

то для сохранения позиции  $\{t, w [t]\}$  на мосту  $W_{\varepsilon_0}^{\infty}$  достаточно выбрать  $v_*$  так, чтобы  $u_* - v_* \in (1 - \kappa) P_*$ . Таким образом, в данном примере все нужные построения, связанные с мостом  $W_{\varepsilon_0}^{\infty}$ , оказываются весьма простыми, хотя описание самого моста остается неизвестным.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и полезные советы.

Поступила 13 IX 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
2. Никольский М. С. О задаче убегания. В сб.: Прикладная математика и программирование, вып. 9. Кишинев, «Штиинца», 1973.
3. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Аппроксимация в дифференциальной игре. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. Красовский Н. Н. К игровой задаче уклонения. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 2.
6. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. Красовский Н. Н. К задаче о преследовании в случае линейных одноподобных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.

УДК 531.31

### КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

А. Н. Баутин

(Горький)

Методами теории бифуркаций при кусочно-линейной аппроксимации характеристики с падающим участком дается качественное исследование системы, представляющей интерес для приложений. Прослеживаются возможные бифуркации и поведение бифуркационных кривых. Система рассматривалась разными авторами при различных аппроксимациях [1-9], однако полного качественного исследования ни в одном случае не было дано.

1. Уравнения движения. Рассматривается система

$$(1.1) \quad \dot{x} = \tilde{y} - \varphi(x), \quad \dot{y} = L, \quad L \equiv \sigma - \lambda x - y \quad (\sigma > 0, \lambda > 0)$$

где  $\varphi(x)$  — нелинейная функция, содержащая падающий участок. Аппроксимируем  $\varphi(x)$  кусочно-линейной функцией, состоящей из трех линейных кусков: падающего участка с наклоном  $k = -\alpha_2 < 0$ , восходящих участков с наклоном  $k = \alpha_1 > 0$ . Фазовое пространство при такой аппроксимации разбивается на три части, в каждой из которых система линейна. В областях I и III лежат восходящие ветви характеристики, в области II — падающий участок (фиг. 1).

2. Состояния равновесия. Разбиение пространства параметров по числу и характеру состояний равновесия. Возможны одно или три грубых состояния равновесия. В случае одного состояния равновесия имеем фокус (узел), всегда устойчивый в областях I или III и неустойчивый в области II, если  $\alpha_2 > 1$ . В случае трех состояний равновесия имеем всегда устойчивые фокусы (узлы) в областях I и III и седло в области II.

Куски прямых  $\sigma = x_1\lambda + y_1$  и  $\sigma = x_2\lambda + y_2$  ( $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  — координаты угловых точек характеристики) при  $\lambda \leq \alpha_2$  образуют в плоскости  $\lambda\sigma$  дискриминантную кривую, отделяющую область трех состояний равновесия от области одного состояния равновесия. Точкам дискриминантной кривой соответствует сшитое состояние равновесия типа седло-фокус или седло-узел и угловой точке ( $\lambda = \alpha_2$ ) — неустойчивый отрезок покоя, совпадающий с падающим участком характеристики.

В случае  $\alpha_2 < 1$  замкнутых траекторий нет, и возможными бифуркациями являются только появление и исчезновение состояний равновесия. Все последующие рассмотрения ведутся для случая  $\alpha_2 > 1$  и  $(\alpha_1 - 1)^2 < 4\alpha_2$ , допускающего разнообразные бифуркации.

**3. Бифуркации состояний равновесия. 3.1.**

*Устойчивость состояния равновесия на линии сшивания.* Пусть прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  проходит через угловую точку  $(x_1, y_1)$  характеристики на границе I и II областей и пусть  $\lambda > 1/4$

$(\alpha_2 + 1)^2 > \alpha_2$ . Тогда область I заполнена кусками траекторий устойчивого фокуса, а область II — неустойчивого. Вводим на линии сшивания областей I и II положительные координаты  $s_0$  и  $s_1$  (фиг. 1). Преобразования  $s_0 \rightarrow s_1$  по траекториям области I и  $s_1 \rightarrow \bar{s}_0$  по траекториям области II запишутся так:

$$(3.1) \quad s_1 = s_0 \exp[-h_1\pi / \omega_1], \quad \bar{s}_0 = s_1 \exp[-h_2\pi / \omega_2]$$

Здесь  $\omega_i, -h_i$  ( $i = 1, 2$ ) — мнимая и действительная части корней характеристического уравнения соответственно для I и II областей.

Состоянием равновесия будет сшитый центр ( $\bar{s}_0 \equiv s_0$ ), если  $h_1 / \omega_1 + h_2 / \omega_2 = 0$ , или в раскрытом виде

$$\lambda = \lambda^+ \equiv (\alpha_1\alpha_2 + 1) (\alpha_1 - \alpha_2 + 2)^{-1}$$

Фокус на [склейке] будет устойчив ( $\bar{s}_0 < s_0$ ) при  $\lambda > \lambda^+$  и неустойчив ( $s_0 > \bar{s}_0$ ) при  $\lambda < \lambda^+$ .

**3.2. Рождение предельного цикла из состояния равновесия типа фокус при перемещении состояния равновесия через линию сшивания.** Докажем, что в областях I и II может существовать не более одного предельного цикла. Рассмотрим преобразование  $s_0 \rightarrow \bar{s}_0$  по траекториям I и II областей. Для области I будет

$$(3.2) \quad s_0 = \frac{\delta_0}{\sin \omega_1\tau_1} [\omega_1 \cos \omega_1\tau_1 + h_1 \sin \omega_1\tau_1 - \omega_1 e^{h_1\tau_1}] = \delta_0 \zeta(\tau_1)$$

