Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.374

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. Ш. Штейн

(Новосибирск)

Рассматривается осесимметрическая задача для идеально-пластического тела в условиях неполной пластичности согласно гипотезе Хаара — Кармана (среднее из главных напряжений — кольцевое — связано с деформациями законом Гука, тензоры деформаций и напряжений соосны). Соответствующая система уравнений квазилинейна и принадлежит гиперболическому типу. Ее характеристики — поверхности максимального касательного напряжения. Для приближенного решения системы предлагается итеррационный процесс и доказывается его сходимость.

1. Уравнения равновесия при осевой симметрии. Рассмотрим тело вращения в цилиндрической системе координат $r\,\varphi z$. Предположим, что нагрузка не зависит от угла φ. Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0$$

Главными напряжениями будут

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_r+\sigma_z}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_z)^2+4\tau_{rz}^2},\qquad \sigma_3=\sigma_\varphi$$

Следуя работе [1], будем различать две возможности: 1) окружное напряжение σ_φ — крайнее ($\sigma_1>\sigma_2>\sigma_\varphi$ или $\sigma_2>\sigma_1>\sigma_\varphi$), 2) σ_φ — среднее ($\sigma_1>\sigma_\varphi>\sigma_2$ или $\sigma_2>\sigma_\varphi<\sigma_1$).

В дальнейшем будем рассматривать состояние неполной пластичности, при котором σ_φ среднее. Для определенности примем, что всюду в рассматриваемой области

$$\sigma_1>\sigma_\varphi>\sigma_2,\qquad \sigma_1-\sigma_2=1 \tag{1.2}$$

Здесь все напряжения отнесены к удвоенному пределу текучести при кручении.

Обозначим через u, v компоненты вектора перемещения вдоль осей r, z соответственно и примем гипотезу Хаара — Кармана [1,2], согласно которой напряжение σ_φ сохраняет упругую связь с деформациями

$$\sigma_\varphi=\frac{3k}{1+\nu}\left[\nu\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+(1-\nu)\frac{u}{r}\right] \tag{1.3}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, k — модуль объемного сжатия, отнесенный к удвоенному пределу текучести. Кроме того, к соотношениям

(1.1), (1.3) следует присоединить условие соосности тензоров напряжения и деформации

$$\frac{\gamma_{rz}}{\varepsilon_r - \varepsilon_z} = \frac{2\tau_{rz}}{\sigma_r - \sigma_z} \tag{1.4}$$

и условие упругого изменения объема

$$\sigma_r + \sigma_z + \sigma_\varphi = 3k\,(\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\varphi) \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия (1.1), условие пластичности (1.2) и модельные соотношения (1.3) — (1.5) образуют полную систему уравнений для определения шести функций: $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \tau_{rz}, u, v$. Исключая σ_φ при помощи (1.3) из уравнений равновесия, из условия упругого изменения объема (1.5) с использованием преобразования Леви

$$\sigma_r = \sigma + \frac{\cos 2\theta}{2}, \quad \sigma_z = \sigma - \frac{\cos 2\theta}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{\sin 2\theta}{2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tag{1.6}$$

где θ — угол между первым главным направлением и осью r, получим следующую квазилинейную систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\sigma}{\partial r} - \sin 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial r} + \cos 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\cos 2\theta}{2r} - \frac{1-2\nu}{r}\sigma + 3k(1-2\nu)\frac{u}{r^2} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \cos 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial r} + \sin 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin 2\theta}{2r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + 2\nu\frac{u}{r} = \frac{2(1+\nu)}{3k} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)\cos 2\theta = \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\sin 2\theta\end{gathered} \tag{1.7}$$

Решение системы (1.7) определяет функции σ, θ, u, v, после чего определяются σ_r, σ_z, τ_{rz} из (1.6) и σ_φ из (1.3).

Можно показать, что система (1.7) гиперболического типа с двухкратными характеристиками, уравнения которых

$$\begin{gathered}\frac{dr}{dz} = \operatorname{ctg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \tau_1 = \tau_3 \quad (\alpha\text{-линия}) \\ \frac{dr}{dz} = \operatorname{ctg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \tau_2 = \tau_4 \quad (\beta\text{-линия})\end{gathered} \tag{1.8}$$

Таким образом, характеристики служат поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения).

Видно, что система (1.7) допускает разделение: первые два уравнения содержат производные от функций σ, θ, а вторые два уравнения — от u, v, откуда следует двухкратность характеристик (1.8). На этом разделении и будет построен итеррационный процесс, рассматриваемый ниже.

