

О ПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ПРОСТОГО ТЕЧЕНИЯ

А. Н. Спорыхин, В. Г. Трофимов

(Воронеж)

В трехмерной постановке исследуется устойчивость деформирования упруго-вязко-пластического упрочняющегося материала при больших докритических деформациях. Для развитого основного пластического процесса течения при малых упругих деформациях в случае однородного докритического состояния получено решение уравнений устойчивости в прямоугольной системе координат. Исследуются явления поверхностной и внутренней неустойчивости.

Исследованию устойчивости деформирования упруго-пластического материала при больших докритических деформациях посвящены работы [1, 2]. Устойчивость деформирования тел в трехмерной постановке из вязко-пластического и упруго-вязко-пластического материалов при малых докритических деформациях рассматривалась в работах [3-7].

1. Движение деформируемой среды будем описывать уравнениями [8]

$$(1.1) \quad x^\alpha = x^\alpha(X^i, t), \quad X^i = X^i(x^\alpha, t)$$

Символ x^α обозначает неподвижную систему координат, относительно которой происходит движение среды; X^i — подвижную систему конвективных координат с метрическим тензором g_{ij} .

Выделим три положения сопутствующих координат: начальное, соответствующее отсутствию напряжений, полное деформированное и новое начальное положение с остаточными пластическими деформациями, в котором отсутствуют внутренние напряжения. Метрические тензоры обозначим соответственно через g^0_{ij} , \hat{g}_{ij} и g^*_{ij} . Пространство, отвечающее метрическому тензору g^*_{ij} , в общем случае неевклидово. В дальнейшем ограничимся случаем однородного напряженно-деформированного докритического состояния в теле, что позволяет не выходить за рамки евклидова пространства.

Рассмотрим упруго-вязко-пластическое тело, механическая модель которого приведена в работе [6]. Соотношения связи между напряженным и деформированным состоянием в этом теле могут быть записаны так.

Тело остается упругим, пока

$$(1.2) \quad \hat{s}^i_j \hat{s}^j_i < k^2(0), \quad s_j^i = \sigma_j^i - 1/3 \sigma_n^n g_j^i$$

Если $\hat{s}^i_j \hat{s}^j_i \geq k^2(\kappa)$, $\kappa = (s^{*i}_j - c e^{*pj}_j) e^{*pj}_i$, $e_j^i = \varepsilon_j^i - 1/3 \varepsilon_n^n g_j^i$, то

$$(1.3) \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{*p}$$

При этом упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$(1.4) \quad \hat{\sigma}^i_j = \lambda \varepsilon^n_n g_j^i + 2\mu \varepsilon^e_{ij}$$

Скорости пластической деформации

$$(1.5) \quad \xi^{*pi}_j = 0, \quad (s^{*i}_j - ce^{*pi}_j)(s^{*j}_i - ce^{*pj}_i) < k^2(\kappa)$$

$$\xi^{*pi}_j = \psi(s^{*i}_j - ce^{*pi}_j - \eta\xi^{*pi}_j), \quad (s^{*i}_j - ce^{*pi}_j - \eta\xi^{*pi}_j)(s^{*j}_i - ce^{*pj}_i - \eta\xi^{*pj}_i) = k^2(\kappa)$$

Для компонент со смешанным строением индексов соотношения (1.3) могут быть представлены в виде

$$(1.6) \quad \hat{\varepsilon}^i_j = \hat{\varepsilon}^{ei}_j + \varepsilon^{*pi}_j - 2\varepsilon^{*pn}_j \hat{\varepsilon}^{ei}_n$$

В этом случае справедливо равенство

$$(1.7) \quad \hat{\xi}^i_j = \hat{\xi}^{ei}_j + \xi^{*pi}_j - 2\xi^{*pn}_j \hat{\varepsilon}^{ei}_n$$

Здесь $\hat{\xi}^i_j$, $\hat{\xi}^{ei}_j$, ξ^{*pi}_j — смешанные компоненты скоростей полных, упругих и пластических деформаций соответственно в базисах g^{ij} , g^{*ij} .

На основании закона Гука скорости упругих деформаций удовлетворяют уравнению

$$(1.8) \quad \Sigma^i_j = \lambda \hat{\xi}^{en}_n g^i_j + 2\mu \hat{\xi}^{ei}_j$$

$$\left(\Sigma^i_j = \frac{\partial}{\partial t} \sigma^i_j + \xi^i_n \sigma^n_j - \sigma^n_i \xi^n_j \right)$$

Здесь Σ^i_j — производная Яуманна тензора напряжений в сопутствующей системе координат [9].

