УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ УКЛОНЕНИЯ

В. М. Решетов

(Свердловск)

Рассматривается задача об уклонении на бесконечном полуинтервале времени для линейной управляемой системы. Работа примыкает к исследованиям [1–5]. Решение осуществляется при помощи схемы управления с поводырем [3,4].

1. Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$dx\,/\,dt = Ax + Bu + Cv, \qquad u \in P, \qquad v \in Q^\alpha \tag{1.1}$$

Здесь x — k-мерный вектор фазовых координат, u и v — $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$-мерный векторы соответственно; A, B, C — матрицы с постоянными коэффициентами размерности $k \times k, k \times r^{(1)}, k \times r^{(2)}$ соответственно; управляющие воздействия первого и второго игроков стеснены указанными выше условиями, где P и Q — выпуклые компакты в соответствующих векторных пространствах. Символ Q^α означает замкнутую евклидову α-окрестность множества Q, таким образом $Q^\alpha = \{v = q + m\colon\ q \in Q,\ \| m \| \leqslant \alpha\}$. Здесь и в дальнейшем $\| m \|$ — евклидова норма вектора m. В пространстве $\{t, x\}$ задано некоторое множество M, являющееся выпуклым компактом в пространстве $\{x\}$.

Задача состоит в построении стратегии V, обеспечивающей для всех движений $x_\Delta [t]$, порождаемых этой стратегией [3], уклонение от ε-окрестности M^ε множества M в течение бесконечного полуинтервала времени $t_0 \leqslant t < \infty$ при любых действиях первого игрока, стесненных условием $u \in P$.

Встречающиеся в этой статье термины стратегий, движений, ломаных Эйлера и соответствующие их обозначения будем понимать в том смысле, как они определены в статье [3].

Рассмотрим вспомогательную систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$dw\,/\,dt = Aw + Bu_* + Cv_*, \qquad u_* \in P^\alpha, \qquad v_* \in Q \tag{1.2}$$

где векторы w, u_*, v_* тех же размерностей, что и x, u, v соответственно.

Построим в пространстве $\{t, w\}$ множество H, состоящее из точек, удовлетворяющих условию $\rho\,(\{t, x\,[t]\}, M) \geqslant \varepsilon_0 > 0$, при $t \geqslant t_0$. Тогда в соответствии с результатами статьи [5] для движений $w\,[t]$ имеет место следующая альтернатива.

Для всякой начальной позиции $\{t_0, w_0\}$ справедливо одно из двух заключений: либо найдется момент времени $\vartheta \geqslant t_0$ и стратегия $U_* \div u_*\,(t, w, v_*)$ такие, что каждое движение $w\,[t, t_0, w_0, U_*]$ по крайней мере один раз покинет H при $t \in [t_0, \vartheta]$, либо можно построить стратегию V_*°, которая гарантирует сохранение всякого движения $w\,[t, t_0, w_0, V_*^\circ]$ в H при всех $t \geqslant t_0$.

Будем предполагать выполненным второе из этих заключений! В этом случае результаты § 2 статьи [5] в терминах, принятых в [3], означают, что существует множество $W \subset H$, которое является v-стабильным мостом $W_{\varepsilon_0}^\infty$. Символ $W_{\varepsilon_0}^\infty$ означает, что этот мост не пересекается с множеством M^{ε_0} на всей полуоси $[t_0, \infty)$. Свойство v-стабильности моста $W_{\varepsilon_0}^\infty$ означает здесь следующее. Пусть имеем позицию $\{t_*, w_*\} \in W_{\varepsilon_0}^\infty$. Выберем любое $t^* > t_*$ и $u^*\,[t] \in P^\alpha$, какое угодно измеримое на отрезке $[t_*, t^*]$. Тогда можно подобрать измеримое управление $v^*\,[t] \in Q$ такое, что движение $w\,[t]$, описываемое уравнением

$$dw\,/\,dt = Aw\,[t] + Bu^*\,[t] + Cv^*\,[t]$$

останется на $W_{\varepsilon_0}^\infty$ на отрезке $[t_*, t^*]$.

В работе [5] показана возможность построения позиционной стратегии второго игрока, уклоняющей от можества M движения $w\,[t]$ при $t_0 \leqslant t < \infty$. При этом отмечено, что осуществление уклонения для всех аппроксимирующих движения $w\,[t]$ ломаных

Эйлера $w_\Delta [t]$ требует дополнительных условий устойчивости. Решению задачи осуществления такой устойчивости и посвящена данная работа.