Введем операторы дифференцирования вдоль характеристик

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{ctg}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{вдоль } \alpha\text{-линии}) \\ \frac{d}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} + \operatorname{ctg}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{вдолъ } \beta\text{-линии})\end{gathered} \tag{1.9}$$

и проделаем ряд преобразований с уравнениями системы (1.7). Тогда приходим к соотношениям на характеристиках

$$d[\sigma-\theta]=\frac{1}{r}\left[\frac{dz}{2}-(1-2\nu)\left(\sigma-3k\frac{u}{r}\right)dr\right] \tag{1.10}$$

$$d[\sigma+\theta]=-\frac{1}{r}\left[\frac{dz}{2}+(1-2\nu)\left(\sigma-3k\frac{u}{r}\right)dr\right]$$

$$dU-V\,d\theta=\left[\frac{1+\nu}{3k}\sigma-\nu\frac{u}{r}\right]ds_\alpha \tag{1.11}$$

$$dV+U\,d\theta=\left[\frac{1+\nu}{3k}\sigma-\nu\frac{u}{r}\right]ds_\beta$$

Здесь ds_α, ds_β — элементы длины вдоль α и β линий, U, V — перемещения вдоль этих линий соответственно. Заметим, что при $r\to\infty$ и $k\to\infty$ (несжимаемость идеально-пластического материала), уравнения (1.10) переходят в соотношения Генки, а (1.11) — в соотношения Гейрингер плоской задачи теории идеальной пластичности. Из соотношений на характеристиках (1.10) следует также, что первые два уравнения системы (1.7) приводимы к инвариантам Римана. Действительно, обозначая

$$\mathbf{t}=(t_1,\ t_2),\qquad t_1=\sigma-\theta,\qquad t_2=\sigma+\theta \tag{1.12}$$

получим

$$\frac{\partial t_k}{\partial z}+\tau_k(\mathbf{t})\frac{\partial t_k}{\partial r}=f_k(r,\mathbf{t})+g_k(r,\mathbf{t})u,\qquad k=1,2 \tag{1.13}$$

Уравнение (1.11) перепишем в виде

$$\mathbf{l}_k\left[\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial z}+\tau_k(\mathbf{t})\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial r}\right]=f_k(r,\mathbf{t})+g_k(r,\mathbf{t})u,\qquad k=3,4 \tag{1.14}$$

$$\mathbf{U}=(u,\ v),\qquad \mathbf{l}_3=(\tau_3,\ 1),\ \mathbf{l}_4=(\tau_4,\ 1)$$

$$f_1(r,\mathbf{t})=\frac{1}{2r}-\frac{1-2\nu}{2r}(t_1+t_2)\tau_1(\mathbf{t}) \tag{1.15}$$

$$g_1(r,\mathbf{t})=\frac{3k(1-2\nu)}{r^2}\tau_1(\mathbf{t}),\qquad \tau_1(\mathbf{t})=\operatorname{ctg}\left(\frac{t_2-t_1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_2(r,\mathbf{t})=-\frac{1}{2r}-\frac{1-2\nu}{2r}(t_1+t_2)\tau_2(\mathbf{t})$$

$$g_2(r,\mathbf{t})=\frac{3k(1-2\nu)}{r^2}\tau_2(\mathbf{t}),\qquad \tau_2(\mathbf{t})=\operatorname{ctg}\left(\frac{t_2-t_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_3(r,\mathbf{t})=-\frac{1+\nu}{3k}(t_1+t_2)\frac{\tau_3(\mathbf{t})}{\cos(t_2-t_1)}$$

$$g_3(r,\mathbf{t})=\frac{2\nu}{r}\frac{\tau_3(\mathbf{t})}{\cos(t_2-t_1)},\qquad \tau_3(\mathbf{t})=\tau_1(\mathbf{t})$$

$$f_4(r,\mathbf{t})=\frac{1+\nu}{3k}(t_1+t_2)\frac{\tau_4(\mathbf{t})}{\cos(t_2-t_1)}$$

$$g_4(r,\mathbf{t})=-\frac{2\nu}{r}\frac{\tau_4(\mathbf{t})}{\cos(t_2-t_1)},\qquad \tau_4(\mathbf{t})=\tau_2(\mathbf{t})$$

Здесь и в дальнейшем суммирование производится только по греческим индексам (по индексу k оно отсутствует).