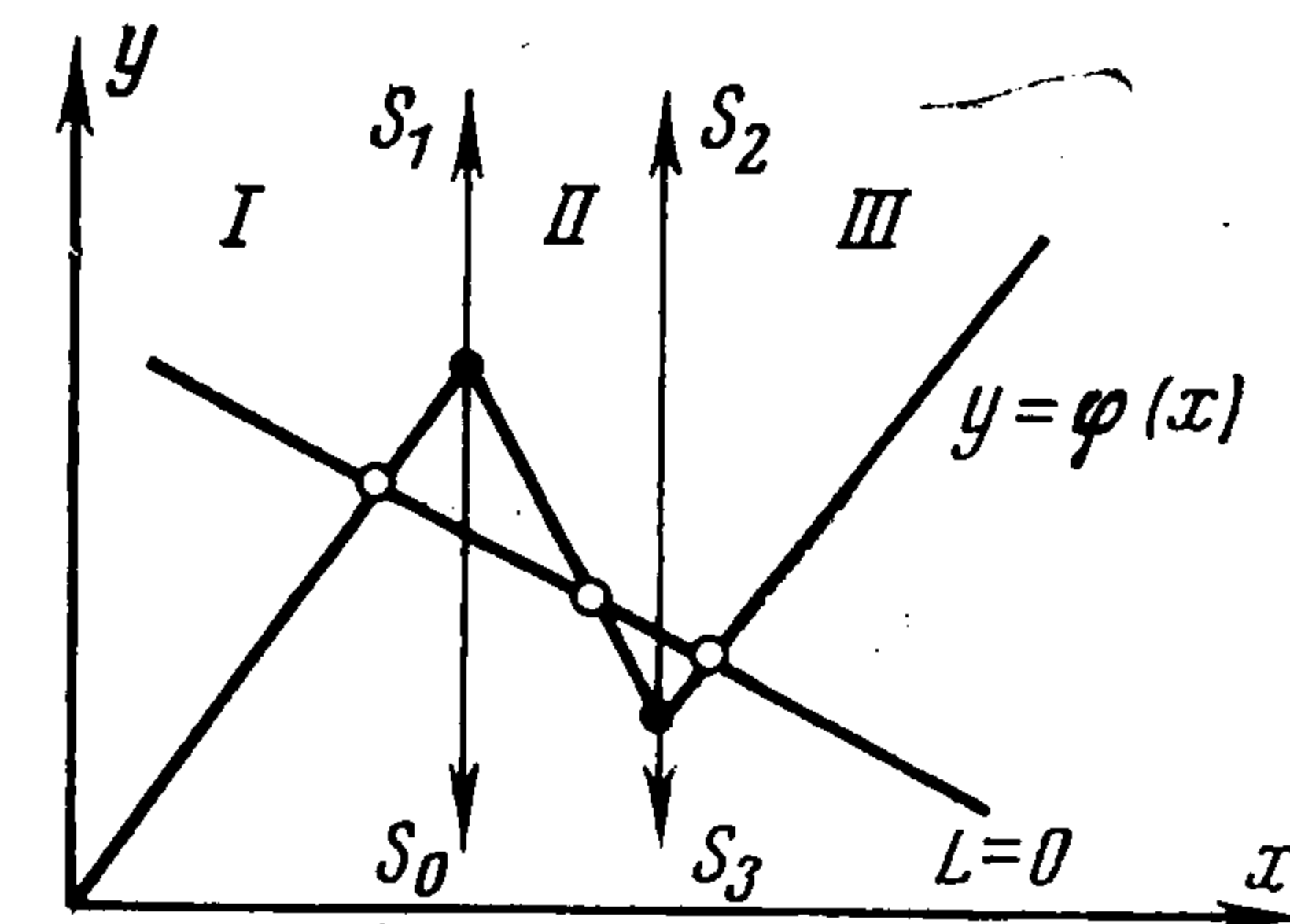
$$s_1 = \frac{\delta_0}{\sin \omega_1\tau_1} [\omega_1 \cos \omega_1\tau_1 - h_1 \sin \omega_1\tau_1 - \omega_1 e^{-h_1\tau_1}] = \delta_0 \chi(\tau_1)$$

Здесь  $\delta_0$  — расстояние от границы раздела областей I и II до состояния равновесия,  $\chi$  и  $\zeta$  — монотонные функции (возрастающие или убывающие в зависимости от знака  $\delta_0$ ). Преобразование по траекториям области II записывается аналогично.

Вычисление производной функции последования дает

$$(3.3) \quad \begin{aligned} d\bar{s}_0 / ds_0 &= s_0 \bar{s}_0^{-1} \exp[-2(h_1\tau_1 + h_2\theta)] \\ h_1 &= (1 + \alpha_1) / 2 > 0, \quad h_2 = (1 - \alpha_2) / 2 < 0 \end{aligned}$$

Здесь  $\tau_1$  и  $\theta$  — время движения соответственно по траекториям областей I и II. Пусть состояние равновесия лежит в области I. Тогда для периодического решения  $\bar{s}_0 = s_0$  с увеличением  $s_0$  время  $\tau_1$  убывает (до значения  $\pi / \omega_1$ ), время  $\theta$  возрастает (до значения  $\pi / \omega_2$ ) и производная (3.3) растет. Поэтому может существовать не более двух точек пересечения функции последования с биссектрисой, причем неподвижная точка с меньшей координатой должна быть устойчива, а с большей — неустойчива.



Фиг. 1

Так как, по предположению, состояние равновесия лежит в области I и является устойчивым фокусом, который не может охватываться устойчивым же циклом, то в областях I и II может существовать не более одного, причем неустойчивого цикла.

Пусть состояние равновесия лежит в области II. Тогда с ростом  $s_0$  время  $\tau_1$  растет, а  $\theta$  убывает. Аналогично находим, что в этом случае может существовать не более одного устойчивого предельного цикла.

Пусть прямая  $L = 0$  проходит через верхнюю угловую точку характеристики. Рассмотрим два случая.

