай, когда существуют три особые точки (*а*) и точки (*б*) (см. фиг. 1, 2). На фиг. 1 точки (*б*) — центры, а из точек (*а*) две — седла и одна — центр. На фиг. 2 точки (*б*)— седла, в точки (*а*) — центры. На фиг. 3 показан случай, когда существуют три точки (*а*) (все центры) и точки (*в*) (все седла). На фиг. 4, 5 показаны случаи, когда существуют все возможные особые точки: три точки (*а*), две точки (*б*) и четыре точки (*в*). На фиг. 4 сепаратриса, проходящая через седловую точку (*а*), охватывает две точки (*б*), а на фиг. 5 такая же сепаратриса охватывает другие две точки (*а*).

Рассмотрим теперь случай $b = 0$, $c \neq 0$. В этом случае заменим переменную $A°$ на $B°$ ($B° = B \,/\, (\sigma\varkappa)$), используя соотношение (2.5).

Введя $u° = -u$, $m° = -m - 2a$, получим в новых обозначениях опять систему (3.3) при $b \neq 0$, $c = 0$, которая уже исследована.

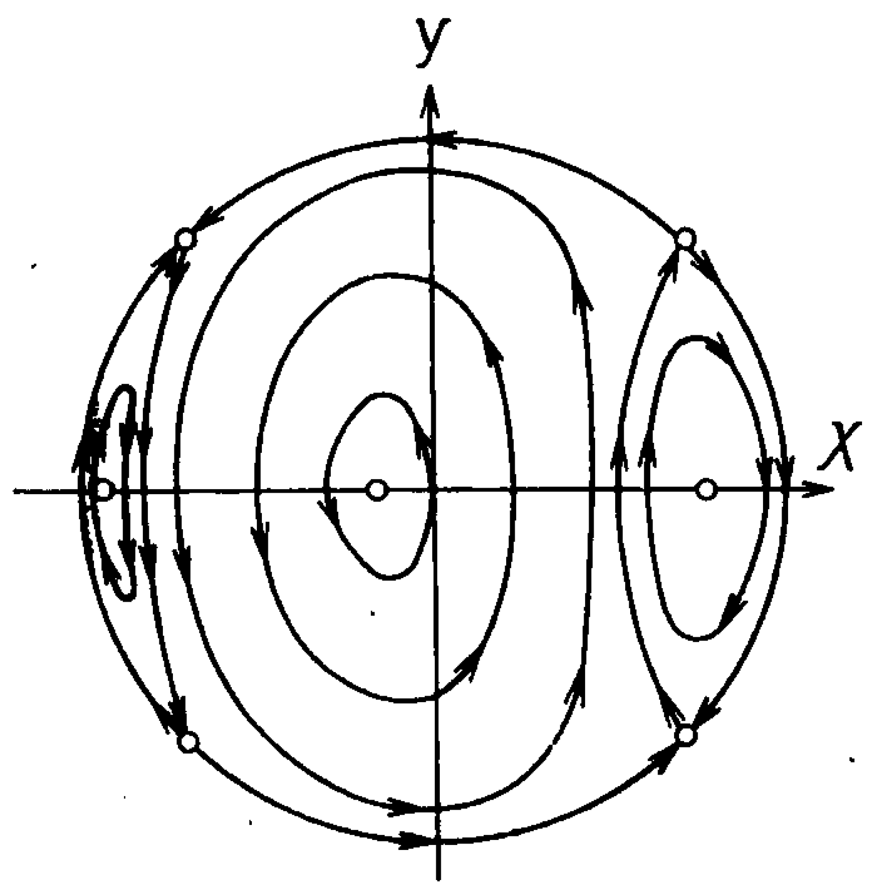
Теперь можно утверждать, что в случае $b = 0$, $c \neq 0$, столько же типичных случаев картин фазовых траекторий, сколько и в случае $b \neq 0$, $c = 0$.

Канонические системы относительно переменных $A°$, λ и $B°$, λ, для которых имеет место соотношение $A°^2 + B°^2 = 1$, будем называть круго-сопряженными.