Будем строить стратегию второго игрока, уклоняющую аппроксимирующие ломаные Эйлера $x_\Delta [t]$ от множества M^ε в течение бесконечного полуинтервала времени, при помощи схемы управления с поводырем $w [t]$ [3,4].

В точной постановке задача формулируется следующим образом. Для заданной начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ в управляемой системе (1.1) найти стратегию

$$V \div \{v (\tau, x, w), \quad u_* (\tau, x, w), \quad v_* (t, \tau, x, w, u_* (\cdot))\} \tag{1.3}$$

обеспечивающую при достаточно малом шаге разбиения $\delta = \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ $(i = 0, 1,\ldots)$ оси t уклонение всех аппроксимирующих ломаных Эйлера $x_\Delta [t] = x_\Delta [t, t_0, x_0, V, u (\cdot)]$ от ε-окрестности M^ε множества M при всех $t_0 \leqslant t < \infty$, т. е. для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\delta \leqslant \delta_0$ найденная стратегия гарантирует уклонение $x_\Delta [t]$ от M^ε при всех $t \geqslant t_0$.

Схема построения такой стратегии связана с решением задачи о стабилизации системы, описываемой векторным дифференциальным уравнением (s — фазовый вектор размерности k; l и m — управляющие векторы)

$$ds / dt = As - Bl + Cm \tag{1.4}$$

2. Опишем схему построения движений $x_\Delta [t]$ и $w_\Delta [t]$. В реальной системе (1.1), согласно постановке задачи, управление u назначается первым игроком, управление v — вторым игроком. Во вспомогательной системе (1.2) оба управления u_* и v_* будут назначаться вторым игроком. Тогда перед вторым игроком будет стоять задача: распоряжаясь управлениями u_*, v_* в системе (1.2) и управлением v в системе (1.1), удерживать движение $w_\Delta [t]$ на мосту $W^\infty_{\varepsilon_0}$ (что возможно в силу v-стабильности моста $W^\infty_{\varepsilon_0}$) и управлять так, чтобы движение $x_\Delta [t]$ реальной системы (1.1) отслеживало движение $w_\Delta [t]$ вспомогательной системы (1.2). Тогда, пользуясь терминологией теории устойчивости движения, движение $x_\Delta [t]$ можно рассматривать как возмущенное по отношению к невозмущенному движению $w_\Delta [t]$.

В соответствии с постановкой задачи будем рассматривать два движения: ведомое движение $x_\Delta [t]$ в заданной реальной управляемой системе, описываемое в соответствии с [3,4] уравнением

$$dx_\Delta [t] / dt = Ax_\Delta [t] + Bu [t] + Cv (\tau_i, \ x_\Delta [\tau_i], \ w_\Delta \ [\tau_i]), \ x_\Delta [t_0] = x_0 \tag{2.1}$$
$$(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \ i = 0, 1, \ldots)$$

ведущее движение $w_\Delta [t]$, вырабатываемое вспомогательной системой и описываемое уравнением

$$dw_\Delta [t] / dt = Aw_\Delta [t] + Bu_* (\tau_i, \ x_\Delta [\tau_i], \ w_\Delta [\tau_i]) + Cv_* (t, \ \tau_i, \ x_\Delta [\tau_i], \ w_\Delta [\tau_i], \ u_*(\cdot)) \ (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}, \ i = 0, 1, \ldots) \tag{2.2}$$

Управления u_*, v_*, v будем выбирать следующим образом. Решим сначала задачу стабилизации системы (1.4), т. е. найдем такие управления $l (s)$ и $m (s)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.4) при $l = l (s)$, $m = m (s)$. Известно [6], что если система (1.4) стабилизируема (а это и будем предполагать), то управления, стабилизирующие систему (1.4), существуют и представляют собой линейные вектор-функции $l = l(s)$ и $m = m(s)$. Подставляя найденные $l = l(s)$ и $m = m(s)$ в (1.4), получим линейную, асимптотически устойчивую систему. Задавшись определенно отрицательной квадратичной формой $\omega (s) = -\| s\|^2$, найдем определенно положительную квадратичную форму $L(s)$, для которой будет выполняться равенство

$$(dL / dt)_{(1.4)} = (\partial L / \partial s)' \ (As - Bl(s) + Cm(s)) = - \| s\|^2 \tag{2.3}$$

Здесь символ $(dL / dt)_{(1.4)}$ означает полную производную по времени в силу системы (1.4), а штрих означает транспонирование.

