

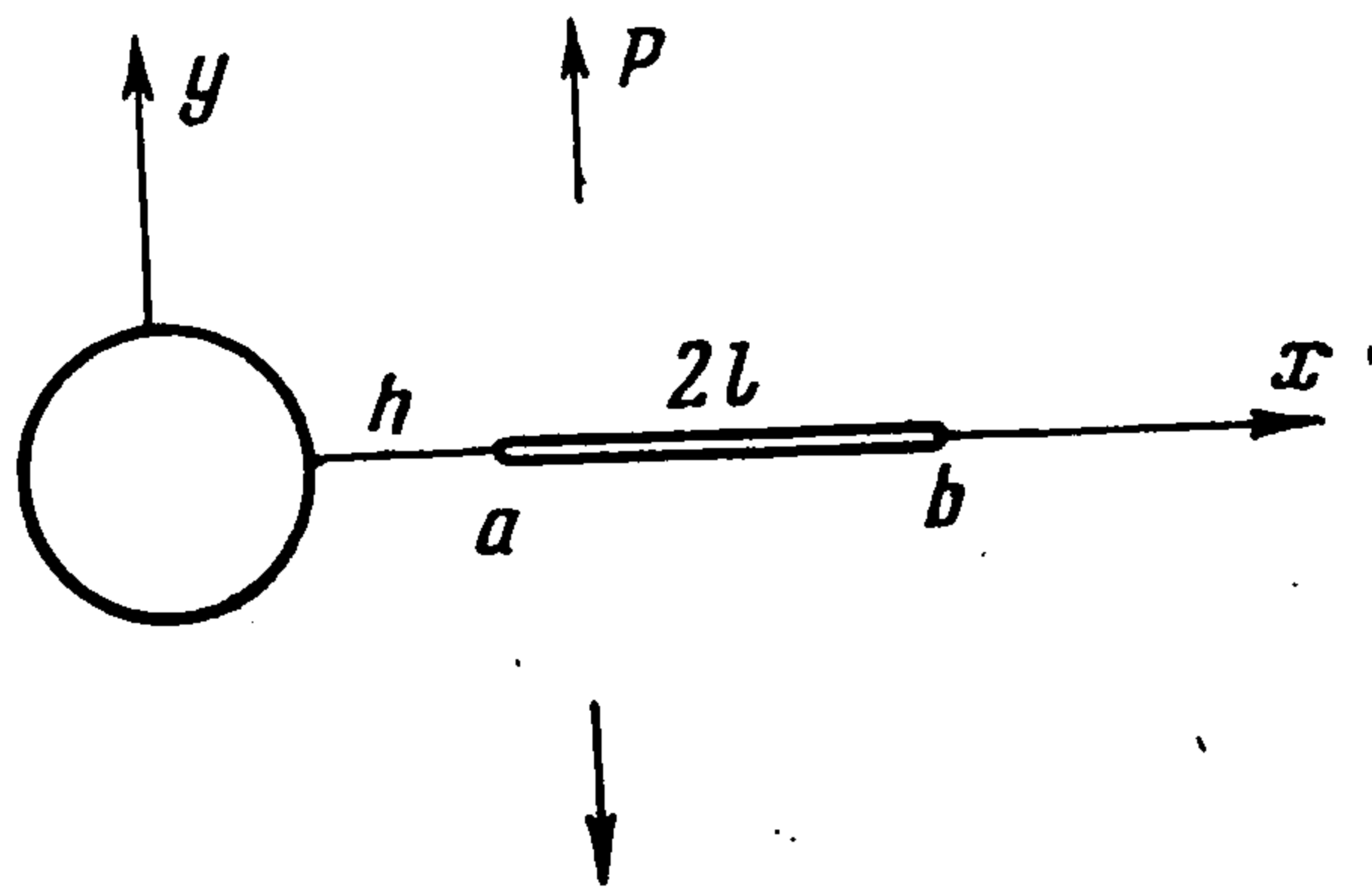
ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО КОНЦОВ РАЗРЕЗА

Г. Т. Жоржолани, А. И. Каландия

(Тбилиси)

Путем сведения к интегральному уравнению с ядром Коши и нахождения численного решения последнего определяется коэффициент интенсивности напряжений в пластинке, содержащей жесткое круговое включение.