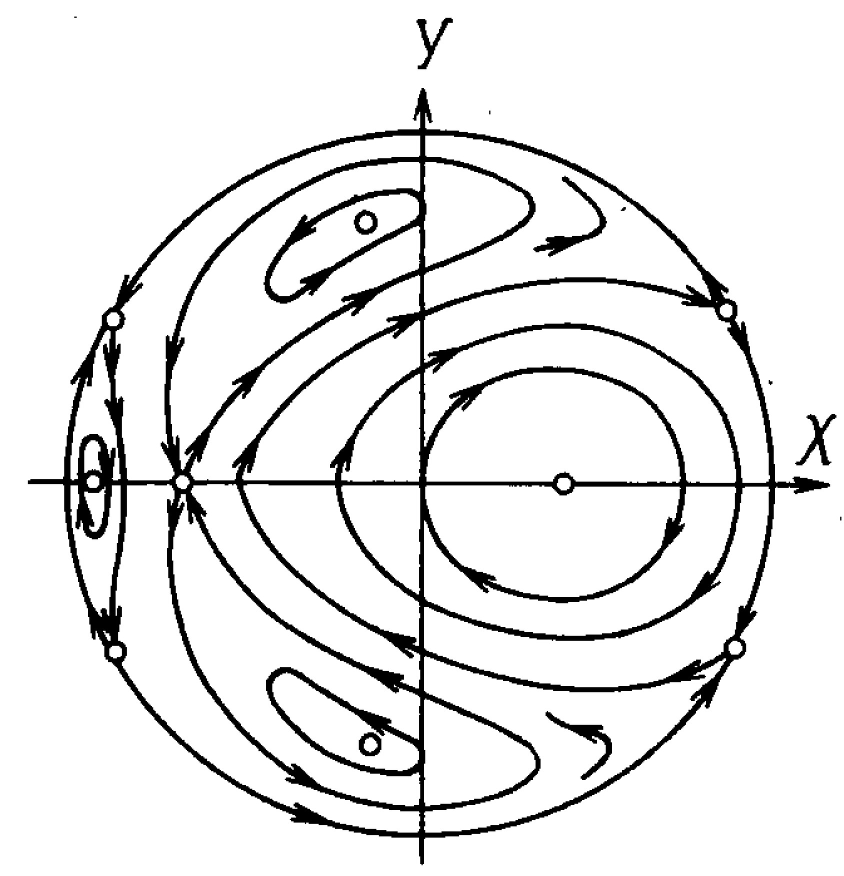
На фиг. 6—8 показаны фазовые траектории для систем, являющихся круго-сопряженными системами и изображенные соответственно на фиг. 1,4,5. Здесь особые точки (*в*) существуют всегда и имеют координаты $A° = 1$, $\lambda = \pi \,/\, 2$, $3\pi \,/\, 2$. Особых точек

(a) либо две, либо четыре (к точкам (a) относим и начало отсчета, которое всегда является особой точкой). Точки ($б$) лежат теперь на кривой четвертой степени.

Рассмотрим случай $b \neq 0$, $c \neq 0$. Заменив в (3.3) $A°$ на $B°$, с использованием (2.5), получаем опять систему (3.3) только с видоизмененными обозначениями. Можно утверждать, что система (3.3) является в этом смысле самокруго-сопряженной.