2. Приближенный метод решения задачи Коши для системы (1.7) и его сходимость. Для простоты будем считать, что начальные условия задачи

Коши для системы (1.7) заданы на отрезке оси $z = 0$, $a \leqslant r \leqslant b$, так как общая задача Коши сводится к рассматриваемой заменой независимых переменных r, z, что не меняет вида уравнений (1.7).

Пусть на отрезке $[a, b]$ оси $z = 0$ для системы (1.7) заданы начальные условия

$$\sigma(r, 0) = \sigma_0(r), \qquad \theta(r, 0) = \theta_0(r)$$
$$u(r, 0) = u_0(r), \qquad v(r, 0) = v_0(r)$$

Это соответствует, согласно введенным инвариантам (1.12) и вектору $\mathbf{U}$, следующим начальным условиям для характеристической системы (1.13), (1.14):

$$\mathbf{t}_0(r, 0) = (t_1^\circ(r), t_2^\circ(r)), \quad \mathbf{U}_0(r, 0) = (u_0(r), v_0(r)) \tag{2.1}$$

Теоремы существования и единственности задачи Коши для общих квазилинейных систем уравнений с двумя независимыми переменными в классе C_1 рассмотрены в работах [3, 4]. Здесь также будем предполагать, что $\mathbf{t}_0(r)$, $\mathbf{U}_0(r) \in C_1[a, b]$. Гладкость же остальных входных данных f_k, g_k следует из их вида (1.15) в рассматриваемом случае при $r > 0$.

Для построения решения задачи (1.13), (1.14), (2.1) определим следующий итерационный процесс.

Пусть $\mathbf{U}^{(0)} = (u^{(0)}, v^{(0)})$ — произвольная вектор-функция, принадлежащая C_1 и такая, что

$$\mathbf{U}^{(0)}(r, 0) = \mathbf{U}_0(r) \tag{2.2}$$

Подставляя $u^{(0)}(r, z)$ в правую часть системы (1.13), определим $\mathbf{t}^{(0)}$ как решение задачи Коши с начальными условиями

$$\mathbf{t}^{(0)}(r, 0) = \mathbf{t}_0(r) \tag{2.3}$$

после чего найденное решение $t^{(0)}(r, z)$ подставляется в уравнения (1.14) и решается задача Коши

$$\mathbf{U}^{(1)}(r, 0) = \mathbf{U}_0(r)$$

уже для линейной системы. Затем определенное приближение $\mathbf{U}^{(1)}$ подставляется в левые части уравнений (1.13) и определяется $\mathbf{t}^{(1)}(r, z)$

$$\mathbf{t}^{(1)}(r, 0) = \mathbf{t}_0(r)$$

и так этот процесс повторяется неоднократно. Пусть построено приближение $\mathbf{U}^{(i)} \in C_1$, тогда для $\mathbf{t}^{(i)}$ имеем

$$\frac{\partial t_k^{(i)}}{\partial z} + \tau_k^{(i)} \frac{\partial t_k^{(i)}}{\partial r} = f_k^{(i)} + g_k^{(i)} u^{(i)}, \quad k = 1, 2 \tag{2.4}$$

$$\mathbf{t}^{(i)}(r, 0) = \mathbf{t}_0(r) \tag{2.5}$$

а $\mathbf{U}^{(i+1)}$ определим из решения задачи Коши для линейной системы

$$\mathbf{l}_k^{(i)} \left[\frac{\partial \mathbf{U}^{(i+1)}}{\partial z} + \tau_k^{(i)} \frac{\partial \mathbf{U}^{(i+1)}}{\partial r}\right] = f_k^{(i)} + g_k^{(i)} u^{(i+1)}, \quad k = 3, 4 \tag{2.6}$$

$$\mathbf{U}^{(i+1)}(r, 0) = \mathbf{U}_0(r) \tag{2.7}$$

Из теорем существования решения для квазилинейных и линейных систем [3, 4] следует, что в области определенности $G^{(i)}$ задач Коши (2.4) — (2.7) существует решение $\mathbf{t}^{(i)}$, $\mathbf{U}^{(i+1)} \in C_1$, так что все приближения определены и непрерывно дифференцируемы в областях $G^{(i)}$. Заметим, что области определенности задач Коши (2.4) — (2.7) совпадают, так как характеристики системы (2.4) являются также характеристиками и системы (2.6). Кроме того, так как исходная задача (1.13), (1.14), (2.1) квазилинейна, то область G определенности решения этой задачи определяется одновременно с решением $\mathbf{U}(r, z)$, $\mathbf{t}(r, z)$ и, вообще говоря, неизвестна заранее. Однако, согласно [3], можно указать область $G \subseteq G$ переменных (r, z), в которой решение и его производные остаются заведомо ограниченными.