1)  $\lambda > \lambda^+$ . Сшитый фокус устойчив. Траектория, проходящая через нижнюю угловую точку, в силу (3.1) при  $t \rightarrow \infty$  накручивается к состоянию равновесия. Эта траектория остается спиралью и при малых смещениях прямой  $L = 0$ . Если при малом смещении состояние равновесия попадает в область II, то оно становится неустойчивым и, следовательно, появляется хотя бы один устойчивый предельный цикл. По сказанному выше этот цикл единственный. Пусть после смещения состояние равновесия попадает в область I. Так как в объединении областей I и II возможно существование не более одного цикла и фокус сохраняет устойчивость, то, следовательно, циклы не возникают.

2)  $\lambda < \lambda^+$ . Аналогично находим, что если при малом смещении состояние равновесия попадает в область II, то циклы не возникают, а если в область I, то появляется неустойчивый цикл.

3.3. Рождение предельных циклов (простого или двойного) из границы области, выполненной замкнутыми траекториями. Рассмотрим преобразование  $\bar{s}_0 = f(s_0)$ , склеенное из двух кусков:  $\bar{s}_0 = \varphi(s_0)$  по траектории I и II областей и  $\bar{s}_0 = \psi(s_0)$  по всем областям. Покажем, что  $f(s_0)$  дифференцируема в точке склейки. Преобразование  $s_0 \rightarrow s_1$  по траекториям области I дано в (3.2). Преобразования  $s_1 \rightarrow s_2$ ,  $s_2 \rightarrow s_3$  и  $s_3 \rightarrow s_0$  записываются аналогично. Значение  $d\bar{s}_0 / ds_0$  для функции  $\varphi(s_0)$  дано в (3.3), а для функции  $\psi(s_0)$  будет

$$(3.4) \quad d\bar{s}_0 / ds_0 = s_0 \bar{s}_0^{-1} \exp [-2h_1(\tau_1 + \tau_3) - 2h_2(\tau_2 + \tau_4)]$$

Здесь  $\tau_1$  и  $\tau_3$  — время движения по областям I и III,  $\tau_2$  и  $\tau_4$  — время движения по верху и низу области II.

Пусть  $s_0 = s_0^*$  — граничное значение, разделяющее интервалы определения преобразований  $\varphi(s_0)$  и  $\psi(s_0)$ . Производные для  $\varphi$  и  $\psi$  в точке склейки совпадают: при  $s_0 = s_0^*$  будет  $\tau_3 = 0$ ,  $\theta = \theta^*$ ,  $\tau_2 + \tau_4 = \theta^*$ .

Пусть теперь прямая  $L = 0$  проходит через угловую точку характеристики  $x_1, y_1$  и  $\lambda = \lambda^+$ . Покажем, что предельных циклов нет.

Функция последования на плоскости  $s_0 \bar{s}_0$  склеена из отрезка биссектрисы  $\bar{s}_0 = s_0 < s_0^*$  и кривой  $\bar{s}_0 = \psi(s_0)$ . Функция  $s_0 = f(s_0)$  дифференцируема в точке склейки и, следовательно, при  $\lambda = \lambda^+$  будет  $d\bar{s}_0 / ds_0 = 1$  (из (3.4) находим также, что  $d^2\bar{s}_0 / ds_0^2 < 0$ ). При возрастании  $s_0$  от значения  $s_0^*$  показатель экспоненты в (3.4) монотонно убывает от нулевого значения в точке склейки ( $\tau_1 = \text{const}$ ,  $\tau_3$  растет и  $h_1 > 0$ ;  $\tau_2$  и  $\tau_4$  убывают и  $h_2 < 0$ ). Других точек пересечения (или касания) с биссектрисой, кроме  $s_0 = s_0^*$ , у кривой  $\bar{s}_0 = \psi(s_0)$  быть не может. Кривая для  $s_0 > s_0^*$  располагается ниже биссектрисы. Спирали, сшитые из траекторий в областях I — III, накручиваются на границу области, заполненной замкнутыми кривыми, сшитыми из траекторий в областях I и II.

При малом изменении параметров  $\sigma$  и  $\lambda$  функция последования измененной системы лежит в малой окрестности функции последования исходной системы. Если сдвигаться по полупрямой  $L_1 = 0$  ( $L_1 \equiv \sigma - \lambda x_1 - y_1 = 0$ ,  $\lambda > \alpha_2$ ) от значения  $\lambda = \lambda^+$  в сторону уменьшения  $\lambda$ , то функцией последования для  $s_0 < s_0^*$  будет прямая, проходящая через начало координат выше биссектрисы, и для  $s_0 \geq s_0^*$  — кривая  $\bar{s}_0 = \psi(s_0)$ , пересекающая биссектрису один раз (в точке склейки  $d^2\bar{s}_0 / ds_0^2 \neq 0$  при  $\lambda = \lambda^+$ ,  $\sigma = \sigma^+$ ). Из границы области, заполненной замкнутыми кривыми, появляется единственный устойчивый предельный цикл. При последующем уменьшении  $\sigma$  начальная точка функции последования перемещается из начала координат по оси

$s_0$  (наименьшее  $s_0$  соответствует траектории, идущей в устойчивый фокус и касающейся линии сшивания при  $\bar{s}_0 = 0$ ), и функция последования  $\bar{s}_0 = f(s_0)$  будет пересекать биссектрису дважды (из фокуса при перемещении его с линии склейки появляется единственный неустойчивый предельный цикл). Если сдвинуться по полупрямой в сторону увеличения  $\lambda$  от значения  $\lambda = \lambda^+$  и затем уменьшить  $\sigma$ , то функция последования будет целиком лежать ниже биссектрисы. Из непрерывности и дифференцируемости функции последования следует, что в любой малой окрестности точки  $\lambda^+$ ,  $\sigma^+$  (ниже полупрямой) существуют  $\lambda$  и  $\sigma$ , для которых функция последования касается биссектрисы. На фазовой плоскости этому соответствует появление двойного цикла. Такие точки образуют бифуркационную кривую, выходящую из точки  $\lambda^+$ ,  $\sigma^+$  на полупрямой  $L_1 = 0$ .

Касание невозможно при  $s_0 < s_0^*$ , так как в объединении областей I и II может быть не более одного цикла и поэтому рождение двойного цикла при изменении параметров происходит при  $s_0 = s_0^*$  от границы области, заполненной замкнутыми траекториями.