1. Упругая среда занимает всю плоскость $z = x + iy$ с круговым отверстием единичного радиуса и радиальным разрезом длины $2l$, расположенным на оси x , как показано на фигуре. Отверстие заполнено абсолютно жестким ядром, спаянным с матрицей вдоль обвода. Берега разреза свободны от внешних усилий, среда подвержена на бесконечности растягивающим усилиям P , перпендикулярным линии разреза, и в бесконечно удаленных частях плоскости вращения отсутствует. Обвод отверстия обозначим через γ , а разрез, без его концов, — через $L = (a, b)$. Будем различать верхний и нижний берега разреза и приписывать величинам, к ним относящимся, знаки плюс и минус соответственно.



Задача состоит в определении напряжений и смещений в упругом теле по граничным условиям, выражающим отсутствие упругих смещений вдоль обвода отверстия и внешних усилий вдоль разреза

$$(1.1) \quad u = v = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad \sigma_y^{\pm} = \tau_{xy}^{\pm} = 0 \quad \text{на } L$$

Введем комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и обозначим

$$(1.2) \quad \omega(z) = \frac{\varphi(z)}{z} + \psi(z)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \varphi(z) + \overline{\omega(z)} + \left(z - \frac{1}{\bar{z}}\right)\overline{\varphi'(z)}$$

Тогда, согласно известным представлениям Колосова — Мусхелишвили [1]

$$(1.3) \quad 2\mu(u + iv) = (\kappa + 1)\varphi(z) - \Omega(z, \bar{z})$$

$$(1.4) \quad \sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2\frac{\partial}{\partial z}\Omega(z, \bar{z})$$

($\kappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона), граничные условия задачи запишутся в виде

$$(1.5) \quad \kappa\varphi(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)} = 0 \quad \text{на } \gamma (\sigma = e^{i\theta})$$

$$(1.6) \quad \sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm = \frac{d}{dt} \Omega^\pm(t, t) = 0 \quad \text{на } L (a < t < b)$$

2. Решение задачи представим в виде суммы двух слагаемых

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_*(z) + \varphi_0(z) \\ \omega(z) &= \omega_*(z) + \omega_0(z) \quad (\psi(z) = \psi_*(z) + \psi_0(z)) \end{aligned}$$

где φ_0, ψ_0 дают решение задачи о жестком включении без разреза, а ψ_*, φ_* характеризуют дополнительное поле.

Функции φ_0, ω_0 определяются из условия (1.5) и легко находятся методом Мусхелишвили. Решение второй основной плоской задачи (на границе заданы упругие смещения) для внешности круга

$$(2.2) \quad \kappa\varphi(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)} = f(\sigma) \quad \text{на } \gamma$$

при условии, что на бесконечности отсутствуют напряжения и вращение, а также равен нулю главный вектор внешних усилий, приложенных к границе среды, дается формулами (3) и (4) § 83 монографии [1], если положить $m = 0$.

Согласно этим формулам, если учесть, что при больших $|z|$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varphi_0(z) &= Az + \varphi_0^*(z), & \omega_0(z) &= Bz + \omega_0^*(z) \\ A &= P/4, & B &= P/2 \end{aligned}$$

где φ_0^*, ω_0^* — регулярные функции всюду вне кругового отверстия, находим, отбрасывая в указанных формулах несущественную постоянную

$$(2.4) \quad \varphi_0(z) = Az + B/\kappa z, \quad \omega_0(z) = Bz + \kappa A/z, \quad |z| > 1$$

Нахождение функций φ_*, ψ_* гораздо сложнее, оно равносильно решению поставленной задачи.