Накладывая на основное движение, описываемое соотношениями (1.1) — (1.8), малое дополнительное движение, определяемое вектором перемещений $\gamma w'(X^i, t)$ (γ — малый параметр), запишем линеаризованные уравнения. С точностью до линейных членов в пластической области имеем

$$(1.9) \quad \hat{\sigma}'^i_j = \lambda \hat{\varepsilon}'^{en}_n g^i_j + 2\mu \hat{\varepsilon}'^{ei}_j, \quad \hat{\Sigma}'^i_j = \lambda \hat{\xi}'^{en}_n g^i_j + 2\mu \hat{\xi}'^{ei}_j$$

$$\hat{\varepsilon}'^i_j = \hat{\varepsilon}'^{ei}_j + \varepsilon'^{*pi}_j - 2\varepsilon'^{*pn}_j \hat{\varepsilon}'^{ei}_n - 2\varepsilon^{*pn}_j \hat{\varepsilon}'^{ei}_n$$

$$\hat{\xi}'^i_j = \hat{\xi}'^{ei}_j + \xi'^{*pi}_j - 2\xi'^{*pn}_j \hat{\varepsilon}'^{ei}_n - 2\xi^{*pn}_j \hat{\varepsilon}'^{ei}_n$$

$$\xi'^{*pi}_j = \psi(s'^{*i}_j - ce'^{*pi}_j - \eta\xi'^{*pi}_j) + \psi'(s^{*i}_j - ce^{*pi}_j - \eta\xi^{*pi}_j)$$

$$(s'^{*i}_j - ce'^{*pi}_j - \eta\xi'^{*pi}_j)(s'^{*j}_i - ce'^{*pj}_i - \eta\xi'^{*pj}_i) =$$

$$= k_1 [(s'^{*n}_m - ce'^{*pn}_m) e'^{*pm}_n +$$

$$+ (s^{*n}_m - ce^{*pn}_m) e'^{*pm}_n], \quad k_1 = k(\kappa_0) \frac{\partial k}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_0}$$

Для метрического тензора, тензора деформаций и тензора скоростей деформаций

$$(1.10) \quad g'_{ij} = \nabla_i w'_j + \nabla_j w'_i, \quad g'^{ij} = -(\nabla^i w'^j + \nabla^j w'^i), \quad \varepsilon'_{ij} = 1/2 g'_{ij}$$

$$\xi'_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_i w'_j + \nabla_j w'_i), \quad \xi'^i_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_j w'^i + \nabla^i w'_j) + g'^{in} \xi'_{nj} + g'^{in} \xi'_{nj}$$

Для векторов скорости и ускорения (точка означает полную производную по времени)

$$(1.11) \quad v'_i = w'_i + v_n \nabla_i w'^n, \quad v_i'' = w_i'' + v_n \nabla_i w'^n$$

Уравнения равновесия и граничные условия для приращений тензора напряжений имеют вид [10]

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \nabla_n \sigma_i'^n - \sigma_n^m \nabla_i \nabla_m w'^m + \sigma_i^n \nabla_m \nabla_n w'^m + \rho' f_i + \rho f_i' = \rho w_i'' + \\ + \rho v_n \nabla_i w'^m + \rho' v_i', \quad \sigma_i^m n_m + \sigma_i^m n_m' = p_i' \end{aligned}$$

Здесь ρ и f_i — плотность и компоненты массовой силы, p_i' — приращение единичного нормального вектора, p_i' — приращение поверхностной нагрузки.

Ограничимся случаем развитого пластического течения, когда упругой деформацией можно пренебречь как малой относительно большой пластической деформации. Это позволяет отождествлять метрические тензоры \hat{g}_{ij} и g_{ij}^* и все величины с соответствующими индексами. В дальнейшем индексы опускаем. Тогда, исключая из соотношений (1.9) величины ε_j^{ei} , ξ_j^{ei} , ξ_j^{pi} и ψ' , получаем