**3.4. Рождение предельных циклов из концов отрезка покоя.** Пусть прямая  $L = 0$  и падающий участок характеристики совпадают ( $\lambda = \alpha_2$ ). Падающий участок характеристики будет неустойчивым отрезком покоя, а области I и II в силу условия  $(\alpha_1 - 1)^2 < 4\alpha_2$  (см. п. 2) будут заполнены траекториями устойчивых фокусов. Легко получить явное выражение для преобразования в себя полупрямой  $s_0$

$$\bar{s}_0 = s_0 \exp(-2h_1\pi / \omega_1) + \delta(\alpha_2 - 1) [1 + \exp(-h_1\pi / \omega_1)]$$

Здесь  $\delta$  — ширина области II. Преобразование имеет одну устойчивую неподвижную точку.

Повернем теперь прямую  $L = 0$  вокруг какой-либо точки на падающем участке против часовой стрелки. Отрезок покоя при этом разрушается и возникает седло в области II и устойчивые фокусы в областях I и III. Пусть  $\lambda = \alpha_2 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  и мало. Ограничиваясь степенями  $\varepsilon$  не выше первой, получим угловые коэффициенты сепаратрис:  $[-1 + \varepsilon / (\alpha_2 - 1)]$  (для  $\alpha$ -сепаратрис),  $[-\alpha_2 - \varepsilon / (\alpha_2 - 1)]$  (для  $\omega$ -сепаратрис).

При  $\lambda = \alpha_2$  траектории, вышедшие из точки, в которой при  $\varepsilon \neq 0$  возникает седло, накручивались на предельный цикл.  $\alpha$ -сепаратрисы седла в области II при малых  $\varepsilon > 0$  лежат в малой окрестности траекторий, вышедших из той же точки при  $\varepsilon = 0$ , и, следовательно,  $\alpha$ -сепаратрисы также накручиваются на устойчивый предельный цикл охватывающий все состояния равновесия. Поэтому  $\omega$ -сепаратрисы могут лишь скручиваться с неустойчивых циклов, лежащих в областях I — II и II — III, охватывающих устойчивые фокусы, возникшие при повороте прямой соответственно в областях I и III. Таким образом, при повороте прямой  $L = 0$  из конца отрезка покоя появляются устойчивые фокусы в сопровождении охватывающих их неустойчивых циклов (фокусы и циклы возникают одновременно). В окрестности каждого фокуса лежит единственный предельный цикл. Последнее следует из того, что производная функции последования, построенная с использованием траекторий седла в области II, будет также даваться выражением (3.3) с тем лишь отличием, что с возрастанием  $s_0$  будет  $\theta \rightarrow \infty$ .

**4. Бифуркации сепаратрис. 4.1. Расположение бифуркационной кривой для петли сепаратрисы.** Пусть при  $\sigma = \sigma_0$  и фиксированном  $\lambda = \lambda^*$  прямая  $L = 0$  проходит через верхнюю угловую точку характеристики. Изменим  $\sigma$  на величину  $\kappa$  ( $\kappa = \sigma_0 - \sigma$ ) и покажем, что петля сепаратрисы за счет изменения  $\sigma$  возникнуть не может. Пусть  $s_0'$  и  $s_1'$  — отрезки, отсекаемые  $\alpha$ - и  $\omega$ -сепаратрисами линейного седла в области II на границе областей I и II, а  $s_0$  и  $s_1$  — координаты по преобразованию (3.2) на той же границе. Из (3.2) следует

$$(4.1) \quad s_1 = \delta_0 \chi [\zeta^{-1}(s_0 / \delta_0)]$$

где  $\zeta^{-1}$  — функция, обратная  $\zeta$ . Величины  $h_1$  и  $\omega_1$ , а следовательно, и функции  $\chi$  и  $\zeta$  от  $\sigma$  не зависят.

Так как характеристика есть функция кусочно-линейная, то при изменении  $\sigma$  величины  $s_0'$ ,  $s_1'$  и  $\delta_0$  будут пропорциональны  $\kappa$

$$(4.2) \quad s_0' = \gamma_0 \kappa, \quad \delta_0 = \gamma_1 \kappa$$

$$(4.3) \quad s_1' = \gamma_2 \kappa$$

Сшивая траектории на границе областей I и II (полагая  $s_0 = s_0'$ ), из (4.1) и (4.2) находим

$$(4.4) \quad s_1 = \gamma_1 \kappa \chi [\zeta^{-1} (\gamma_0 / \gamma_1)] \equiv \gamma_3 \kappa$$

а из (4.3) и (4.4)

$$s_1 / s_1' = \gamma_3 / \gamma_2 = \text{const}$$

Таким образом, при фиксированном  $\lambda$  величины  $s_1$  и  $s_1'$  находятся в постоянном отношении, и петля сепаратрисы  $s_1 = s_1'$  за счет изменения  $\sigma$  возникнуть не может.

