Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.375

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

А. П. Дацышин, М. П. Саврук

(Львов)

Плоская задача теории упругости для тела, ослабленного системой произвольно ориентированных прямолинейных трещин, сведена к системе сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрены следующие задачи: система трещин в неограниченной и в полубесконечной пластинах, система трещин в бесконечной плоскости с круговым отверстием, периодическая и двоякопериодическая системы трещин произвольной ориентации в неограниченной пластине, периодическая система трещин в полубесконечной плоскости.

Аналитическое решение полученных уравнений можно найти методом возмущений для случая, когда трещины находятся далеко одна от другой и от границы области; в других случаях их решение можно найти численно.

1. Пусть в упругой изотропной плоскости, связанной с декартовой системой координат xOy, имеется N разрезов (трещин) длиной $2a_k (k = 1, 2, \ldots, N)$. Центры разрезов O_k определяются координатами $z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$. В точках O_k размещены начала локальных систем координат $x_kO_ky_k$. Оси O_kx_k совпадают с линиями разрезов и образуют углы α_k с осью Ox. Берега разрезов загружены самоуравновешивающимися усилиями

$$p_k(x_k) = N_k^+ - iT_k^+ = N_k^- - iT_k^-, \quad |x_k| \leqslant a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N \tag{1.1}$$

Сначала рассмотрим задачу об определении напряжений в неограниченной упругой плоскости с одним разрезом $|x_k| \leqslant a_k$, $y_k = 0$ и заданным на нем разрывом перемещений $g_k(x_k)$. Для указанной задачи функции напряжений Мусхелишвили [1] $\Phi(z_k)$ и $\Psi(z_k)$ в системе координат $x_kO_ky_k$ имеют вид [2-4]

$$\Phi(z_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a_k}^{a_k} \frac{g_k'(t)\,dt}{t - z_k}, \qquad z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^\circ) \tag{1.2}$$

$$\Psi(z_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a_k}^{a_k} \left[\frac{\overline{g_k'(t)}}{t - z_k} - \frac{t g_k'(t)}{(t - z_k)^2}\right] dt$$

В силу линейности задачи функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{a_k} \frac{g_k'(t)\,dt}{t - z_k}, \qquad T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^\circ \tag{1.3}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N} e^{-2i\alpha_k}\int_{-a_k}^{a_k} \left[\frac{\overline{g_k'(t)}}{t - z_k} - \frac{\overline{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k'(t)\right] dt$$

полученные путем суперпозиции функций напряжений (1.2) для изолированных разрезов, описывают напряженное состояние упругой плоскости, вызванное разрывами перемещений $g_k(x_k)$ на N отрезках $|x_k| \leqslant a_k$, $y_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Определим напряжения на линии $O_n x_n$ от разрывов перемещений $g_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$

$$N_n - iT_n = \overline{\Phi_1(z_n)} + z_n\overline{\Phi_1'(z_n)} + \overline{\Psi_1(z_n)} + \Phi_1(z_n) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{a_k}[K_{nk}(t, x_n)\, g_k'(t) + L_{nk}(t, x_n)\overline{g_k'(t)}]\, dt \tag{1.4}$$

Здесь

$$K_{nk}(t, x) = \frac{e^{i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{T_k - X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{T}_k - \overline{X}_n}\right], \quad X_n = xe^{i\alpha_n} + z_n^{\circ} \tag{1.5}$$

$$L_{nk}(t, x) = \frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{\overline{T}_k - \overline{X}_n} - \frac{T_k - X_n}{(\overline{T}_k - \overline{X}_n)^2}e^{-2i\alpha_n}\right]$$

Приравнивая напряжения (1.4) к заданным на берегах разрезов напряжениям (1.1), получаем систему N сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k'(x)$ [5,6]

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{a_k}[g_k'(t)\, K_{nk}(t, x) + \overline{g_k'(t)}\, L_{nk}(t, x)]\, dt = \pi p_n(x) \tag{1.6}$$

$$|x| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

(Для удобства здесь и в дальнейшем индекс в x_n опущен). Ядра (1.5) этой системы уравнений регулярны, за исключением случая $n = k$, когда $K_{nk}(t, x)$ переходит в сингулярное ядро Коши.