Из граничного условия (1.5) определим зависящие от точки t из интервала (a, b) аналитические функции $\varphi_*(z, t), \omega_*(z, t)$, регулярные всюду вне отверстия, за исключением точек самого интервала, и допускающие в окрестности $z = t$ представления

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_*(z, t) &= -p(t) \ln(z-t) + \varphi_*^\circ(z, t) \\ \omega_*(z, t) &= -p(t) \left[\ln(z-t) + \frac{1-zt}{z(z-t)} \right] + \omega_*^\circ(z, t) \end{aligned}$$

Здесь $p(t)$ — пока произвольная вещественная функция от t , определенная на L .

Функции $\varphi_*^\circ, \omega_*^\circ$ должны быть регулярны всюду при $|z| > 1$, включая бесконечно удаленную точку, для любого t из L . Для их определения, согласно (1.5), имеем

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \kappa\varphi_*^\circ(\sigma, t) - \overline{\omega_*^\circ(\sigma, t)} &= f_0(\sigma, t) \\ f_0(\sigma, t) &= p(t) \left[\kappa \ln(\sigma-t) - \ln\left(\frac{1}{\sigma} - t\right) - \frac{\sigma(\sigma-t)}{1-\sigma t} \right] \end{aligned}$$

Пришли опять к задаче (2.2) при правой части f , определяемой предыдущим равенством. Решая ее по тем же формулам [1], находим

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \kappa \varphi_*^\circ(z, t) &= -p(t) \left[\ln \left(1 - \frac{1}{zt} \right) - \frac{1-t^2}{t^2(zt-1)} \right] \\ \omega_*^\circ(z, t) &= -p(t) \left[\kappa \ln \left(1 - \frac{1}{zt} \right) + \frac{1}{zt} \right], \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

Положим теперь

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varphi_*(z) &= \frac{1}{\pi} \int_L \varphi_*(z, t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_L K_1(z, t) p(t) dt \\ \omega_*(z) &= \frac{1}{\pi} \int_L \omega_*(z, t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_L K_2(z, t) p(t) dt \end{aligned}$$

Здесь $K_1(z, t)$ и $K_2(z, t)$ определяются на основании (2.5) и (2.7).

Потенциалы $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ в суммарном поле получаются, согласно (2.1), сложением двух составных потенциалов (2.4) и (2.8).

Для выяснения механического смысла функции $p(x)$ ($a < x < b$) рассмотрим выражение

$$K(x, t) = K_1(z, t) + \overline{K_2(z, t)} + \left(z - \frac{1}{\bar{z}} \right) \frac{\partial \overline{K_1(z, t)}}{\partial z} \quad \text{при } z = x$$

На основании формул (2.5), (2.7) находим

$$(2.9) \quad \begin{aligned} K(x, t) &= \ln(x-t) + \overline{\ln(x-t)} + K_0(x, t) \\ K_0(x, t) &= \frac{\kappa^2 + 1}{\kappa} \ln \left(1 - \frac{1}{xt} \right) + \left(\frac{1-t^2}{t^2} + \frac{1-x^2}{x^2} \right) \frac{1}{\kappa(1-xt)} - \\ &\quad - \frac{(1-t^2)(1-x^2)}{\kappa xt(1-xt)^2} + \frac{xt+1}{xt} \end{aligned}$$

Из предыдущих формул и представления (2.8) следует, что комбинация

$$\Omega_*(z, \bar{z}) = \varphi_*(z) + \overline{z\varphi_*'(z)} + \overline{\psi_*(z)}$$

вещественна на оси x , т. е.

$$(2.10) \quad \text{Im } \Omega_*(x, x) = 0, \quad |x| \geq 1$$

Дифференцируя (1.3) по x , находим

$$(2.11) \quad 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = (\kappa + 1) \varphi'(z) - \frac{\partial}{\partial x} \Omega(z, \bar{z})$$

Потенциалы (2.4) вещественны на оси x , поэтому вертикальное смещение v и касательное напряжение τ_{xy} , соответствующие этим потенциалам, равны нулю всюду на оси x . Поэтому из (2.10) и (2.11) следует

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial x} = (\kappa + 1) \text{Im } \varphi'(z) \quad \text{при } z = x (|x| > 1, x \neq a, b)$$

Отсюда и из (2.8), используя формулу Сохоцкого — Племеля, получим для точек x , лежащих на разрезе L

$$(2.12) \quad \pm p(x) = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \frac{dv^\pm}{dx} \quad \text{на } L$$

Примечание. Сущность применяемого метода — построение в явной форме потенциалов (2.8), соответствующих неизвестным нормальным смещениям вдоль разреза, приводящих, как будет показано ниже, к сингулярному уравнению первого рода относительно искомой плотности дислокаций $p(x)$.