$$(1.13) \quad \begin{aligned} (1 + \eta\psi) (\Sigma_j^i - \lambda^* \Sigma_m^m g_j^i) + \psi (2\mu + c) \sigma_j^i + [2\lambda^* (1 + \eta\psi) \xi_j^{pi} - \\ - \frac{1}{3} \psi (2\mu + c) g_j^i + 2\lambda^* c \psi e_j^{pi}] \sigma_m^m - 2 [(1 + \eta\psi) \xi_j^{pn} + c \psi e_j^{pn}] \sigma_n^i + \\ + \frac{2}{3} c \psi e_m^{pn} \sigma_n^m g_j^i + \frac{r_j^i}{k^2} \left\{ r_n^l (\lambda^* \Sigma_m^m g_l^n - \Sigma_l^n) + \right. \\ \left. + 2r_n^l \xi_l^{pm} (\sigma_m^n - \lambda^* \sigma_k^k g_m^n) + k_1 \psi [(h_n^l - 2\mu e_n^{pl}) (\sigma_l^n - \frac{1}{3} \sigma_k^k g_l^n) + \right. \\ \left. + 2\lambda^* h_n^l e_l^{pn} \sigma_m^m - 2h_n^l (\varepsilon_l^{pm} \sigma_m^n - \frac{1}{3} \varepsilon_k^{pm} \sigma_m^k g_l^n)] \right\} = \\ = 2\mu \left[(1 + \eta\psi) \xi_j^i + c \psi e_j^i - \frac{r_j^i}{k^2} (r_n^l \xi_l^n - k_1 \psi h_n^l e_l^n) \right] \\ \Sigma_j^i = \frac{\partial}{\partial t} \sigma_j^i + \xi_n^i \sigma_j^n + \xi_n^i \sigma_j^n - \sigma_n^i \xi_j^n - \sigma_n^i \xi_j^n \\ r_j^i = s_j^i - c e_j^{pi} - \eta \xi_j^{pi}, \quad h_j^i = s_j^i - 2c e_j^{pi}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \end{aligned}$$

Здесь Σ_j^i — производная Луманна приращений тензора напряжений. Остальные величины определяются формулами (1.10).

Будем исследовать поведение возмущений на небольшом интервале времени в окрестности точки линеаризации τ . Коэффициенты линеаризованных уравнений состояния будем считать не зависящими от времени и определенными в момент $t = \tau$, время t для возмущений будем отсчитывать от момента τ . Процесс деформирования будем считать устойчивым, если возмущения затухают во времени. Разумеется, такой подход не дает возможности проследить поведение возмущений при немалых значениях времени.

Аналогичный критерий устойчивости пластин и стержней в условиях ползучести был предложен в работе [11].

В работе [12] показано, что эффекты релаксации внутренних остаточных напряжений, вызванные наличием внутреннего механизма вязкости, могут обеспечивать возможность пластического деформирования, когда приращение вектора напряжений

Δσ лежит либо внутри, либо вне области, ограниченной поверхностью нагружения предыдущего состояния. Это позволяет заключить, что для рассматриваемой модели среды при малых возмущениях не будет явления разгрузки.

2. Будем искать решение уравнений (1.10) — (1.13) в виде (s — комплексная величина)

$$(2.1) \quad w_j'(X^i, t) = w_j(X^i) e^{st}, \quad \sigma_j^k(X^i, t) = t_j^k(X^i) e^{st}$$

Подставляя (2.1) в соотношения (1.13) и выбирая сопутствующую систему координат, так, что в момент линеаризации она совпадает с неподвижной декартовой системой координат x^α , в случае трехосного напряженно-деформированного докритического состояния получим

$$(2.2) \quad t_j^i = \delta_{ij} a_{im} b^{mn} w_{n,n} + (1 - \delta_{ij}) c_{ij} (w_{i,j} + w_{j,i})$$

Здесь

$$(2.3) \quad a_{im} = \frac{1}{\det \|d_{kl}\|} \frac{\partial}{\partial d_{mi}} \det \|d_{kl}\| \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

$$c_{ij} = \frac{(1 + \eta\psi) (2\mu + \sigma_i^i - \sigma_j^j) (1/2 s + \xi_i^{pi} - \xi_j^{pj}) + \mu c\psi (1 - 2\varepsilon_j^{pj})}{(1 + \eta\psi) (s + \xi_i^{pi} - 3\xi_j^{pj}) + \psi (2\mu + c - 2c\varepsilon_j^{pj})}$$

$$b^{ij} = 2\mu \left\{ \left[s(1 + \eta\psi) + (1 - 2\varepsilon_i^{pi}) \left(c + \frac{r_i^i}{k^2} k_1 h_j^j \right) \psi \right] \delta^{ij} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} c\psi (1 - 2\varepsilon_j^{pj}) - \frac{r_i^i}{k^2} \left[sr_j^j + \frac{1}{3} k_1 \psi h_j^j (1 - 2\varepsilon_j^{pj}) \right] \right\}$$