2. Будем считать, что центры разрезов находятся на оси Ox, расстояние между центрами соседних разрезов постоянно и равно $d(z_k^0 = kd$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, длины и углы наклона разрезов одинаковы $(a_k = a,\ \alpha_k = \alpha)$. В предположении, что ко всем разрезам приложена одна и та же нагрузка $(p_k(x_k) = p(x_k))$ и число разрезов стремится к бесконечности, получаем периодическую систему разрезов произвольной ориентации в бесконечной плоскости. При этом $g_k'(x_k) = g'(x_k)$. Из (1.3) после суммирования найдем

$$\Phi_2(z) = \frac{e^{i\alpha}}{2d}\int_{-a}^{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(te^{i\alpha} - z)\, g'(t)\, dt \tag{2.1}$$

$$\Psi_2(z) = \frac{e^{i\alpha}}{2d}\int_{-a}^{a}\left\{\overline{g'(t)}\, e^{-2i\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(te^{i\alpha} - z) - \right.$$

$$\left. - \left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{d}(te^{i\alpha} - z) + \frac{\pi}{d}(t - te^{2i\alpha} + ze^{i\alpha})\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{d}(te^{i\alpha} - z)\right]g'(t)\right\}dt$$

Определив по этим функциям напряжения на линии любого из разрезов, например с центром в точке O, и приравняв их к заданной нагрузке (1.1), получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g'(x)$

$$\int_{-a}^{a} [g'(t)K_1(t-x)+\overline{g'(t)}L_1(t-x)]\,dt = \pi p(x), \quad |x|\leqslant a \tag{2.2}$$

Здесь

$$K_1(x)=\frac{\pi}{2d}\left(e^{i\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi x e^{i\alpha}}{d}+e^{-i\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\pi x e^{-i\alpha}}{d}\right) \tag{2.3}$$
$$L_1(x)=\frac{\pi}{2d}(e^{-i\alpha}-e^{-3i\alpha})\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x e^{-i\alpha}}{d}-\frac{\pi x e^{-i\alpha}}{d}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x e^{-i\alpha}}{d}\right)$$

В случае бесконечного ряда коллинеарных разрезов ($\alpha=0$) приходим к уравнению

$$\frac{1}{d}\int_{-a}^{a} g'(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-x)}{d}\,dt = p(x), \quad |x|\leqslant a \tag{2.4}$$

рассмотренному в [7] при нормальной нагрузке на берегах разрезов ($\operatorname{Im} p(x)=0$). Точное решение уравнения (2.4) имеет вид

$$g'(x)=\left(d\cos^2\frac{\pi x}{d}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi a}{d}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{d}}\right)^{-1}\times \tag{2.5}$$
$$\times\int_{-a}^{a}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\pi a}{d}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi t}{d}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{d}-\operatorname{tg}\frac{\pi t}{d}\right)^{-1}p(t)\,dt$$

При $\alpha=\pi/2$ из (2.2) приходим к известным интегральным уравнениям для бесконечного ряда параллельных разрезов, полученным при симметричной ($\operatorname{Im} p(x)=0$) [8,9] и антисимметричной ($\operatorname{Re} p(x)=0$) [10] нагрузке.

3. Рассмотрим неограниченную упругую плоскость, ослабленную двоякопериодической системой разрезов произвольной ориентации. Пусть центры разрезов находятся в вершинах параллелограммов периодов, т. е. в точках $P=m\omega_1+n\omega_2$ ($m, n=0, \pm1, \pm2, \ldots$), где ω_1 и ω_2 — основные периоды ($\operatorname{Im}\omega_1=0$, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$).

Комплексные потенциалы задачи теории упругости для указанной области можно получить аналогично случаю периодической задачи, положив в (1.3) $a_k=a$, $\alpha_k=\alpha$, $z_k^\circ=P$, $p_k(x_k)=p(x_k)$. Тогда $g_k'(x_k)=g'(x_k)$ и из (1.3) получим

$$\Phi_3(z)=\frac{e^{i\alpha}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\zeta(te^{i\alpha}-z)g'(t)\,dt+A \tag{3.1}$$

$$\Psi_3(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\{e^{-i\alpha}\zeta(te^{i\alpha}-z)\overline{g'(t)}+$$
$$+[e^{i\alpha}\rho_1(te^{i\alpha}-z)-t\rho(te^{i\alpha}-z)]g'(t)\}\,dt+Be^{-2i\alpha}$$