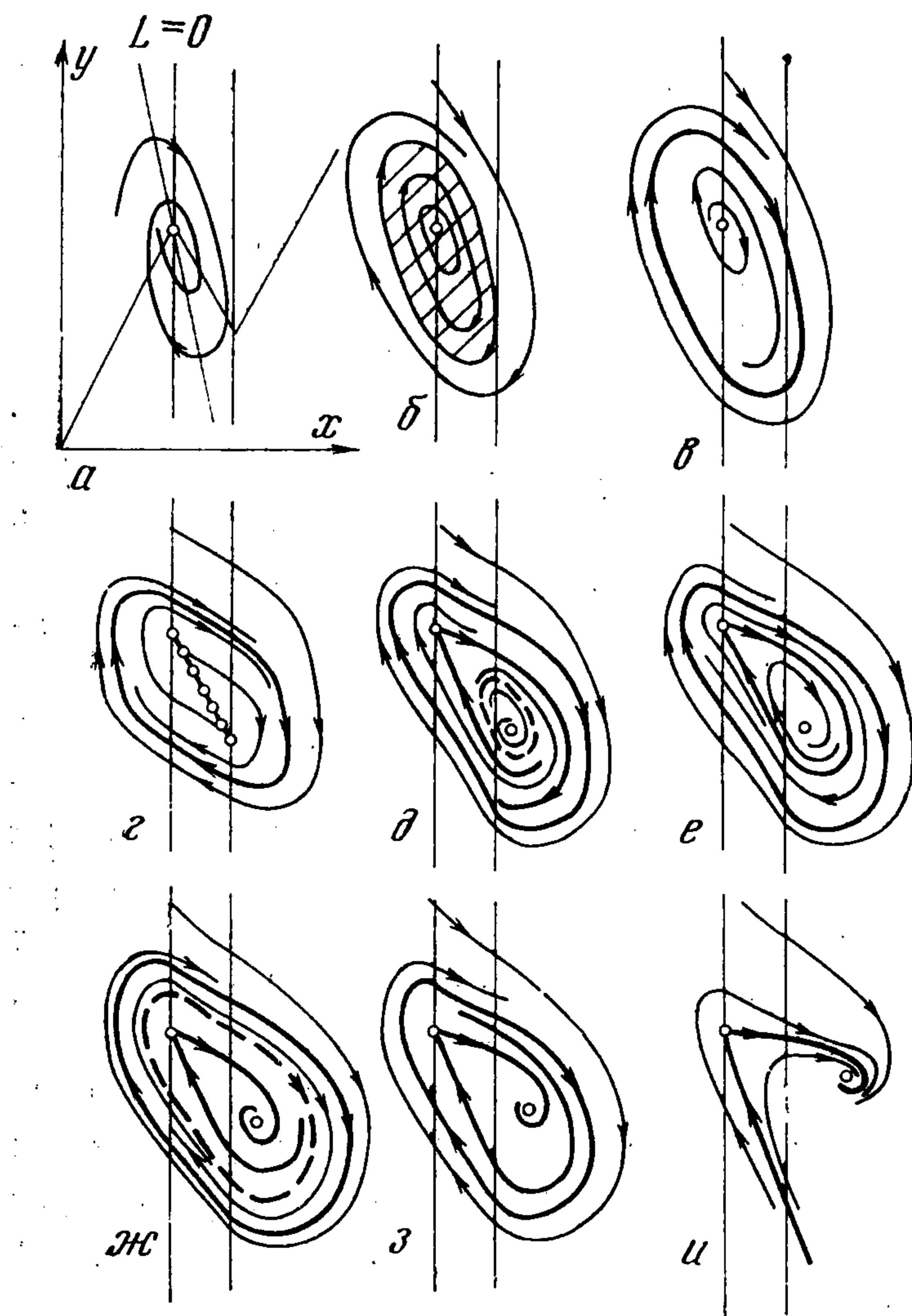
Если прямая  $L = 0$  проходит через середину падающего участка и  $\lambda = \lambda_1$  таково, что существует петля сепаратрисы сверху, то в силу симметрии фазового пространства

одновременно должна существовать и петля сепаратрисы снизу. При этом осуществляется условие  $\gamma_3 / \gamma_2 = 1$ . Так как  $\gamma_3$  и  $\gamma_2$  от  $\sigma$  не зависят, то это условие и, следовательно, обе петли сохраняются при  $\lambda = \lambda_1$  для всех значений  $\sigma$  внутри дискриминантной кривой.

4.2. Устойчивость петель сепаратрис. Устойчивость петель сепаратрис будет определяться знаком седловой величины, если седло располагается внутри или на границе области II (теорема 44 в [10] переносится на случай, когда сшитая петля содержит аналитическое седло). В рассматриваемом случае  $\alpha_2 > 1$  седловая величина положительна ( $P_x' + Q_y' = \alpha_2 - 1$ ), и петли сепаратрис внутри и снаружи неустойчивы. При изменении параметров к петле стягивается или от нее рождается единственный неустойчивый предельный цикл (теорема 47 в [10] переносится на случай, когда сшитая петля содержит аналитическое седло).

5. Качественные структуры разбиения фазового пространства.

5.1. Фазовые портреты, соответствующие значениям параметров  $\sigma'$ ,  $\lambda$  и  $\sigma''$ ,  $\lambda$ , таким, что прямые  $\sigma' - \lambda x - y = 0$  и  $\sigma'' - \lambda x - y = 0$  располагаются симметрично



Фиг. 2

относительно середины падающего участка характеристики, будут симметричны относительно последней. При изучении разбиения пространства параметров поэтому можно рассматривать только часть пространства  $\lambda\sigma$  выше либо ниже линии симметрии  $\sigma - \lambda x_0 - y_0 = 0$ , где  $x_0$ ,  $y_0$  — координаты середины падающего участка.

5.2. Рассмотрим структуры разбиения фазового пространства и последовательность бифуркаций, переводящих одну структуру в другую для значений параметров вдоль бифуркационной прямой  $\sigma - \lambda x_1 - y_1 = 0$  ( $x_1$ ,  $y_1$  — координаты верхней угловой точки характеристики).