Метод был указан Бюкнером [2, 3]. В идейном отношении он содержится также в опубликованной почти одновременно с [2] статье [4], относящейся к изгибу полукруглых пластинок. Физический смысл функция $p(x)$ может иметь разный. В работе [4] она определена на интервале $(-1, 1)$, комплекснозначна и фигурирует в качестве обобщенной нагрузки, сосредоточенной в точке интервала, а в рассматриваемом случае интеграл от этой функции на отрезке $[a, x]$, как это явствует из формулы Бюкнера (2.12) (см. [3] стр. 208, формула (2.6)), трактуется как нормальное смещение, также «сосредоточенное» в точке разреза L .

В работе [3], посвященной определению поля напряжений во вращающемся круговом кольце с радиальным разрезом у внутренней границы, решение доведено до конца в случае, когда наружная окружность кольца удаляется в бесконечность. В ней при рассмотрении вспомогательной задачи, аналогичной (2.5), (2.6), не использовано решение в замкнутой форме (см. [1], § 82), что несколько усложнило процедуру нахождения формул вида (2.7).

В работе [5] этим же методом рассмотрена задача об упругом круговом включении в среде с изолированным разрезом¹. Данная же заметка включает в себя одновременно случай жесткого включения и полости, причем разрезу позволено выходить на обвод включения.

Отметим, наконец, что если нет разреза, то, разумеется, $v^+ = v^- = \text{const}$ на оси x и, согласно (2.12), потенциалы (2.8) обратятся в нуль.

3. Потенциалы (2.4), (2.8) в силу их построения удовлетворяют условию отсутствия на γ упругих смещений при любом $p(x)$. Кроме того, как уже отмечалось, они вещественны при вещественном z и поэтому на основании (1.4) не дадут на оси x (в частности вдоль разреза) отличных от нуля касательных напряжений. Следовательно, остается удовлетворить лишь первому из условий (1.1) на L , которое на основании (1.5) принимает вид

$$(3.1) \quad d/dx [\Omega_*(x, x) + \Omega_0(x, x)] = 0 \quad \text{на } L$$

где Ω определяется вторым выражением (1.2), а содержащиеся в нем функции φ , ω даются формулами (2.8) и (2.4). Иными словами, чтобы удовлетворить всем условиям задачи, достаточно приравнять нулю вычисленное для точек разреза нормальное напряжение σ_y в суммарном поле.

На основании предыдущих формул равенство (3.1) принимает вид

$$(3.2) \quad d/dx \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_L K(x, t) p(t) dt + g(x) \right\} = 0 \quad \text{на } L$$

$$g(x) = (2A + B)x + \frac{(\kappa - 1)A}{x} + \frac{B}{\kappa} \frac{1}{x^3}$$

Здесь $K(x, t)$ определяется формулами (2.9), A и B имеют значения, данные (2.3).

Для вычисления сингулярной части ядра в (3.2) следует воспользоваться формулой

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_L \ln(x - t) p(t) dt = -ip(x) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{p(t) dt}{x - t}$$

¹ Автор работы [5], по-видимому, не был знаком с работами Бюкнера.