Здесь ζ — дзета-функция Вейерштрасса, $\rho(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, $\rho_1(z)$ — специальная мероморфная функция [11]. Эти функции в конгруэнтных точках удовлетворяют соотношениям [12]

$$\rho(z+\omega_\nu)-\rho(z)=0, \quad \zeta(z+\omega_\nu)-\zeta(z)=\delta_\nu \tag{3.2}$$
$$\rho_1(z+\omega_\nu)-\rho_1(z)=\overline{\omega}_\nu\rho(z)+\gamma_\nu$$
$$\delta_\nu=2\zeta\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right), \quad \gamma_\nu=2\rho_1\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)-\overline{\omega}_\nu\rho\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right), \quad \nu=1, 2$$
$$\delta_1\omega_2-\delta_2\omega_1=2\pi i, \quad \gamma_2\omega_1-\gamma_1\omega_2=\delta_1\overline{\omega}_2-\delta_2\overline{\omega}_1$$

Чтобы избежать расходящихся сумм, при получении комплексных потенциалов (3.1) были введены неизвестные постоянные A и B, которые могут быть определены из статических условий [11]. С этой целью рассмотрим главный вектор всех сил, действующих вдоль произвольной дуги CD, соединяющей две конгруентные точки плоскости. Выражение для главного вектора имеет вид [1]

$$X+iY=-iq(z)\,|_C^D=-i[\varphi_3(z)+z\overline{\Phi_3(z)}+\psi_3(z)]_C^D \tag{3.3}$$
$$(\varphi_3'(z)=\Phi_3(z),\ \psi_3'(z)=\Psi_3(z))$$

На каждом разрезе действует самоуравновешенная нагрузка, поэтому главный вектор всех сил вдоль дуги CD равен нулю, т. е.

$$q(z+\omega_\nu)-q(z)=0, \quad \nu=1, 2 \tag{3.4}$$

Используя равенства

$$\int_{-a}^{a} g'(t)\,dt=0, \quad \zeta'(z)=-\rho(z) \tag{3.5}$$

из (3.1) найдем (C_1, C_2 — постоянные интегрирования)

$$\varphi_3(z)=\frac{e^{2i\alpha}}{2\pi}\int_{-a}^{a} g(t)\,\zeta(te^{i\alpha}-z)\,dt+Az+C_1 \tag{3.6}$$
$$\psi_3(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\{[\overline{g(t)}+g(t)]\,\zeta(te^{i\alpha}-z)+$$
$$+e^{i\alpha}g(t)\,[e^{i\alpha}\rho_1(te^{i\alpha}-z)-t\rho(te^{i\alpha}-z)]\}\,dt+Bze^{-2i\alpha}+C_2$$

Подставляя функции (3.6) в (3.3) и учитывая соотношения (3.2), из (3.4) получим систему уравнений

$$(A+\overline{A})\omega_\nu+\overline{B}\overline{\omega}_\nu e^{2i\alpha}=\delta_\nu b+\overline{\gamma}_\nu b+\overline{\delta}_\nu(e^{-2i\alpha}b+\overline{b}e^{2i\alpha}), \quad \nu=1, 2 \tag{3.7}$$
$$b=\frac{e^{2i\alpha}}{2\pi}\int_{-a}^{a} g(t)\,dt$$

из которой определяются постоянные $\mathrm{Re}\,A$ и B. Величина $\mathrm{Im}\,A$, естественно, остается произвольной.

Функции напряжений (3.1) отвечают двоякопериодическому характеру задачи и удовлетворяют всем требованиям, за исключением граничных условий на берегах разрезов. Удовлетворив граничное условие на любом разрезе, например с центром в точке O

$$\Phi(x_0) + \overline{\Phi(x_0)} + x_0\overline{\Phi'(x_0)} + \overline{\Psi(x_0)} = p(x_0) \tag{3.8}$$

придем к сингулярному интегральному уравнению относительно функции $g'(x)$

$$\int_{-a}^{a} [g'(t) K_2(t-x) + \overline{g'(t)} L_2(t-x)]\, dt = \tag{3.9}$$
$$= \pi [p(x) - A - \bar{A} - \bar{B}], \quad |x| \leqslant a$$
$$K_2(x) = {}^1/_2[e^{i\alpha}\zeta(xe^{i\alpha}) + e^{-i\alpha}\bar{\zeta}(xe^{-i\alpha})]$$
$$L_2(x) = {}^1/_2[e^{-i\alpha}\bar{\zeta}(xe^{-i\alpha}) - xe^{-2i\alpha}\bar{\rho}(xe^{-i\alpha}) + e^{-3i\alpha}\bar{\rho}_1(xe^{-i\alpha})]$$

Постоянная $A + \bar{A} + \bar{B}$ в уравнении (3.9) легко находится из системы (3.7)

$$A + \bar{A} + \bar{B} = \frac{1}{\omega_1}[\delta_1 b + \bar{\gamma}_1 \bar{b} + \bar{\delta}_1 (e^{-2i\alpha} b + e^{2i\alpha}\bar{b})]$$

Здесь все величины известны, за исключением постоянной b, которую необходимо определить в ходе решения интегрального уравнения (3.9).