Первый этап доказательства будет состоять в доказательстве существования некоторой области G_0, принадлежащей всем областям $G^{(i)}$ и такой, что все приближения и их первые производные ограничены в этой области. Для этого выпишем продолженную систему для квазилинейной системы (2.4) и продолженную систему для линейной системы (2.6) (последнюю опустим из-за полной аналогии выкладок). Напомним, что продолженная система гиперболических квазилинейных уравнений определяется дифференцированием исходной системы по независимым переменным и приводима к инвариантам Римана, которые в данном случае определяются следующим образом:

$$H_k^{(i)} = l_k^{\alpha} \frac{\partial n_\alpha^{(i)}}{\partial r} \qquad (\alpha, k = 1, 2)$$

$$\mathbf{l}_1 = (1/2, -1/2), \quad \mathbf{l}_2 = (1, 1), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2) = (\sigma, \theta)$$

Тогда продолженная система для уравнений (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial z} + \tau_k^{(i)} \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial r} = L^k + L_\alpha^k H_\alpha^{(i)} + L_{\alpha\beta}^k H_\alpha^{(i)} H_\beta^{(i)} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial n_k^{(i)}}{\partial z} = F^k + F_\alpha^k H_\alpha^{(i)} \qquad (k, \alpha, \beta = 1, 2)$$

Здесь

$$L^k = \frac{(-1)^k}{r^2} + \frac{1-2\nu}{r^2} n_1^{(i)} \tau_k^{(i)} + 3k(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u^{(i)}}{r^2}\right) \tag{2.9}$$

$$L_\alpha{}^k = \frac{1-2\nu}{2r}\left[-\tau_k^{(i)} + (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial \tau_k^{(i)}}{\partial n_2} + (-1)^\alpha \frac{u^{(i)}}{r} \frac{\partial \tau_k^{(i)}}{\partial n_2}\right]$$

$$L_{\alpha\beta}^k = \frac{(-1)^{\alpha+\beta+k+1}}{2} \frac{\partial \tau_k^{(i)}}{\partial n_2}, \quad L_{22}{}^1 = L_{11}{}^2 = 0, \quad \alpha \geqslant \beta$$

$$F^1 = -\frac{1-2\nu}{2r}(\tau_1^{(i)} + \tau_2^{(i)})\left(n_1^{(i)} - \frac{3k}{r} u^{(i)}\right)$$

$$F^2 = -\frac{1}{2r} - \frac{1-2\nu}{2r}(\tau_2^{(i)} - \tau_1^{(i)})\left(n_1^{(i)} - \frac{3k}{r} u^{(i)}\right)$$

$$F_\alpha{}^1 = -\frac{1}{2}\tau_\alpha^{(i)}, \qquad F_\alpha{}^2 = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2}\tau_\alpha^{(i)}$$

Наряду с системой (2.8) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dP/dz = L_0(N) + L_1(N)P + L_2(N)P^2 \tag{2.10}$$
$$dN/dz = F_0(N) + F_1(N)P$$

в которой введены обозначения

$$L_0(N) = \max_{G_0(N),\,\|u\|\leqslant W} \|L\|, \qquad L = (L^1, L^2) \tag{2.11}$$
$$L_1(N) = \max_{G_0(N),\,\|u\|\leqslant W} \|L_\alpha{}^k\|, \quad L_2(N) = \max_{G_0(N)} \max_{\beta=1,2} \|L_{\alpha\beta}^k\|$$
$$F_0(N) = \max_{G_0(N),\,\|u\|\leqslant W} \|F\|, \quad F = (F^1, F^2), \quad F_1(N) = \max_{G_0(N)} \|F_\alpha{}^k\|$$
$$G_0(N) = \{a \leqslant r \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant z_0;\ \|\mathbf{n}\| \leqslant N\}$$

где $W = W(z)$ определяется из решения обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичных (2.10), построенных для линейной системы (2.6). Систему уравнений (2.10), следуя работе [3], назовем мажорантной системой. Обозначим N_0, P_0 величины

$$N_0 = \max_{a\leqslant r\leqslant b} \|\mathbf{n}^\circ(r)\|, \qquad P_0 = \max_{a\leqslant r\leqslant b} \left\|\mathbf{l}_k \frac{\partial \mathbf{n}^\circ}{\partial r}\right\|$$