Пусть  $\lambda > \lambda^+$  (см. фиг. 2, а). Состояние равновесия — устойчивый фокус на склейке, и все траектории идут к нему. При  $\lambda = \lambda^+$  (фиг. 2, б) возникает область, заполнен-

ная замкнутыми траекториями. Все спитые по областям I — III траектории накручиваются на границу этой области. При  $\alpha_2 < \lambda < \lambda^+$  (фиг. 2, в) фокус на склейке неустойчив и при уменьшении  $\lambda$  от значения  $\lambda = \lambda^+$  от границы области, заполненной замкнутыми траекториями, рождается устойчивый предельный цикл. При  $\lambda = \alpha_2$  (фиг. 2, г) (острие дискриминантной кривой) падающий участок характеристики и прямая  $L = 0$  совпадают. Возникает неустойчивый отрезок покоя внутри устойчивого предельного цикла. При дальнейшем уменьшении  $\lambda$  вдоль дискриминантной кривой появляются два состояния равновесия: склеенный седло-фокус и устойчивый фокус в области III. От конца отрезка покоя вместе с фокусом рождается неустойчивый предельный цикл ( $\alpha$ -сепаратриса седло-фокуса идет к устойчивому циклу, охватывающему все состояния равновесия,  $\omega$ -сепаратриса скручивается с неустойчивого цикла, охватывающего устойчивый фокус). Так как  $\alpha$ -сепаратриса при  $\lambda = 0$  (прямая  $y = \sigma$ ) идет в устойчивый узел в области III, состояние равновесия в области III при изменении параметров вдоль дискриминантной кривой устойчивость не меняет и бесконечность остается неустойчивой, то исчезновение предельных циклов на интервале  $0 < \lambda < \alpha_2$  может произойти только за счет слияния предельных циклов с последующим уничтожением двойного цикла. Это может осуществиться лишь при посредстве промежуточной бифуркации — появлении при  $\lambda = \lambda_1 < \alpha_2$  (фиг. 2, д) петли сепаратрисы, возникшей из  $\alpha$ - и  $\omega$ -сепаратрис спитого седло-фокуса.

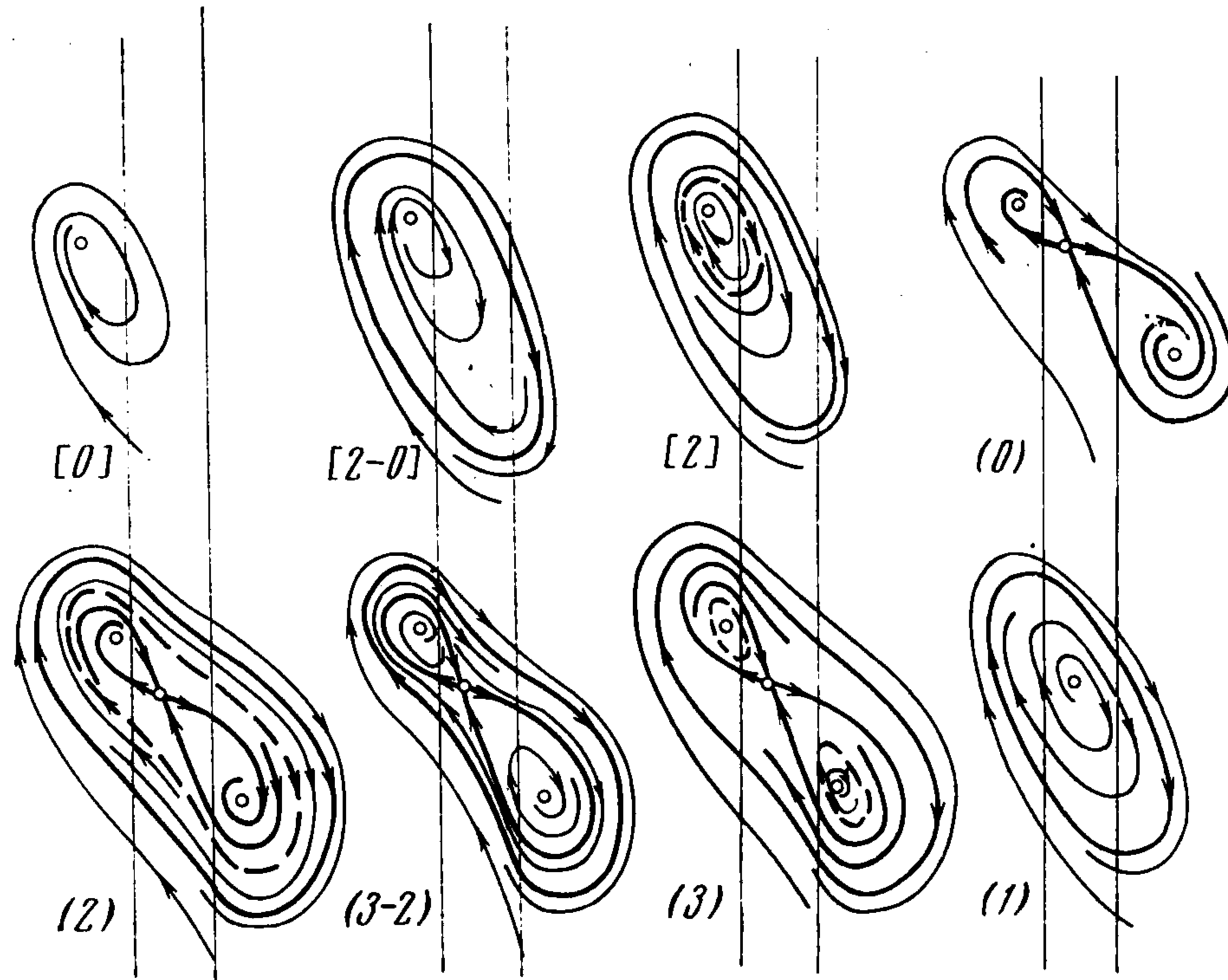
Петля сепаратрисы, как снаружи так и изнутри, неустойчива. Такую петлю можно рассматривать как особый предельный цикл с состоянием равновесия на нем, отделяющий структуры с неустойчивым предельным циклом, охватывающим состояние равновесия в области III, от структур с неустойчивым циклом, охватывающим все состояния равновесия.

При убывании  $\lambda$  до значения  $\lambda = \lambda_1$  (фиг. 2, е) в петлю влипают изнутри неустойчивый предельный цикл, а при дальнейшем убывании  $\lambda$  и разрушении петли от нее рождается неустойчивый предельный цикл (фиг. 2, ж) охватывающий все состояния равновесия ( $\alpha$ -сепаратриса идет в устойчивый фокус в области III,  $\omega$ -сепаратриса скручивается с неустойчивого предельного цикла, который охватывает оба состояния равновесия и между циклами нет состояний равновесия). При некотором  $\lambda = \lambda_2 < \lambda_1$  (фиг. 2, з) необходимо возникает полуустойчивый двойной предельный цикл, исчезающий при убывании  $\lambda$ . При дальнейшем убывании  $\lambda$  фокусы превратятся в узлы и возникнет структура, качественно эквивалентная структуре при  $\lambda = 0$  (фиг. 2, и).