Заметим, что в работе [13] двоякопериодическая задача теории трещин для случая, когда основной параллелограмм периодов ромб, а трещины расположены по диагонали ромба и к их берегам приложены растягивающие усилия постоянной интенсивности, была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, ядро которого имеет довольно сложную структуру.

4. Пусть в упругой плоскости имеется $N + 1$ разрез длиной $2a_k (k = 0, 1, \ldots, N)$. Предположим, что разрез с индексом нуль расположен на оси Ox ($\alpha_0 = 0$) с центром в начале системы координат xOy ($z_0{}^0 = 0$), а остальные разрезы находятся в нижней полуплоскости $y < 0$. Положим $p_0(x) = 0$. Устремив a_0 к бесконечности, получим систему N разрезов в упругой полуплоскости со свободным краем. Уравнения (1.6) примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0'(t)}{t-x}\, dt + \sum_{k=1}^{N} \int_{-a_k}^{a_k} [g_k'(t) K_{0k}(t, x) + \tag{4.1}$$
$$+ \overline{g_k'(t)} L_{0k}(t, x)]\, dt = 0, \quad |x| < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-a_k}^{a_k} [g_k'(t) K_{nk}(t, x) + \overline{g_k'(t)} L_{nk}(t, x)]\, dt + \tag{4.2}$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [g_0'(t) K_{n0}(t, x) + \overline{g_0'(t)} L_{n0}(t, x)]\, dt = \pi p_n(x)$$
$$|x| \leqslant a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

Определив из уравнения (4.1) функцию $g_0'(x)$ и подставив ее в уравнение (4.2), после некоторых преобразований приходим к системе N сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{a_k}[g_k'(t)M_{nk}(t,x)+\overline{g_k'(t)}N_{nk}(t,x)]\,dt=\pi p_n(x) \tag{4.3}$$

$$|x|\leqslant a_n,\qquad n=1,2,\ldots,N$$

$$M_{nk}(t,x)=K_{nk}(t,x)+\frac{e^{i\alpha_k}}{2}\left\{\frac{2}{X_n-\overline{T}_k}+\frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{X}_n-T_k}+\right.$$

$$\left.+\frac{\overline{T}_k-T_k}{(\overline{X}_n-T_k)^2}\left[1+e^{-2i\alpha_n}-\frac{2e^{-2i\alpha_n}(X_n-T_k)}{\overline{X}_n-T_k}\right]\right\}$$

$$N_{nk}(t,x)=L_{nk}(t,x)+\frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left[\frac{T_k-\overline{T}_k}{(X_n-\overline{T}_k)^2}+\frac{1}{\overline{X}_n-T_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{X_n-T_k}{(\overline{X}_n-T_k)^2}e^{-2i\alpha_n}\right]$$

При $N=1$ и $\alpha_1=\pi/2$ $\operatorname{Im}p_1(x)=0$ из (4.3) приходим к известному [14] интегральному уравнению. Отметим, что подобным образом можно получить интегральные уравнения задачи теории упругости для полосы, ослабленной системой произвольно размещенных разрезов.

5. Предположим, что центры всех разрезов расположены на одной прямой, параллельной границе полуплоскости, и расстояния между центрами соседних разрезов одинаковы и равны d, *т.* е. $z_k^\circ=x_k^\circ+iy_k^\circ=kd-ih$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, длины и углы наклона разрезов равны $(a_k=a,\ \alpha_k=\alpha)$, ко всем разрезам приложена одинаковая нагрузка $p_k(x_k)=p(x_k))$. Устремив число разрезов к бесконечности, получим в полуплоскости периодическую систему разрезов произвольной ориентации $(g_k(x_k)=g(x_k))$. Интегральное уравнение такой задачи находим аналогично случаю бесконечной пластины с периодической системой разрезов

$$\int_{-a}^{a}[g'(t)M(t,x)+\overline{g'(t)}N(t,x)]\,dt=\pi p(x),\qquad |x|\leqslant a \tag{5.1}$$