$$d_{ij} = [s + (2\mu + c + s\eta) \psi - 2(1 + \eta\psi) \xi_i^{pi} - 2c\psi \varepsilon_i^{pi}] \delta_{ij} +$$

$$+ \lambda^* (1 + \eta\psi) (2\xi_i^{pi} - s) + 2c\psi \left(\lambda^* e_i^{pi} + \frac{1}{3} \varepsilon_j^{pj} \right) - \frac{1}{3} (2\mu + c) \psi +$$

$$+ \frac{r_i^i}{k^2} \{ r_j^j (2\xi_j^{pj} - s) - 2\lambda^* r_n^{pn} \xi_n^{pn} + k_1 \psi [h_j^j (1 - 2\varepsilon_j^{pj}) -$$

$$- 2\mu e_j^{pj} + 2\lambda^* e_n^{pn} h_n^n] \} \quad (n = 1, 2, 3)$$

Будем рассматривать медленный установившийся процесс деформирования трехмерных тел. Силы инерции в основном состоянии учитывать не будем.

Подставляя (2.2) в уравнения (1.12), получаем систему уравнений в перемещениях

$$(2.4) \quad L_i^j w_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$L_i^j = \delta_i^m a_{mn} b^{nj} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_j} + (1 - \delta_i^j) (c_{ji} + \sigma_i^i - \sigma_j^j) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ (1 - \delta_i^m) c_{mi} \delta_i^j \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} - \rho (s^2 - 2s \xi_i^{pi}) \delta_i^j$$

Общее решение системы уравнений (2.4) можно представить в виде линейной комбинации трех решений

$$(2.5) \quad w_i^{(j)} = \frac{\partial \det \|L_k^l\|}{\partial (L_j^i)} \Phi^{(j)}$$

Функции $\Phi^{(j)}$ определяются из дифференциального уравнения

$$(2.6) \quad \det \|L_k^l\| \Phi^{(j)} = 0$$

Заметим, что здесь могут быть получены результаты, аналогичные [13].
Ограничимся построением решения в случае плоской деформации.
Уравнение (2.6) принимает вид

$$\left[A \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + B \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + C \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \rho D \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \rho F \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho^2 K \right] \Phi = 0$$

где

$$\begin{aligned} A &= c_{12} a_{1k} b^{k1}, \quad B = a_{2k} b^{k2} a_{1n} b^{n1} - a_{1k} b^{k2} (c_{12} - \sigma_1^1 + \sigma_2^2) - \\ &- a_{2k} b^{k1} (c_{21} + \sigma_1^1 - \sigma_2^2) + (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) (c_{12} - c_{21} + \sigma_1^1 - \sigma_2^2) \\ C &= c_{21} a_{2k} b^{k2}, \quad D = s [(s - 2\xi_1^{p1}) c_{12} + (s - 2\xi_2^{p2}) a_{1k} b^{k1}] \\ F &= s [(s - 2\xi_1^{p1}) a_{2k} b^{k2} + (s - 2\xi_2^{p2}) c_{21}], \quad K = s^2 (s - 2\xi_1^{p1}) (s - 2\xi_2^{p2}) \\ &\quad (k, n = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Решение, периодическое по оси Ox_1 , можно представить в виде

$$(2.7) \quad \Phi = C_m^n e^{kmx_1} \sin(\gamma_1 x_1), \quad \gamma_1 = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \\ m = 1, 2, 3, 4$$

$$k_m = \pm \left(\frac{1}{2C} [(B\gamma_1^2 + \rho F) \pm \{(B^2 - 4AC)\gamma_1^4 + \rho(BF - 4DC)\gamma_1^2 + \rho^2(F^2 - 4CK)\}^{1/2}] \right)^{1/2}$$

Граничные условия при $x_1 = 0$, $x_1 = l$ $\sigma_1^1 = 0$ и $w_2' = 0$ выполняются автоматически, что приближенно соответствует условиям шарнирного опирания. Для тонкостенной пластинки эти условия переходят точно в граничные условия шарнирного опирания.

Следует отметить, что в случае «мертвой» нагрузки краевая задача (1.12), (2.4) самосопряженная, и потеря устойчивости может происходить по типу статической неустойчивости [14].

3. Рассмотрим устойчивость деформирования в условиях плоской деформации прямоугольной полосы из несжимаемого упруго-вязко-пластического материала при сжатии вдоль оси Ox^1 «мертвой» нагрузкой. Будем считать полосу бесконечно длинной в положительном направлении оси Ox^2 со свободной от нагрузок границей $X^2 = 0$.