Будем формировать движения $x_\Delta[t]$ и $w_\Delta[t]$, описываемые уравнениями (2.1) и (2.2) следующим образом. В начальный момент $t = t_0 = \tau_0$ полагаем $w_\Delta[t_0] = x_\Delta[t_0] = x_0$, управление $v[t] = v[\tau_0] \in Q^\alpha$ на полуинтервале $[\tau_0, \tau_1)$ выбираем произвольным. Выбираем произвольным образом и управление $u_*[t] = u_*[\tau_0] \in P^\alpha$ при $t \in [\tau_0, \tau_1)$ и определяем $v_*[t] \in Q$ при $t \in [\tau_0, \tau_1)$, как программное управление так, чтобы для движения $w_\Delta[t]$ выполнялось условие $\{\tau_1, w_\Delta[\tau_1]\} \in W_{\varepsilon_0}^\infty$. Возможность такого выбора управления вытекает из условия v-стабильности моста $W_{\varepsilon_0}^\infty$.

Пусть теперь в момент $t = \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ реализовались точки $\{\tau_i, x_\Delta[\tau_i]\}$ и $\{\tau_i, w_\Delta[\tau_i]\}$. Построим вектор $s = x_\Delta[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i]$ и составим уравнения возмущенного движения в принятой формализации на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$. Получим

$$ds_\Delta[t] / dt = As_\Delta[t] + B(u[t] - u_{*i}) + C(v_i - v_{*i}) \quad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}) \tag{2.4}$$

В момент $t = \tau_i$ по значениям $x_\Delta[\tau_i]$, $w_\Delta[\tau_i]$, $s_\Delta[\tau_i]$ строим управления u_{*i}, v_i, $v_{*i}[t]$ следующим образом. Управление $u_*[t] = u_{*i} = u_*(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i])$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ будем строить в виде суммы

$$u_{*i} = p(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) + l(s_\Delta[\tau_i]) \tag{2.5}$$

Здесь функция $l(s)$ берется из решения задачи о стабилизации системы (1.4), а управляющее воздействие p выбирается из условия максимума

$$\max_{p \in P} (\partial L / \partial s)'_{\tau_i} Bp(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) \tag{2.6}$$

По полученному u_{*i} находим $v_*[t, \tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i], u_{*i}(\cdot)]$, как программное управление $v_{*i} = v_{*i}[t]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ так, чтобы движение $w_\Delta[t]$, описываемое уравнением (2.2), удерживалось на мосту $W_{\varepsilon_0}^\infty$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$.

Управление $v[t] = v_i = v(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i])$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ строим в виде

$$v_i = q(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) + m(s_\Delta[\tau_i]) \tag{2.7}$$

Здесь функция $m(s)$ берется из решения задачи о стабилизации системы (1.4), а управляющее воздействие q выбирается из условия минимума

$$\min_{q \in Q} (\partial L / \partial s)'_{\tau_i} Cq(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) \tag{2.8}$$

Равенства (2.5), (2.7) и правило построения v_{*i} определяют конструируемую стратегию (1.3). Эта стратегия и решает поставленную задачу. Действительно, полная производная квадратичной формы $L(s)$ в силу (2.4) на полуинтервале $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} dL / dt = (\partial L / \partial s)_t' \,\theta, \ \theta = As_\Delta[t] + B(u[t] - p(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) - \\ - l(s_\Delta[\tau_i]) + C(q(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) + m(s_\Delta[\tau_i]) - v_{*i}[t]) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Перепишем (2.9) для удобства в форме

$$\begin{aligned} dL / dt = [(\partial L / \partial s)_t - (\partial L / \partial s)_{\tau_i}]' \,\theta + (\partial L / \partial s)_{\tau_i}' A(s_\Delta[t] - s_\Delta[\tau_i]) + \\ + (\partial L / \partial s)_{\tau_i}' B(u[t] - p(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i])) + \\ + (\partial L / \partial s)_{\tau_i}' C(q(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i]) - v_{*i}[t]) + \\ + (\partial L / \partial s)_{\tau_i}' [As_\Delta[\tau_i] - Bl(s_\Delta[\tau_i]) + Cm(s_\Delta[\tau_i])] \end{aligned} \tag{2.10}$$