Здесь

$$M(t,x)=K_1(t-x)+\frac{\pi e^{i\alpha}}{2d}\left\{\operatorname{ctg}X(t,x)+e^{-2i\alpha}\operatorname{ctg}\overline{X}(t,x)-\right. \tag{5.2}$$

$$-\frac{2\pi i}{d}(t\sin\alpha-h)\operatorname{cosec}^2\overline{X}(t,x)\left[1-e^{-2i\alpha}-\frac{4\pi ie^{-2i\alpha}}{d}\times\right.$$

$$\left.\left.\times(x\sin\alpha-h)\operatorname{ctg}\overline{X}(t,x)\right]\right\}$$

$$N(t,x)=L_1(t-x)+\frac{\pi e^{-i\alpha}}{2d}\left[\frac{2\pi i}{d}(t\sin\alpha-h)\operatorname{cosec}^2X(t,x)+\right.$$

$$\left.+(1-e^{-2i\alpha})\operatorname{ctg}\overline{X}(t,x)-\frac{2\pi ie^{-2i\alpha}}{d}(x\sin\alpha-h)\operatorname{cosec}^2\overline{X}(t,x)\right],$$

$$X(t,x)=\frac{\pi}{d}(xe^{i\alpha}-2ih-te^{-i\alpha})$$

Как видно из (4.4) и (5.2), ядра интегральных уравнений (4.3) и (5.1) состоят из двух слагаемых: первое из них совпадает с ядрами (1.5) и (2.3), второе учитывает влияние края полуплоскости.

6. Рассмотрим упругую плоскость с круговым отверстием единичного радиуса, отнесенную к системе координат xOy с началом в центре отверстия. Пусть в этой плоскости имеется N произвольно ориентированных разрезов, берега которых нагружены усилиями (1.1). Контур отверстия γ незагружен. Сведем задачу об определении напряженно-деформированного состояния такой области к решению системы сингулярных интегральных уравнений.

Предположим, что в бесконечной пластине без отверстия все разрезы находятся вне единичной окружности γ. Используя комплексные потенциалы (1.3) и формулу из работы [1], найдем комбинацию напряжений $\sigma_r + i\tau_{r\theta}$, вызванных на окружности $\gamma(z = e^{i\theta} = \sigma)$ разрывами перемещений $g_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$

$$
\begin{aligned}
(6.1)\qquad \sigma_r + i\tau_{r\theta} &= \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - e^{-2i\theta}\left[z\overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Psi_1(z)}\right] = \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{a_k}\left\{\left[\frac{1}{t-z_k} - \frac{e^{2i\alpha_k}}{\sigma^2(t-\bar z_k)}\right]g_k'(t) + \right. \\
&\left. + \left[\frac{1}{t+\bar z_k} - \frac{\sigma - T_k e^{i\alpha_k}}{\sigma^2(t-\bar z_k)^2}\right]\overline{g_k'(t)}\right\}dt
\end{aligned}
$$

Решим вспомогательную задачу для упругой плоскости с круговым отверстием единичного радиуса, на контуре которого заданы нормальные и касательные напряжения, равные по величине и обратные по знаку напряжениям (6.1). Как известно [1], напряженно-деформированное состояние в этом случае характеризуется функциями

$$
\Phi_4(z) = \frac{1}{2\pi i z}\int_\gamma \frac{\sigma(\sigma_r + i\tau_{r\theta})}{\sigma - z}d\sigma + \frac{a_1}{z}
$$

$$
\Psi_4(z) = -\frac{1}{2\pi i z}\int_\gamma \frac{\sigma_r - i\tau_{r\theta}}{\sigma(\sigma - z)}d\sigma + \frac{\Phi_4(z)}{z^2} - \frac{\Phi_4'(z)}{z} + \frac{a_1'}{z}
$$

Здесь следует положить $a_1 = a_1' = 0$, так как равен нулю главный вектор усилий, приложенных к контуру γ.

Подставив сюда напряжения (6.1) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов найдем

$$
\begin{aligned}
\Phi_4(z) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{k}\left\{-\frac{T_k e^{i\alpha_k}}{1-\bar T_k z}g_k'(t) + \right. \\
&\left. + \left[\frac{1-e^{-i\alpha_k}}{z\bar T_k^2} + \frac{1}{\bar T_k(1-\bar T_k z)} + \frac{z e^{-i\alpha_k} - T_k}{(1-\bar T_k z)^2}\right]e^{-i\alpha_k}\overline{g_k'(t)}\right\}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_4(z) &= \frac{1}{2\pi z}\sum_{k=1}^{N}\int_{-a_k}^{a_k}\left\{\left[\frac{1}{T_k z} - \frac{\bar T_k}{z(1-\bar T_k z)} + \frac{\bar T_k^2}{(1-\bar T_k z)^2}\right]\times\right. \\
&\times e^{i\alpha_k}g_k'(t) + \left[\frac{1}{z\bar T_k} + \frac{2(1-e^{-i\alpha_k})}{z^2\bar T_k^2} - \frac{z+T_k}{z(1-z\bar T_k)^2} - \right. \\
&\left.\left. - \frac{2\bar T_k(z e^{-i\alpha_k} - T_k)}{(1-\bar T_k z)^3}\right]e^{-i\alpha_k}\overline{g_k'(t)}\right\}
\end{aligned}
$$