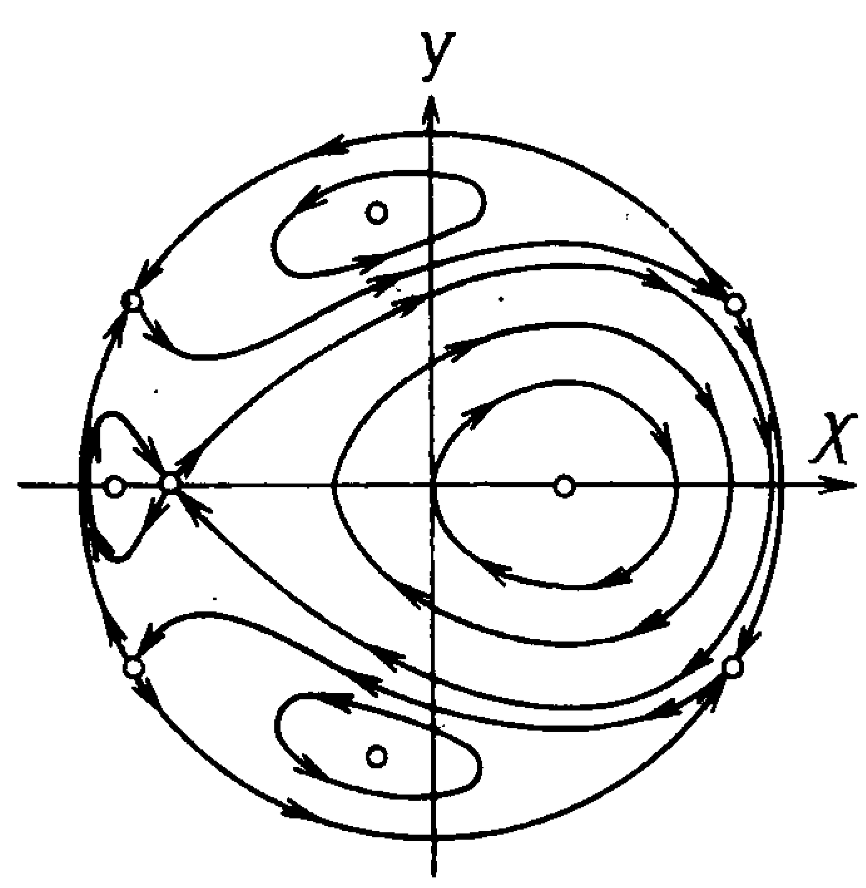


Фиг. 3

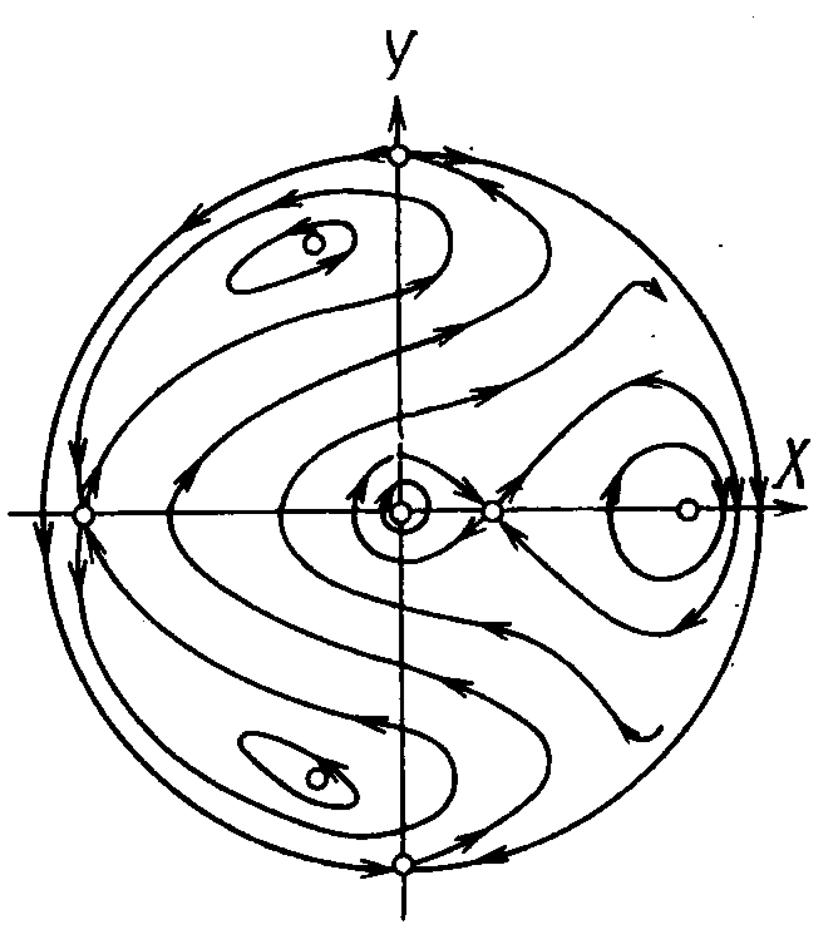


Фиг. 4

Здесь довольно много типичных случаев картин фазовых траекторий ввиду наличия четырех параметров a, b, c, m. Отметим, что теперь точки (a) — либо две, либо четыре (однако начало отсчета не является особой точкой), а все остальное сохраняет силу, как в прежнем случае $b = 0$, $c \neq 0$. Поэтому фиг. 6—8 дают качественное представление и для этого общего случая.