Полагая, что сопутствующая система координат X^i в момент $t = \tau$ совпадает с декартовой системой координат x^α , из (1.1) имеем

$$x^1 = \frac{r}{r(\tau)} X^1, \quad x^2 = \frac{r(\tau)}{r} X^2, \quad x^3 = X^3, \quad r(0) = 1$$

где $r = r(t)$ — степень сжатия в направлении оси Ox^1 .

Компоненты докритического состояния в текущий момент τ при $k(x) = \text{const}$ определяются соотношениями

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v^1 &= \frac{\dot{r}}{r} x^1, \quad v^2 = -\frac{\dot{r}}{r} x^2, \quad v^3 = 0, \quad \xi_1^{p1} = \frac{\dot{r}}{r}, \quad \xi_2^{p2} = -\frac{\dot{r}}{r} \\ \xi_3^{p3} &= 0, \quad \varepsilon_1^{p1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad \varepsilon_2^{p2} = \frac{1}{2} (1 - r^2), \quad \varepsilon_3^{p3} = 0 \\ \sigma_1^1 &= \sqrt{2} k + 2c\varepsilon_1^{p1} + 2\eta\xi_1^{p1}, \quad \sigma_2^2 = 0, \quad \sigma_3^3 = \frac{k}{\sqrt{2}} + c\varepsilon_1^{p1} + \eta\xi_1^{p1} \\ \varepsilon_j^{pi} &= \xi_j^{pi} = \sigma_j^i = 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Граничные условия на свободной поверхности $x^2 = 0$ примут, согласно (1.12), вид

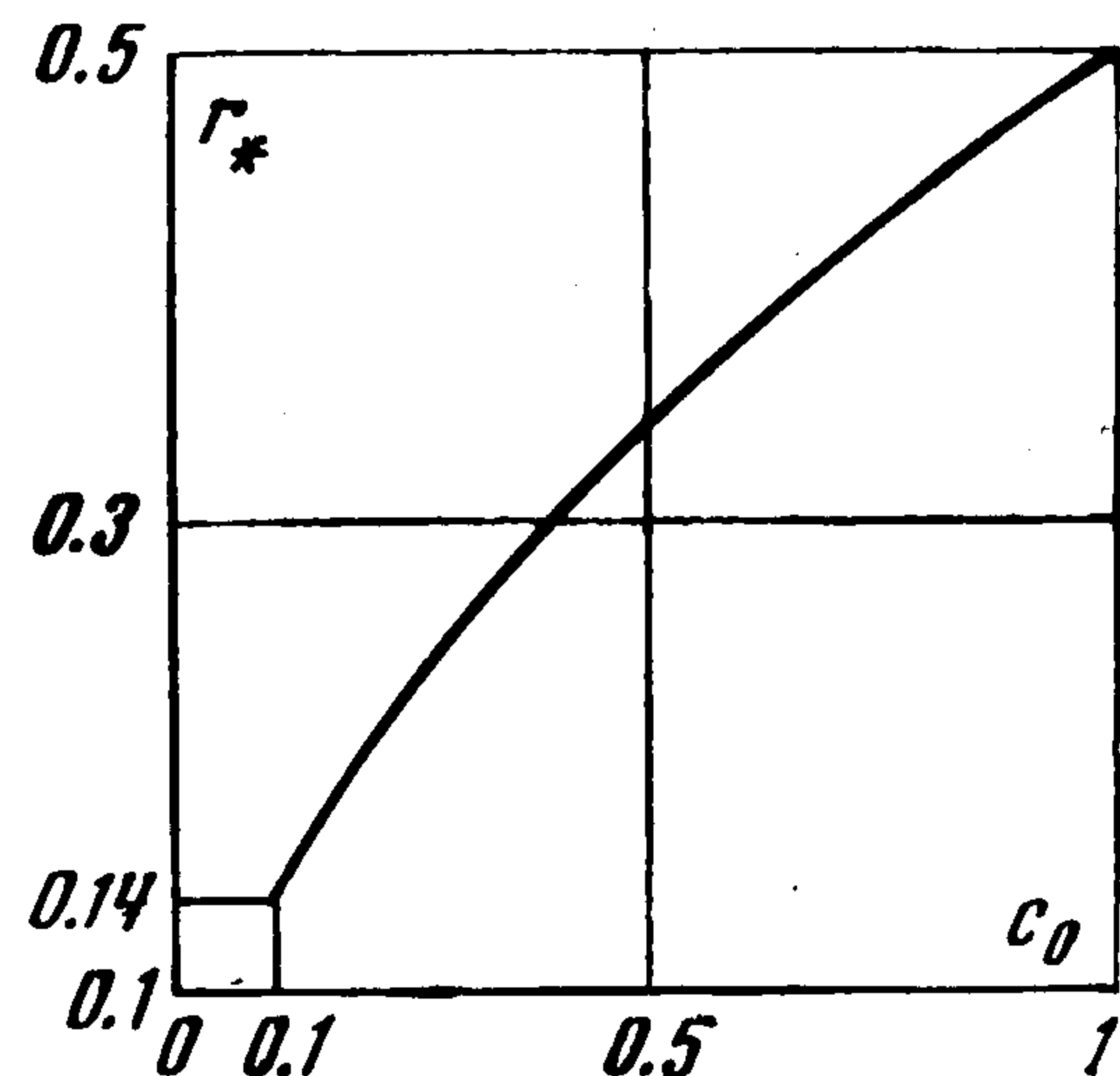
$$(3.2) \quad \sigma_2' = 0, \quad \sigma_1' = 0$$