Упругое равновесие бесконечной пластины со свободной круговой границей и заданными на N отрезках $y_k = 0$, $|x_k| \leqslant a_k$ скачками перемещений $g_k(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots N)$ определяются комплексными потенциалами

$$\Phi_5(z) = \Phi_1(z) + \Phi_4(z), \qquad \Psi_5(z) = \Psi_1(z) + \Psi_4(z)$$

Требуя, чтобы функции $\Phi_5(z)$ и $\Psi_5(z)$ удовлетворяли граничным условиям (1.1) на берегах разрезов, приходим к системе N сингулярных интегральных уравнений относительно функций $g_k'(x_k)$

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{-a_k}^{a_k} [R_{nk}(t, x)\, g_k'(t) + S_{nk}(t, x)\, \overline{g_k'(t)}]\, dt = \pi p_n(x) \tag{6.2}$$

$$|x| \leqslant a_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_{nk}(t, x) = K_{nk}(t, x) &+ \frac{e^{i\alpha_k}}{2}\left\{\frac{1-e^{i\alpha_k}}{X_n T_k^2} - \frac{1}{X_n(1-\overline{T}_k X_n)} + \right.\\ &+ \frac{1}{T_k(1-T_k\overline{X}_n)} + \frac{\overline{X}_n e^{i\alpha_k} - \overline{T}_k}{(1-T_k\overline{X}_n)^2} + e^{-2i\alpha_n}\left[\frac{2T_k(\overline{X}_n e^{i\alpha_k} - \overline{T}_k)}{\overline{X}_n(1-T_k\overline{X}_n)^3} \times \right.\\ &\times (X_n\overline{X}_n - 1) + \frac{1-e^{i\alpha_k}}{\overline{X}_n^3 T_k^2}(2 - X_n\overline{X}_n) + \frac{1}{\overline{X}_n^2 T_k} + \\ &\left.\left.+ \frac{X_n(1+e^{i\alpha_k})}{(1-T_k\overline{X}_n)^2} - \frac{\overline{X}_n + \overline{T}_k}{\overline{X}_n^2(1-T_k\overline{X}_n)^2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} S_{nk}(t, x) = L_{nk}(t, x) &+ \frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left\{\frac{1-e^{-i\alpha_k}}{X_n\overline{T}_k^2} - \frac{1}{\overline{X}_n(1-T_k\overline{X}_n)} + \right.\\ &+ \frac{1}{\overline{T}_k(1-\overline{T}_k X_n)} + \frac{X_n e^{-i\alpha_k} - T_k}{(1-\overline{T}_k X_n)^2} + \\ &\left.+ e^{-2i\alpha_n}\left[\frac{T_k^2(1-X_n\overline{X}_n)}{\overline{X}_n(1-T_k\overline{X}_n)^2} + \frac{1}{\overline{T}_k\overline{X}_n^2} - \frac{T_k}{\overline{X}_n^2(1-T_k\overline{X}_n)}\right]\right\} \end{aligned}$$