Фиг. 5



Фиг. 6

5. Пусть $\beta \approx 3$. Тогда, используя тождества для $\cos(\tau - \psi + \lambda)$ и $\cos(\beta\tau - \varphi - \lambda)$, где $\lambda = (\beta - 3)\tau - \varphi + 3\psi$, по аналогии с предыдущим получим каноническую систему для этого резонанса

(5.1) $$dA°/du = (1 - A^{\circ 2})^{3/2}\sin\lambda$$

$$d\lambda/du = 2m + 4aA^{\circ 2} + \frac{1}{A°}(1 - A^{\circ 2})^{1/2}(1 - 4A^{\circ 2})\cos\lambda$$

Здесь

$$A° = A/\varkappa, \quad u = \varepsilon\tau\frac{\sigma\varkappa^2}{16m_1}\left(g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}\right), \quad g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)} \neq 0$$

$$2m = \frac{\beta - 3}{\varepsilon}\,\frac{16m_1}{\sigma\varkappa^2\left(g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}\right)} + 6\,\frac{g_{12}^{(22)} - 10h_{12}^{(22)}}{\sigma\left(g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}\right)} - 3\sigma\,\frac{g_{11}^{(11)} - 2h_{11}^{(11)}}{g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}}$$

$$4a = \frac{3}{\sigma^3}\,\frac{g_{22}^{(22)} - 18h_{22}^{(22)}}{g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}} - \frac{6}{\sigma}\,\frac{g_{11}^{(22)} - 10h_{11}^{(22)}}{g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}} - \frac{6}{\sigma}\,\frac{g_{12}^{(22)} - 10h_{12}^{(22)}}{g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}} +$$

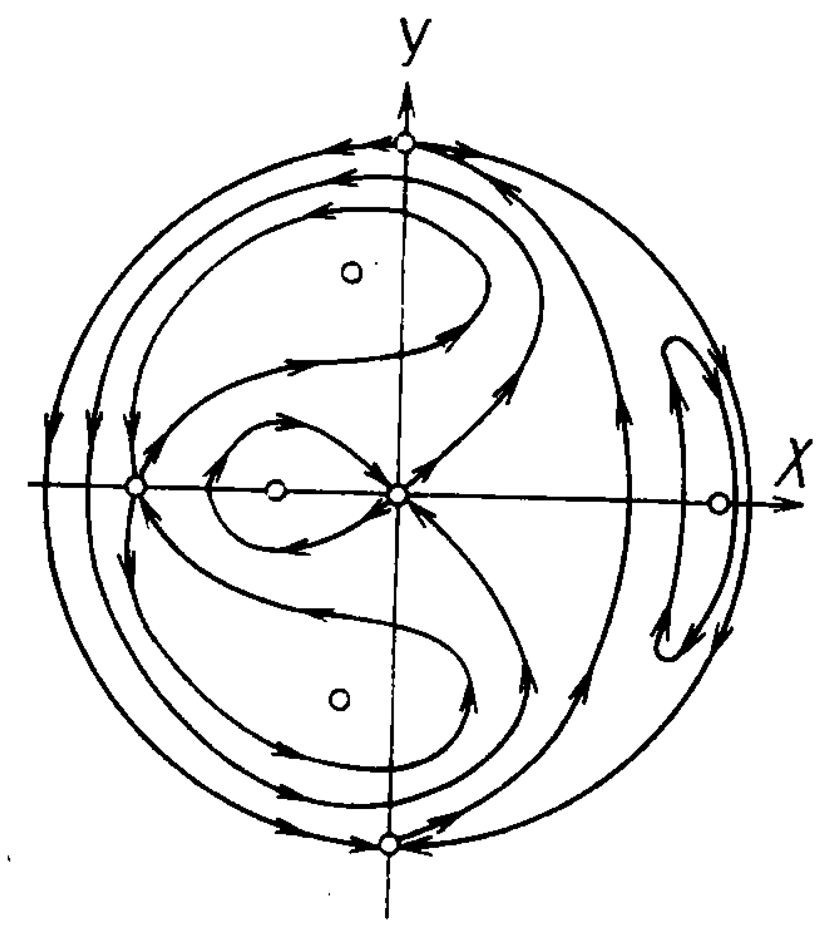
$$+ \sigma\,\frac{g_{11}^{(11)} - 2h_{11}^{(11)}}{g_{12}^{(11)} - 6h_{12}^{(11)}}$$

Между A и B опять существует соотношение (2.5), но $\sigma^2 = 9m_2 / m_1$.