Учитывая (2.3), (2.6) и (2.8), получим оценку

$$\begin{aligned} dL / dt \leqslant - \| s_\Delta[\tau_i] \|^2 + [(\partial L / \partial s)_t - (\partial L / \partial s)_{\tau_i}']\theta + (\partial L / \partial s)_{\tau_i}' A \times \\ \times (s_\Delta[t] - s_\Delta[\tau_i]) \end{aligned} \tag{2.11}$$

В правую часть неравенства (2.11) входят либо непрерывные функции, либо ограниченные величины, поэтому для (2.11) почти всюду на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$ справедлива оценка

$$dL / dt \leqslant - \| s_\Delta[t] \|^2 + \gamma\delta, \quad \gamma > 0 - \text{const} \tag{2.12}$$

Построим теперь в пространстве $\{s\}$ β-сферу $\|s\| \leqslant \beta$, удовлетворяющую следующим условиям: внутри β-сферы имеет место $\|l(s)\| \leqslant \alpha$, $\|m(s)\| \leqslant \alpha$ и, кроме того, $\beta \leqslant \varepsilon_0$. Рассмотрим поверхность $L(s) = c_1$, где $c_1 = \min(c_1', c_1'')$. Здесь постоянная величина c_1' выбирается из условия, что поверхность $L(s) = c_1'$ лежит целиком внутри β-сферы, а постоянная c_1'' такова, что поверхность $L(s) = c_1''$ является вписанной в сферу $\|s\| \leqslant c_2$, т. е. из условия $L(s) \leqslant c_1''$ следует $\|s\| \leqslant c_2$, где $c_2 = \varepsilon_0 - \varepsilon$. Очевидно, найдется такое число $\delta_0 > 0$, что сфера $\|s\|^2 \leqslant \gamma\delta_0$ будет лежать внутри поверхности $L(s) = c_1$. Из неравенства (2.12) следует, что между поверхностями $\|s\|^2 = \gamma\delta_0$ и $L(s) = c_1$ знак производной $(dL / dt)_{(2.4)}$ будет отрицательным. Это означает, что движение $s_\Delta[t]$, начавшись из сферы $\|s\|^2 \leqslant \gamma\delta_0$, в течение полуинтервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не выйдет из области $L(s) \leqslant c_1$, т. е. при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ будет обеспечено выполнение неравенства $L(s) \leqslant c_1$, откуда будет следовать неравенство $\|s_\Delta[t]\| \leqslant c_2$, или $\|x_\Delta[t] - w_\Delta[t]\| \leqslant \varepsilon_0 - \varepsilon$.

Таким образом, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ имеем $\rho(\{t, w_\Delta[t]\}, M) \geqslant \varepsilon_0$ и $\rho(\{t, x_\Delta[t]\}, \{t, w_\Delta[t]\}) \geqslant \varepsilon_0 - \varepsilon$. Здесь $\rho(\{t, w_\Delta[t]\}, M)$ — расстояние от точки $\{t, w_\Delta[t]\}$ до множества M в евклидовой метрике. Тогда

$$\rho(\{t, x_\Delta[t]\}, M) \geqslant |\rho(\{t, w_\Delta[t]\}, M) - \rho(\{t, x_\Delta[t]\}, \{t, w_\Delta[t]\})| \geqslant \varepsilon$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть для начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ выполняются условия:

1) каковы бы ни были момент времени $\vartheta \in [t_0, \infty)$ и стратегия $U_* \div u_*(t, w, v_*)$, хотя бы одно движение $w[t, t_0, w_0, U_*]$ останется в H при $t \in [t_0, \vartheta]$;

2) система (1.4) стабилизируема.

Тогда найдется такая стратегия $V \div \{v(\tau, x, w), u_*(\tau, x, w), v_*(t, \tau, x, w, u_*(\cdot))\}$ управления с поводырем, что какими бы малыми ни были выбраны $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$), найдется число $\delta_0 > 0$, что для всех движений $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_0, x_0, V, u(\cdot)]$, порожденных этой стратегией и имеющих шаг $\sup_i(\tau_{i+1} - \tau_i) \leqslant \delta_0$ ($i = 0, 1, \ldots$), будет обеспечено уклонение от ε-окрестности M^ε множества M в течение бесконечного полуинтервала времени.