Для системы уравнений (2.10) зададим начальные условия

$$P(0) = P_0, \qquad N(0) = N_0 \tag{2.12}$$

Из сравнения (2.8), (2.10) следует, что если

$$\|\mathbf{n}^{(i)}\| \leqslant N(z), \quad \|\mathbf{H}^{(i)}\| \leqslant P(z), \quad \|u\| \leqslant W(z) \tag{2.13}$$

то

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{n}^{(i)}}{\partial z}\right\| \leqslant \frac{dN}{dz}, \qquad \left\|\frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial z} + \tau_k^{(i)} \frac{\partial H_k^{(i)}}{\partial r}\right\| \leqslant \frac{dP}{\partial z}$$

Так как из (2.12) следует выполнение (2.13) при $z = 0$, то при любых $z > 0$

$$\|\mathbf{n}^{(i)}\| \leqslant N(z), \qquad \|\mathbf{H}^{(i)}\| \leqslant P(z)$$

Итак, функции $N(z)$, $P(z)$ мажорируют рост приближения $\mathbf{n}^{(i)}(r, z)$ и его первых производных. Пусть при $0 \leqslant z \leqslant z_0$ решение $N(z)$, $P(z)$ мажорантной системы, удовлетворяющее (2.12), остается ограниченным. Тогда заведомо при $0 \leqslant z \leqslant z_0$ остается ограниченным приближение $\mathbf{n}^{(i)}(r, z)$ и его производные.

Предположим теперь, что все приближения $\mathbf{n}^{(k)}(r, z)$, $k = 1, 2, \ldots i$ удовлетворяют неравенствам

$$\|\mathbf{n}^{(k)}\| \leqslant N(z), \quad \|\mathbf{H}^{(k)}\| \leqslant P(z), \quad \|\mathbf{U}^{(k)}\| \leqslant W(z) \tag{2.14}$$

и покажем, что (2.14) имеет место и для $(i+1)$-го приближения. Для этого запишем систему (2.8) для $(i+1)$-го приближения

$$\frac{\partial H_k^{(i+1)}}{\partial z} + \tau_k^{(i+1)} \frac{\partial H_k^{(i+1)}}{\partial r} = L^k + L_\alpha{}^k H_\alpha^{(i+1)} + L_{\alpha\beta}^k H_\alpha^{(i+1)} H_\beta^{(i+1)} \tag{2.15}$$
$$\frac{\partial n_k^{(i+1)}}{\partial z} = F^k + F_\alpha{}^k H_\alpha^{(i+1)}$$

При этом заметим, что правые части этой системы отличаются от правых частей системы (2.8) тем, что вместо $u^{(i)}$ подставлено $u^{(i+1)}$. Но так как коэффициенты мажорантной системы (2.10) определялись для u таких, что $\| u \| \leqslant W(z)$, где $W(z)$ получено из решения мажорантной системы для уравнений (2.6), т. е. $\| u^{(i+1)} \| \leqslant W(z)$. А это позволяет заключить, что система (2.10) является также мажорантной системой и для уравнений (2.15). Отсюда следует

$$\| \mathrm{n}^{(i+1)} \| \leqslant N(z), \qquad \| \mathrm{H}^{(i+1)} \| \leqslant P(z) \tag{2.16}$$

Так как начальное приближение можно выбрать, чтобы (2.14) удовлетворялись, то тем самым доказано, что все приближения $\mathrm{n}^{(i+1)}$ удовлетворяют неравенствам (2.16). Аналогично показывается, что все приближения $\mathrm{U}^{(i+1)}$ и их производные равномерно ограничены. Этим самым доказано существование некоторой области G_0, принадлежащей всем $G^{(i)}$, в которой выполнено (2.16). При этом если рассмотреть соотношения (2.11) и провести выкладки, аналогичные рассмотренным в [3], то получим, что $G_0 \subseteq G_1$.

Вторым этапом доказательства будет доказательство равномерной сходимости в G_0 последовательности $\{\mathrm{t}^{(i)}\}$. Но прежде сформулируем следующую лемму (доказательство см. [3]).