справедливой для любой функции $p(x)$, непрерывной на L в смысле Гельдера. Регулярная же часть ядра уравнения (3.2) может быть получена дифференцированием под знаком интеграла. Элементарные вычисления, основанные на указанных соображениях, приводят (3.2) к следующей окончательной форме:

$$(3.3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{p(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2\pi} \int_L k_0(x, t) p(t) dt = f_0(x) \quad \text{на } L$$

$$(3.4) \quad k_0(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} K_0(x, t) = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \left(\kappa^2 + 1 + \frac{2}{x^2} \right) \frac{1}{x(1-xt)} + \right. \\ \left. + \left[\frac{t^2-1}{t^2} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{x^2-1}{x^2} \right] \frac{t}{(1-xt)^2} + \frac{2(t^2-1)(x^2-1)}{x(1-xt)^3} + \frac{\kappa}{x^2 t} \right\}$$

$$f_0(x) = -\frac{1}{4} g'(x) = -\frac{P}{4} \left(1 - \frac{\kappa-1}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2\kappa} \frac{1}{x^4} \right)$$

Сингулярное уравнение первого рода (3.3) и есть основное соотношение задачи.

Линейным преобразованием переменных

$$(3.5) \quad x = l(\xi + 1) + h + 1, \quad t = l(\eta + 1) + h + 1$$

переводящим разрез L с концами $a = 1 + h$, $b = 1 + h + 2l$ в отрезок $[-1, 1]$, уравнение (3.3) преобразуется к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения. Преобразованное уравнение имеет стандартную форму

$$(3.6) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k(\xi, \eta) \tau(\eta) d\eta = f(\xi), \quad -1 < \xi < 1$$

Здесь

$$(3.7) \quad \tau(\xi) = p(x), \quad k(\xi, \eta) = l k_0(x, t), \quad f(\xi) = f_0(x)$$

Случай, когда полость в упругом теле ничем не заполнена, получится из рассмотренного выше заменой во всех формулах (за исключением тех, в которых фигурируют упругие смещения) $\kappa = -1$. Основное уравнение задачи будет иметь прежний вид (3.3) при следующих значениях ядра и свободного члена:

$$(3.8) \quad k_0(x, t) = \frac{x^2 + 1}{x^3(xt - 1)} - \left[\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{(2x^2 + 1)(t^2 - 1)}{2t^2} \right] \frac{t}{x^2(xt - 1)^2} + \\ + \frac{(t^2 - 1)(x^2 - 1)}{x(xt - 1)^3} + \frac{1}{2x^2 t} \\ f_0(x) = -\frac{P}{4} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^4} \right)$$

Соотношение (2.12) остается без изменения.

Этот случай и рассматривался в работе [3]. Та же задача о трещине, выходящей на свободный край круговой полости, ранее изучалась с применением преобразования Меллина [6].

4. Нормальные напряжения σ_x и σ_y при $h > 0$ обращаются в окрестности обоих концов в бесконечность порядка $1/2$. Точнее, ввиду симметричности поля напряжений относительно оси x , для точек этой оси, ле-

жащих вне отрезка $[a, b]$ и близких к одному из его концов c , справедливы соотношения (см. [1], стр. 610)

$$(4.1) \quad \sigma_x = \sigma_y = \frac{N}{\sqrt{|x-c|}} + O(1), \quad \tau_{xy} = 0$$

где N — коэффициент интенсивности напряжений на данном конце¹. Для точек x , близких к одному из концов c и расположенных на линии разреза

$$\frac{dv^+}{dx} = \pm \frac{\kappa+1}{4\mu} \frac{N}{\sqrt{|x-c|}} + O(\sqrt{|x-c|})$$

причем верхний знак берется при $c = a$, нижний — при $c = b$.

Сопоставляя предыдущее равенство с (2.12), находим

$$2\sqrt{|x-c|} p(x) = \pm N + O(|x-c|)$$

Отсюда на основании (3.5), (3.7)

$$(4.2) \quad N = \pm 2\sqrt{l} \lim_{\xi \rightarrow \mp 1} \sqrt{1 \pm \xi} \tau(\xi)$$

Очевидно, что при $h > 0$ (h — расстояние левого конца разреза от границы среды), независимо от вида граничных условий, задаваемых вдоль обвода отверстия, число N для обоих концов отлично от нуля. При $h = 0$ следует различать два основных случая.