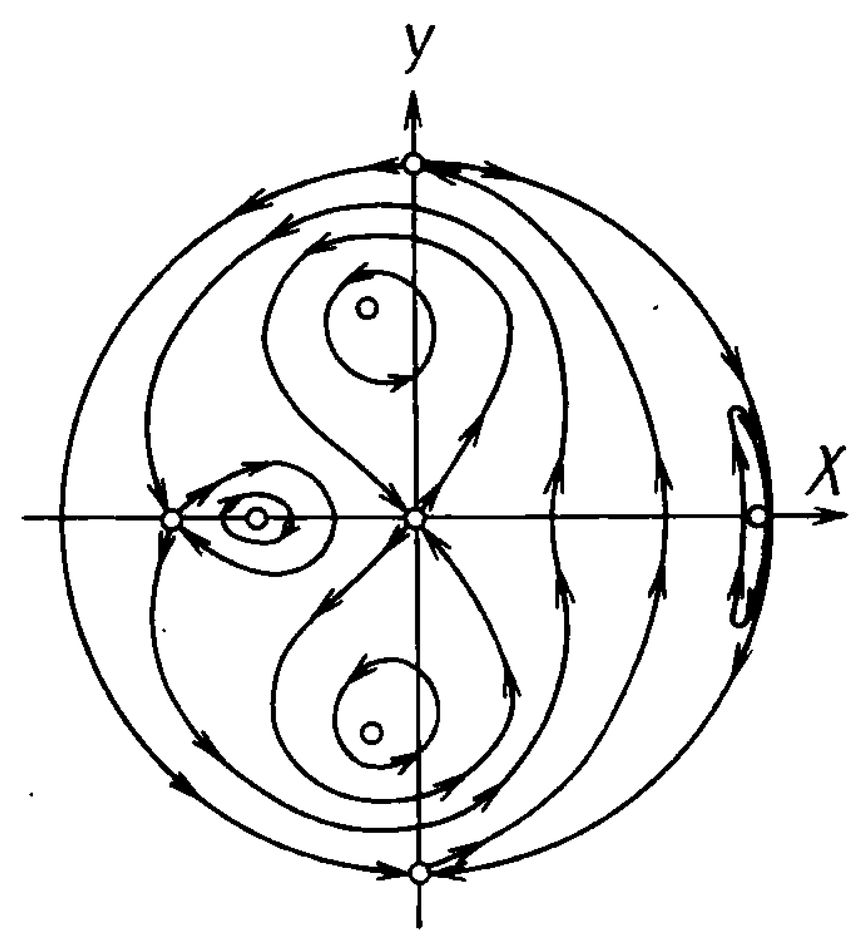
Система (5.1) имеет интеграл (c_0 — постоянная интегрирования)

$$mA^{\circ 2} + aA^{\circ 4} + A^{\circ}(1 - A^{\circ 2})^{3/2} \cos \lambda = c_0 \tag{5.2}$$

Здесь существуют только особые точки (*a*), которых либо одна, либо три (за исключением граничных случаев), и возможных типичных случаев картин фазовых траекторий относительно мало.



Фиг. 7



Фиг. 8

Каноническая система (5.1) получена и исследована в [8] при решении задачи о резонансных колебаниях одной консервативной системы с двумя степенями свободы.

Из картин фазовых траекторий видно, что возможны движения с постоянными амплитудами; они будут периодическими и им отвечают точки типа центра. Возможны движения с периодическими колебаниями амплитуд; им отвечают замкнутые фазовые траектории. Сепаратрисы и особые седловые точки соответствуют переходным (непериодическим) изменениям амплитуд.

Полученные результаты имеют место, в частности, при резонансных движениях консервативных систем с двумя степенями свободы.

Поступила 19 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М., «Наука», 1969.
4. *Struble R. A.* Nonlinear differential equations. N. Y., McGraw-Hill book Co. Inc., 1962.
5. *Struble R. A., Heinbockel J. H.* Resonant oscillations of a beam-pendulum system. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 2.
6. *Чешанков Б.* Резонансни трептения на две свързани махала, Българска акад. на науките. Теоретична и приложна механика, София, 1970, год. 1, № 1.
7. *Чешанков Б. И.* Резонансные колебания крутильного физического маятника. ПММ 1972, т. 36, вып. 1.
8. *Чешанков Б. И.* Резонансни трептения на двойно физическо махало. Годиш. Высш. техн. учебн. завед., Математика, 1970, т. 6, кн. 2.