5.3. Рассмотрим структуры внутри дискриминантной кривой при  $\lambda_1 < \lambda < \alpha_2$ . Для значений параметров, принадлежащих самой дискриминантной кривой, для отрезков, отсекаемых  $\alpha$ - и  $\omega$ -сепаратрисами на линии шивания, выполняется условие  $(s_3)_\alpha > (s_3)_\omega$  (вокруг фокуса есть неустойчивый предельный цикл) и это неравенство не может нарушиться при  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$  за счет изменения  $\sigma$ . Оно сохраняется, в частности, и для структуры в точке пересечения  $\lambda = \lambda_0$  с линией симметрии  $\sigma = -\lambda x_0 - y_0 = 0$  ( $x_0, y_0$  — координаты середины падающего участка характеристики). В этой точке фазовый портрет симметричен относительно точки  $x_0, y_0$  и, следовательно, вокруг устойчивого фокуса в области I также есть неустойчивый предельный цикл. За счет изменения  $\sigma$  эта качественная картина внутри области, ограниченной дискриминантной кривой, не может измениться. Отсюда следует, что при смещении с дискриминантной кривой внутрь области при разрушении спитого состояния равновесия типа седло-фокус появляется седло в области II и устойчивый фокус в области I в сопровождении неустойчивого предельного цикла.

Структура разбиения фазового пространства при  $\lambda_1 < \lambda < \alpha_2$  будет содержать три предельных цикла;  $\alpha$ -сепаратрисы седла идут к устойчивому циклу, охватывающему все три состояния равновесия;  $\omega$ -сепаратрисы скручиваются с неустойчивых циклов, охватывающих фокусы в областях I и III. При  $\lambda = \lambda_1$  одновременно возникают верхняя и нижняя петли сепаратрис. В них влипают неустойчивые предельные циклы. При убывании  $\lambda$  от значения  $\lambda = \lambda_1$  из двойной петли появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия.

Так как при  $\lambda < \frac{1}{4}(\alpha_1 - 1)^2$  система предельных циклов не имеет (области I и III «перечеркнуты» интегральными прямыми линейных узлов), то устойчивый и неустойчивый циклы на интервале  $\frac{1}{4}(\alpha_1 - 1)^2 < \lambda < \lambda_1$  должны уничтожиться (см. фиг. 2, u). Внутри дискриминантной кривой левее отрезка петель сепаратрис должна существовать бифуркационная кривая двойных циклов. В силу упомянутой ранее симметрии кривая двойных циклов пересекает стороны дискриминантной кривой при одном и том же  $\lambda = \lambda_2$ .



Фиг. 3

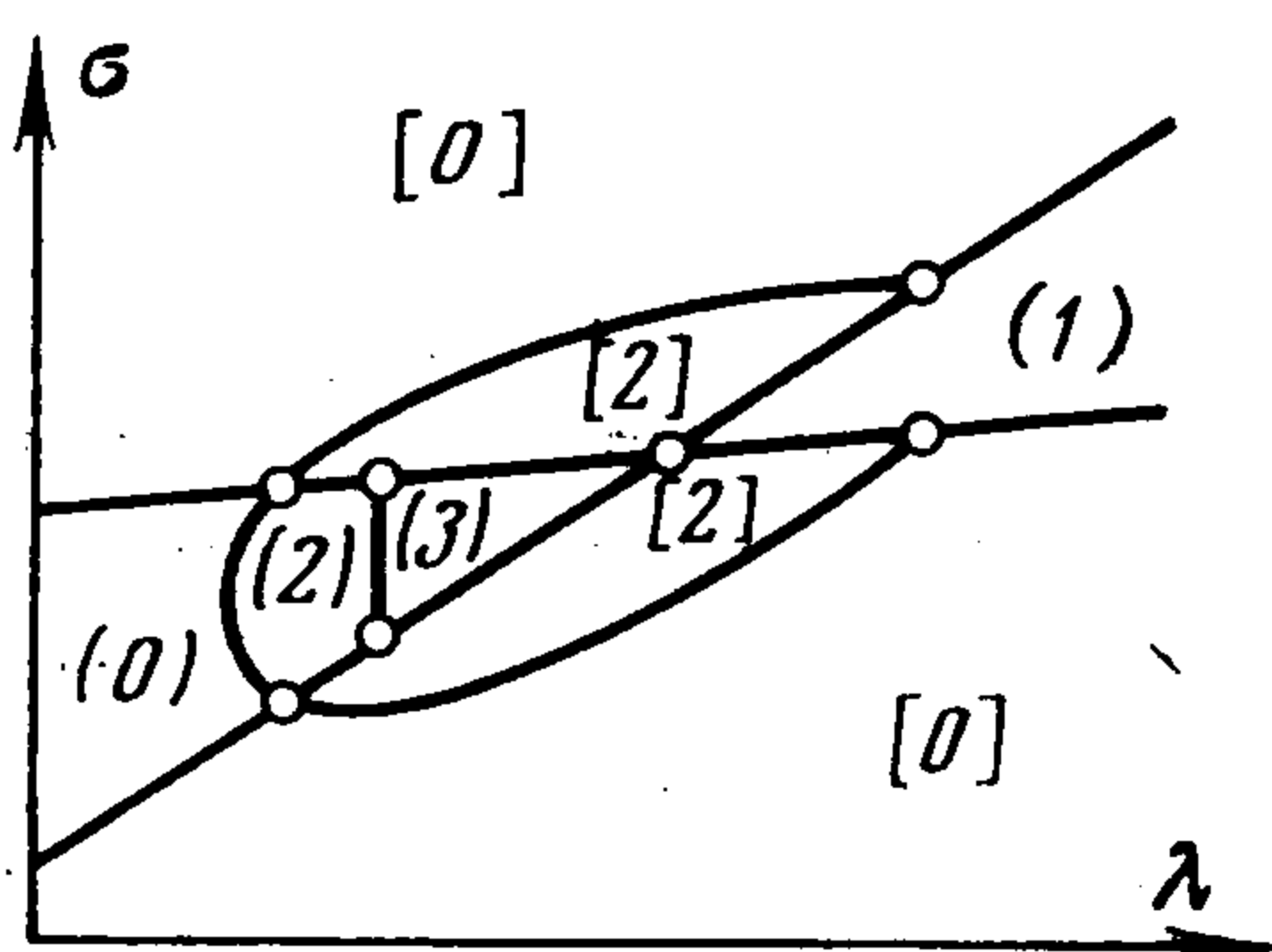
5.4. Бифуркационная кривая, соответствующая слиянию устойчивого и неустойчивого циклов (кривая двойных циклов), начинается в точках, где  $\lambda = \lambda^+$  на прямых  $L_1 \equiv \sigma - \lambda x_1 - y_1 = 0$  и  $L_2 \equiv \sigma - \lambda x_2 - y_2 = 0$  и располагается для случая одного состояния равновесия соответственно снизу и сверху обеих прямых  $L_1 = 0$  и  $L_2 = 0$