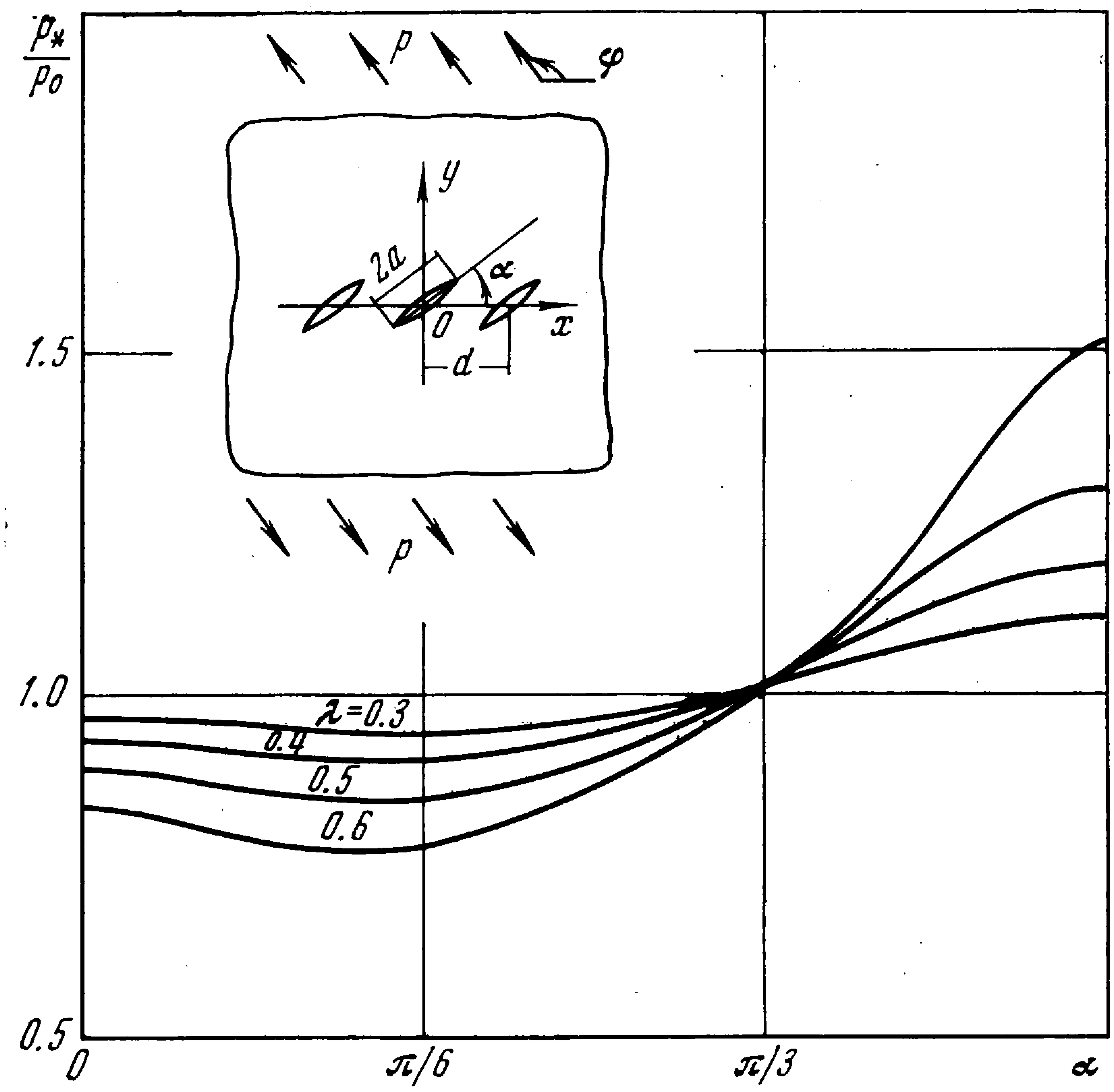
Вторые составляющие в (6.3) определяют возмущающее влияние кругового отверстия. При $N = 1$, $\alpha_1 = 0$ из (6.2) получаем известное уравнение [3, 7, 15, 16] для случая радиального разреза в плоскости с круговым отверстием. Заметим также, что совершенно аналогично можно получить интегральные уравнения задачи теории упругости для кругового диска, ослабленного системой произвольно размещенных разрезов.

7. Зная функции $g_k'(x)$ (или $g'(x)$), можно определить напряженно-деформированное состояние плоскости с произвольно ориентированными трещинами, загруженными усилиями (1.1). В частности, для коэффициентов интенсивности напряжений [17,18] у вершин любой из трещин имеем формулу

$$k_{1k}^{\pm} - ik_{2k}^{\pm} = \mp \lim_{x \to \pm a_k} \left[\frac{\sqrt{a_k^2 - x^2}}{\sqrt{a_k}}\, g_k'(x)\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, N \tag{7.1}$$

Здесь величины с верхним знаком относятся к правым вершинам трещин, с нижним — к левым. Используя коэффициенты (7.1), можно исследовать предельно-равновесное состояние [18] тел с трещинами.