В заключение заметим, что при построении управления V в конкретных случаях полное описание моста $W_{\varepsilon_0}^\infty$, вообще говоря, не требуется, а достаточно уметь только по всякому выбранному управлению u_* вычислять управление v_*, которое сохраняет движение $w_\Delta[t]$ на мосту $W_{\varepsilon_0}^\infty$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$. Таким образом, предложенная устойчивая процедура позиционного управления V реальной системой (1.1) сразу может быть приложена в любом случае, когда для модели (1.2) известно или может быть эффективно найдено решение задачи об ε-уклонении при информационной дискриминации. Иногда это может привести к очень просто реализуемым процедурам позиционного управления.

Например, рассмотрим задачу об уклонении для пары однотипных объектов [7], причем условием встречи является совпадение векторов y и z

$$(2.13)\qquad \begin{aligned} dy / dt &= Ay + Bu, \qquad u \in P \\ dz / dt &= Az + Bv, \qquad v \in Q_* \end{aligned}$$

Предположим, что среди собственных чисел матрицы A имеется хотя бы одно с положительной вещественной частью; система

$$(2.14)\qquad ds / dt = As + Bm$$

стабилизируема и можно выбрать P_* так, чтобы выполнялись условия

$$P_* \supset P^\alpha, \qquad Q_* \supset Q^\alpha, \qquad Q = \varkappa P_* \qquad (0 < \varkappa < 1)$$

Положим $x = y - z$ и запишем уравнение модели в виде

$$dw / dt = Aw + Bu_* - Bv_*, \qquad u_* \in P_*, \qquad v_* \in Q$$

Если начальная позиция $\{t_0, y_0, z_0\}$ такова, что выбором управления $m \in (1 - \varkappa) P_*$ систему (2.14) нельзя привести за конечное время в ε-окрестность точки $s = 0$, то для сохранения позиции $\{t, w[t]\}$ на мосту $W_{\varepsilon_0}^\infty$ достаточно выбирать v_* так, чтобы $u_* - v_* \in (1 - \varkappa)\ P_*$. Таким образом, в данном примере все нужные построения, связанные с мостом $W_{\varepsilon_0}^\infty$, оказываются весьма простыми, хотя описание самого моста остается неизвестным.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и полезные советы.

Поступила 13 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об убегании одного управляемого объекта от другого. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 4.
2. *Никольский М. С.* О задаче убегания. В сб.: Прикладная математика и программирование, вып. 9. Кишинев, «Штиинца», 1973.
3. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. *Красовский Н. Н.* К игровой задаче уклонения. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 2.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
7. *Красовский Н. Н.* К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.

УДК 531.31

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

А. Н. Баутин

(Горький)

Методами теории бифуркаций при кусочно-линейной аппроксимации характеристики с падающим участком дается качественное исследование системы, представляющей интерес для приложений. Прослеживаются возможные бифуркации и поведение бифуркационных кривых. Система рассматривалась разными авторами при различных аппроксимациях [1–9], однако полного качественного исследования ни в одном случае не было дано.

1. Уравнения движения. Рассматривается система

$$x^\bullet = y - \varphi(x), \quad y^\bullet = L, \quad L \equiv \sigma - \lambda x - y \qquad (\sigma > 0,\ \lambda > 0) \tag{1.1}$$

где $\varphi(x)$ — нелинейная функция, содержащая падающий участок. Аппроксимируем $\varphi(x)$ кусочно-линейной функцией, сотоящей из трех линейных кусков: падающего участка с наклоном $k = -\alpha_2 < 0$, восходящих участков с наклоном $k = \alpha_1 > 0$. Фазовое пространство при такой аппроксимации разбивается на три части, в каждой из которых система линейна. В областях I и III лежат восходящие ветви характеристики, в области II — падающий участок (фиг. 1).

2. Состояния равновесия. Разбиение пространства параметров по числу и характеру состояний равновесия. Возможны одно или три грубых состояния равновесия. В случае одного состояния равновесия имеем фокус (узел), всегда устойчивый в областях I или III и неустойчивый в области II, если $\alpha_2 > 1$. В случае трех состояний равновесия имеем всегда устойчивые фокусы (узлы) в областях I и III и седло в области II.