(в области  $L_1 L_2 > 0$ ). При  $\lambda = \lambda_2$  обе ветви кривой двойных циклов пересекают (снизу и сверху) дискриминантную кривую и переходят одна в другую внутри дискриминантной кривой.

Кривая двойных циклов выделяет на интервале  $\lambda_2 < \lambda < \lambda^+$  в области  $L_1 L_2 > 0$  некоторую окрестность  $L_1 = 0$  и  $L_2 = 0$ , для точек которой в фазовом пространстве есть одно устойчивое состояние равновесия и два предельных цикла.

5.5. Если состояние равновесия типа фокус лежит на падающем участке характеристики (область  $L_1 L_2 < 0$ ,  $\lambda > \alpha_2$  на плоскости параметров), то существует единственный устойчивый предельный цикл. Существование хотя бы одного цикла очевидно (состояние равновесия и бесконечность неустойчивы). Единственность вытекает из монотонности изменения показателя экспоненты в (3.3) и (3.4), порождаемой расположением фокуса на падающем участке характеристики (с возрастанием  $s_0$  параметры  $\tau_1$  и  $\tau_3$  растут, а  $\tau_2$ ,  $\tau_4$  и  $\theta$  убывают), и дифференцируемости функции последования в точке сшивания.

5.6. Структура разбиения пространства параметров  $\lambda\sigma$  на области с различной качественной структурой фазового пространства изображена на фиг. 4. Цифрами в круглых и квадратных скобках (цифры указывают на число предельных циклов) отмечены разные области. Последовательность качественных структур вдоль бифуркационной прямой  $L_1 = 0$  представлена на фиг. 2. На фиг. 3 теми же цифрами, что и



Фиг. 4

на фиг. 4, отмечены грубые качественные структуры, соответствующие разным областям фазового пространства. Негрубым структурам на фиг. 3, помеченным двумя цифрами, соответствуют бифуркационные кривые фиг. 4, разделяющие соответствующие области.

Поступила 10 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schuller M., Gärtner W. W. Large-signal circuit theory for negative-resistance diodes, in particular tunnel diodes. Proc. IRE, 1961, vol. 49, No. 8, p. 1268—1278.
2. Miranker W. L. The occurrence of limit cycles in the equations of a tunnel diode circuit. IRE Trans. on Circuit Theory, 1962, vol. CT-9, No. 4, p. 316—320.
3. Ваганов В. И., Корж В. И. Качественный анализ переходного процесса в туннельно-диодном триггере. Изв. вузов. Радиотехника, 1965, т. 8, № 2.
4. Луцицкая И. Н., Синицкий Л. А. Исследование периодических режимов в автономных цепях с нелинейным отрицательным сопротивлением. В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Киев, «Наукова думка», 1965, вып. 3, стр. 39—45.
5. Луцицкая И. Н. Исследование электрической цепи с нелинейным отрицательным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации. Изв. вузов. Радиофизика, 1966, т. 9, № 5.
6. Ortel W. C. G. The monostable tunnel diode trigger circuit. Proc. IEEE, 1966, vol. 54, No. 7, p. 936—946.
7. Mizushima S. Triggered operations of tunnel diode oscillators and pulse generators. IEEE J. Solid-State Circuits, 1967, vol. SC-2, No. 3, p. 73—81.
8. Гришкина Н. А., Королев В. И. Динамика схемы на туннельных диодах. Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, № 7.
9. Сидоров А. С. Теория и проектирование нелинейных импульсных схем на туннельных диодах. М., «Сов. радио», 1971.
10. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.

УДК 534

### ДВУХЧАСТОТНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Б. И. Чешанков

(София)

Исследуются двухчастотные колебания консервативной системы с  $n$  степенями свободы. Задача сводится к изучению канонических систем, описывающих резонансные явления.

Одночастотные и многочастотные колебания рассматривались ранее в работах [1—3].

1. Рассмотрим консервативную систему с  $n$  степенями свободы, которая имеет устойчивое положение равновесия и совершает относительно малые движения в его окрестности. Дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$(1.1) \quad \sum_{k=1}^n (a_{ik} q_k'' + c_{ik} q_k) = - \sum_{k,j=1}^n [a_{ik}^{(j)} (q_k q_j'' + \frac{1}{2} q_k' q_j') + \frac{1}{2} c_{ik}^{(j)} q_k q_j] - \\ - \sum_{k,j,s=1}^n \left[ \frac{1}{2} a_{ik}^{(js)} (q_k q_j q_s'' + q_k q_j' q_s') + \frac{1}{6} c_{ik}^{(js)} q_k q_j q_s \right] - \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$