В качестве примера рассмотрим задачу о предельном равновесии пластины с периодической системой трещин, которая на бесконечности подвержена двухосному растяжению усилиями p и q во взаимноперпендикулярных направлениях, причем усилия p



направлены под углом φ к оси Ox. Тогда в интегральном уравнении (2.2) будем иметь

$$p(x) = -s = -\tfrac{1}{2}\left[(p+q) - (p-q)\, e^{2i(\varphi-\alpha)}\right]$$

Аналитическое решение этого уравнения легко получить [6] для малых значений безразмерного параметра $\lambda = 2a / d$. Коэффициенты интенсивности напряжений определяются по формуле

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = \sqrt{a}\left\{s + \frac{\pi^2\lambda^2}{24}\left[s\cos 2\alpha + \bar{s}\,(e^{-2i\alpha} - e^{-4i\alpha})\right] + \right.$$

$$+\frac{\pi^4\lambda^4}{128}\left\{s\left[\frac{2}{9}\cos^2 2\alpha + \frac{1}{5}\cos 4\alpha + \frac{4}{9}(1-\cos 2\alpha)\right] + 2\bar{s}\,(e^{-4i\alpha} - e^{-6i\alpha}) \times\right.$$

$$\times\left.\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{9}e^{2i\alpha}\cos 2\alpha\right)\right\} \mp \frac{\pi^6\lambda^6}{2^8\cdot 3^2}\left\{s\left[\frac{5}{21}\cos 6\alpha + \frac{1}{6}\cos^3 2\alpha + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{4}\cos 2\alpha\cos 4\alpha + \frac{2}{5}e^{2i\alpha}(1-\cos 2\alpha) + \cos 2\alpha\,(1-\cos 2\alpha) +$$

$$+\left.\frac{3}{5}e^{-2i\alpha}(1-\cos 2\alpha)\right] + \bar{s}\,(e^{-2i\alpha} - e^{-4i\alpha})\left[\frac{5}{7}e^{-4i\alpha} + \frac{1}{2}e^{2i\alpha}\cos 2\alpha + \right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{4}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos^2 2\alpha + \frac{1}{3}(1-\cos 2\alpha)\right]\right\}\right\} + O(\lambda^8)$$

Используя критерий хрупкого разрушения Гриффита — Ирвина и известную гипотезу о начальном направлении распространения трещин по площадкам с максимальными нормальными напряжениями, определим величины разрушающих усилий. Зависимость критических значений p^* усилий p ($q = 0$, $\varphi = \pi / 2 + \alpha$) от угла ориентации трещин α при разных значениях λ представлена на фигуре (p_0 — те же величины усилий p для случая изолированной трещины ($\lambda = 0$)).

В заключение отметим, что предложенный здесь способ получения интегральных уравнений плоской задачи теории упругости для тела с разрезами может быть применен и в других задачах, в частности в задачах изгиба пластин с разрезами, а также в соответствующих задачах термоупругости.

Поступила 16 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Шерман Д. И.* Об одной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 9.
3. *Витвицкий П. М.*, *Леонов М. Я.* Полосы скольжения при неоднородной деформации пластинки. В сб.: Вопросы механики реального твердого тела, вып. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1962.
4. *Либацкий Л. Л.* Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами. Физико-химическая механика материалов, 1965, т. 1, № 4.
5. *Саврук М. П.*, *Дацышин А. П.* О предельно-равновесном состоянии тела, ослабленного системой произвольно ориентированных трещин. В сб.: Термомеханические методы разрушения горных пород, ч. 2. Киев, «Наукова думка», 1972.
6. *Дацышин А. П.*, *Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин в упругих телах. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
7. *Bueckner H. F.* Some stress singularities and their computation by means of integral equations. In: Boundary Problems Different Equat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1960.
8. *Smith E.* The opening of parallel cracks by an applied tensile stress. Internat. J. Engng Sci., 1966, vol. 4, No. 1.
9. *Ichikawa M.*, *Ohashi M.*, *Yokobori T.* Interaction between parallel cracks in an elastic solid and its effect on fracture. Repts. Res. Inst. Strength and Fract. Mater., Tohoku Univ., 1965, vol. 1, No. 1.
10. *Саврук М. П.* Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при антисимметричной нагрузке. Физико-химическая механика материалов, 1972, т. 8, № 4.
11. *Фильштинский Л. А.* Двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
12. *Григолюк Э. И.*, *Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
13. *Кудрявцев Б. А.*, *Партон В. З.* Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
14. *Свекло В. А.* Об одном комплексном представлении решения в плоской теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
15. *Wigglesworth L. A.* Stress relief in a cracked plate. Mathematika, 1958, vol. 5, No. 1.
16. *Либацкий Л. Л.*, *Баранович С. Т.* О разрыве перемещений вдоль прямолинейных отрезков в пластине с круговым отверстием. Прикл. механ., 1970, вып. 3.
17. *Irwin G. R.* Handbuch der Physic, Bd 6. Berlin, Springer, 1958.
18. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.