1°. *Отверстие заполнено жестким ядром.* В рассматриваемом случае, когда трещина выходит на поверхность жесткого включения, порядок сингулярности в соответствующем конце ($x = a$), согласно исследованиям Вильямса [7], зависит от коэффициента Пуассона материала ν и при $\nu = 0.3$ примерно равен $1/3$. Напряжения вблизи конца остаются все же бесконечными, но коэффициент интенсивности напряжений в смысле (4.1) равен нулю.

2°. *Отверстие ничем не заполнено*, т. е. трещина выходит на поверхность круговой полости, свободной от внешних усилий. В этом случае, разумеется, кончик $x = a$ отпадает; функция $p(x)$ ограничена в окрестности $x = a$ и имеет сингулярность порядка $1/2$ на другом конце².

5. Воспользуемся способом приближенного решения уравнения (3.6), указанным в [8]. В соответствии со сказанным выше следует искать решение (3.6), неограниченное на концах отрезка. Исключение представляет второй случай п. 4.

В первом случае решение $\tau(\xi)$ представляется в виде

$$(5.1) \quad \tau(\xi) = \frac{\tau_0(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

¹ Часто коэффициентом интенсивности напряжений называют число $K = \sqrt{2N}$.

² Этот случай, как указывалось выше, подробно рассматривался в работах [3, 6]. Здесь для него, как и для случая жесткого включения, укажем довольно простой и эффективный способ вычисления коэффициента интенсивности напряжений.

причем функция $\tau_0(\xi)$ заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа L_n , построенным по чебышевским узлам

$$(5.2) \quad L_n[\tau_0; \xi] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \tau_0(\xi_k) \frac{\cos n\vartheta \sin \vartheta_k}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_k}, \quad \xi = \cos \vartheta$$

$$(5.3) \quad \xi_m = \cos \vartheta_m, \quad \vartheta_m = \frac{2m-1}{2n} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Способ, приводит решение уравнения (3.6) к системе линейных уравнений

$$(5.4) \quad \sum_{v=1}^n \alpha_{mv} \tau_v^\circ = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$(5.5) \quad \alpha_{mv} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \vartheta_m} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_m \pm \vartheta_v}{2} + k(\xi_m, \eta_v) \right]$$

$$f_m = f(\xi_m), \quad \tau_m^\circ = \tau_0(\xi_m), \quad \xi_m = \eta_m$$

Функции $k(\xi, \eta)$ и $f(\xi)$ определяются формулами (3.7) и (3.4). В формуле для α_{mv} верхний знак берется при $|m - v| = 0, 2, \dots$, нижний — при $|m - v| = 1, 3, \dots$

После нахождения из (5.4) величин τ_k° , приближенных значений искомого τ_0 в узлах (5.3) коэффициент интенсивности напряжений N определится на основании (4.2), (5.1), (5.2) формулами

$$(5.6) \quad N_a = \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \tau_k^\circ \operatorname{tg} \frac{\vartheta_k}{2}$$

$$N_b = \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \tau_k^\circ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_k}{2}$$

Во втором случае, когда требуется иметь решение (3.6), ограниченное на левом конце, исходим из представления

$$\tau(\xi) = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \tau_0(\xi)$$

и заменяем по-прежнему $\tau_0(\xi)$ полиномом (5.2). Приходим опять к системе (5.4) с элементами

$$(5.7) \quad \alpha_{mv} = \frac{1}{2n} \left[1 + \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_m}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_m \pm \vartheta_v}{2} + (1 + \eta_v) k(\xi_m, \eta_v) \right], \quad f_m = f(\xi_m)$$

Функции $k(\xi, \eta)$ и $f(\xi)$ даются на этот раз формулами (3.7) и (3.8). Правило выбора знаков в (5.7) остается прежним. Коэффициент интенсивности напряжений (на правом конце разреза) определяется формулой

$$(5.8) \quad N_c = \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \tau_k^\circ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_k}{2}$$

В силу приближенных равенств $\tau_0(-1) = \tau_n^\circ$, $\tau_0(1) = \tau_1^\circ$ точных в достаточной степени для немалых n , формулы (5.6), (5.8) могут быть за-

менены более простыми

$$N_a = 2\tau_n^\circ \frac{N_0}{P}, \quad N_b = -2\tau_1^\circ \frac{N_0}{P}, \quad N_c = -4\tau_1^\circ \frac{N_0}{P} \quad \left(N_0 = \sqrt{\frac{l}{2}} P \right)$$

Здесь N_0 — коэффициент интенсивности напряжений на концах разреза в среде без включения.