Из решения (2.7) с учетом (2.5) следуют различные типы неустойчивости в зависимости от значений корней k_m . Если все значения корней k_m действительные, то возможно решение, затухающее с глубиной от свободной поверхности $x^2 = 0$, т. е. имеет место явление поверхностной неустойчивости [15]. Если все значения корней мнимые, то возможно решение, периодическое по оси Ox^2 , т. е. имеет место явление внутренней неустойчивости [16]. В случае комплексных корней возмущения перемещений будут затухать с глубиной по типу внутренней неустойчивости. Очевидно, что при разных сочетаниях корней одновременно могут наблюдаться разные типы неустойчивости.

Подставляя решение (2.7) в граничные условия (3.2), учитывая при этом (2.2), (2.3), (2.5), (3.1), в результате обычных вычислений получим характеристические уравнения в зависимости от вида корней.

Результаты решения характеристических уравнений на ЭЦВМ «БЭСМ-4» показали, что в металлах может возникнуть только поверхностная неустойчивость. На фигуре показана зависимость величины критической степени сжатия r_* от коэффициента упрочнения $0.1 \leq c_0 \leq 1$ при значениях предела текучести $-0.015 \leq k_0 \leq -0.003$, коэффициента вязкости $0 \leq \eta_0 \leq 0.25$ и скорости деформирования $r' = -0.0001; -0.001$ ($c_0 = c/\mu$, $k_0 = k/\mu$, $\eta_0 = \eta/\mu$).

Расчет показал, что влияние предела текучести k_0 и коэффициента вязкости η_0 в указанных выше пределах на величину критической деформации незначительно. Однако получающиеся при этом числовые значения критических нагрузок нереальны, следовательно, поверхностная неустойчивость практически не наблюдается. Для слабо упрочняющихся материалов ($c_0 < 0.1$) при тех же значениях k_0, η_0, r' явление поверхностной неустойчивости не возникает.



Поступила 26 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Zahorski S. On plastic instability in some cases of simple flow. Bull. Acad. polon. sci. Cl. IV, Ser. sci. techn., 1964, vol. 12, No. 11.
2. Zahorski S. Kinematic stability in the case of slow steady plastic flow. Arch. mech. stosowanej, 1964, vol. 16, No. 6.
3. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела. Уч. зап. МГУ, 1940, вып. 39.
4. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины. ПММ, 1943, т. 7, вып. 6.
5. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и кругового прута. ПММ, 1943, т. 7, вып. 2.
6. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел. ПМТФ, 1967, № 4.
7. Спорыхин А. Н. К устойчивости равновесия упруговязкопластической среды ПМТФ, 1970, № 5.

8. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
9. Trudell C., Toupin R. The classical Field Theories. In: Handbuch der Physik, vol. 3/1, Berlin — Göttingen — Heidelberg Springer-Verlag, 1960, p. 226—793.
10. Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of a small elastic deformation superposed on finite elastic deformations. Proc. Roy. Soc. A, 1952, vol. 211, No. 1104.
11. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
12. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
13. Гузь А. Е. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
14. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961.
15. Biot M. A. Surface instability in finite anisotropic elasticity under initial stress. Proc. Roy. Soc. A, 1963, vol. 273, No. 1354.
16. Biot M. A. Internal buckling under initial stress in finite elasticity. Proc. Roy. Soc. A, 1963, vol. 273, No. 1354.