Следовательно, если число узлов n достаточно велико, то для определения коэффициента интенсивности напряжений достаточно знать значения искомой функции $\tau_0(\xi)$ в крайних узлах интервала.

Следует еще иметь в виду, что решение системы (5.4) с матрицей (5.5), вообще говоря, неустойчиво. Чтобы сделать его устойчивым, необходимо поставить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи. В качестве дополнительного условия в данном случае служит очевидное равенство

$$\int_L p(x) dx = l \int_{-1}^1 \tau(\xi) d\xi = 0$$

которое будем брать в дискретной форме

$$(5.9) \quad \tau_1^\circ + \tau_2^\circ + \dots + \tau_n^\circ = 0$$

Это значит, что при решении уравнения (3.6) в классе (5.1) к системе (5.4) следует присоединить уравнение (5.9)

На ЭВМ М-220 определялись значения отношения $k = N / N_0$ в зависимости от геометрических параметров задачи при $\nu = 0.3$.

Жесткое включение, как и следовало ожидать, уменьшает напряжения на обоих концах разреза, причем влияние его при малых h весьма существенно. При уменьшении расстояния h от 1 до 0.01, когда $l = 1$, отношение k убывает от 0.9266 до 0.1158 на левом конце и от 0.9711 до 0.8784 на правом. Уменьшение на правом конце при данном l становится наиболее значительным, когда левый конец упрется в жесткое ядро ($h = 0$). Число k возрастает с возрастанием размера l и при изменении последнего от 1 до 9 меняется от 0.878 до 0.988.

В случае разреза, выходящего левым концом на свободную поверхность круговой полости ($h = 0$), наблюдается обратная зависимость. При уменьшении l от 5.0 до 0.05 отношение k возрастает от 2.1386 до 4.2586.

Следует оговорить, что в этом (единственном) случае приходится отказаться от условия однозначности смещений. Как видно из (2.8) и (2.12), при обходе в положительном направлении окружности $|z| = R$, $R > 1 + 2l$ вертикальное смещение v прирастает на величину $\lim_{x \rightarrow 1} [v^+(x) - v^-(x)]$, равную ширине образовавшегося

после деформации просвета при $x = 1$. Для построения однозначного поля смещений следует заменить формулы (2.8) представлением работ [2, 3] и определить решение соответствующего сингулярного уравнения вида (3.6), ограниченное на обоих концах разреза. Способ нахождения такого решения] указан в цитированной выше работе [8].

Система уравнений (5.4) решалась для разных значений порядка n до $n = 60$. Любопытно отметить, что значения k по существу не меняются, начиная с $n = 20$.

Программирование алгоритма и все необходимые вычисления были выполнены Н. Н. Джгаркава, которой авторы выражают глубокую признательность.

Поступила 13 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. Виекнер Н. Ф. Some stress singularities and their computation by means of integral equations. In: Boundary problems in differential equations. Madison Univ. Wisconsin Press, 1960, p. 215—230.
3. Виекнер Н. Ф., Гиавер I. The stress concentration of a notched rotor subjected to centrifugal forces. ZAMM, 1966, Bd 46, H 5, S. 265—273.
4. Каландия А. И. Об одном способе решения задач теории упругости для полукруга. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 161—169.
5. Atkinson C. The interaction between a crack and an inclusion. Intern. J. Engng Sci., 1972, vol. 10, No. 2, p. 127—136.
6. Wigglesworth L. A. Stress relief in a cracked plate. Mathematika, 1958, vol. 5, No. 9, p. 67—81.
7. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4, p. 526—528.
8. Каландия А. И. О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.