Пусть непрерывная на отрезке $0 \leqslant z \leqslant z_0$ вектор-функция $\mathrm{n}(z) = (n_1, n_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\| \mathrm{n}(z) \| \leqslant \int_0^z [A(\tau) + B(\tau) \max_{0 \leqslant \xi \leqslant \tau} \| \mathrm{n}(\xi) \|] \, d\tau \tag{2.17}$$

и пусть $| A(z) | \leqslant A$, $| B(z) | \leqslant B$ при $0 \leqslant z \leqslant z_0$. Тогда при $0 \leqslant z \leqslant z_0$ имеет место оценка

$$\| \mathrm{n}(z) \| \leqslant \max_{0 \leqslant \tau \leqslant z} \| \mathrm{n}(\tau) \| \leqslant \frac{A}{B} (e^{Bz} - 1) \tag{2.18}$$

Можно показать, что оператор, соответствующий уравнениям (1.14) и переводящий приближение $\mathrm{t}^{(i)}$ в $\mathrm{U}^{(i+1)}$, «сжимающий».

Для этого запишем (1.14) для $\mathrm{U}^{(i)}$-приближения

$$\mathrm{l}_k^{(i-1)} \left[\frac{\partial \mathrm{U}^{(i)}}{\partial z} + \tau_k^{(i-1)} \frac{\partial \mathrm{U}^{(i)}}{\partial r} \right] = f_k^{(i-1)} + g_k^{(i-1)} u^{(i)}, \quad k = 3, 4 \tag{2.19}$$

и введем в рассмотрение выражение

$$\rho_k^{(i+1)} = \mathrm{l}_k^{(i)} (\mathrm{U}^{(i+1)} - \mathrm{U}^{(i)}), \qquad \mathrm{U} = (U_1, U_2) = (u, v), \ \mathrm{l}_k = (l_k^3, l_k^4 \tag{2.20}$$

Воспользовавшись теоремой о конечных приращениях, имеем, например, для разности

$$l_k{}^\alpha \tau_k^{(i)} - l_k{}^\alpha \tau_k^{(i-1)} = \int_0^1 \frac{\partial (l_k{}^\alpha \tau_k)}{\partial t_\beta} (\mathrm{t}^{(i-1)} + \lambda (\mathrm{t}^{(i)} - \mathrm{t}^{(i-1)})) \, d\lambda \, (t_\beta^{(i)} - t_\beta^{(i-1)}) \tag{2.21}$$

После чего из уравнений (2.6) вычтем уравнения (2.19) и учтем при этом возможность разрешения выражений (2.20) относительно $U_k{}^{(i+1)} - U_k{}^{(i)}$ и соотношения вида

(2.21) для $l_k^{(i)} - l_k^{(i-1)}$; $f_k^{(i)} - f_k^{(i-1)}$; $g_k^{i} - g_k^{(i-1)}$. Откуда получаем линейную систему для $\rho_k^{(i-1)}$

$$\frac{\partial \rho_k^{(i+1)}}{\partial z} + \tau_k^{(i)} \frac{\partial \rho_k^{(i+1)}}{\partial r} = X_k^{\alpha} \rho_\alpha^{(i+1)} + \Lambda_k^{\beta} (t_\beta^{(i)} - t_\beta^{(i-1)}), \quad k, \alpha = 3, 4; \quad \beta = 1, 2 \tag{2.22}$$

Здесь X_k^{α}, Λ_k^{β} определяются через функции f_k, g_k, l_k, τ_k, U_k и производные от них. Интегрируя (2.22) вдоль характеристик $dr : dz = \tau_k^{(i)}$, лежащих в G_0, имеем

$$|\rho_k^{(i+1)}| \leqslant \int_0^z |\Lambda_k^{\beta} (t_\beta^{(i)} - t_\beta^{(i-1)}) + X_k^{\alpha} \rho_\alpha^{(i+1)}| \, d\tau$$

При этом всюду в G_0 в силу (2.13) имеет место

$$\| X_k^{\alpha} \| \leqslant B, \quad \| \Lambda_k^{\beta} \| \leqslant B, \quad B = \text{const} \tag{2.23}$$

Обозначим через

$$R_{i+1}(z) = \max_{\tau,\, r \in G_0,\, \tau \leqslant z} \| \rho^{(i+1)} \|$$

Тогда из (2.22), (2.23) следует, что

$$R_{i+1}(z) \leqslant B \int_0^z [\| \mathbf{t}^{(i)} - \mathbf{t}^{(i-1)} \| + R_{i+1}(\tau)] \, d\tau$$

и, в силу приведенной леммы, получаем

$$R_{i+1}(z) \leqslant (e^{Bz} - 1) \| \mathbf{t}^{(i)} - \mathbf{t}^{(i-1)} \| \tag{2.24}$$

Таким образом, при малых $0 \leqslant z \leqslant z_0$ оператор, соответствующий системе уравнений (1.14), «сжимающий».

Используя оценку (2.24), можно показать равномерную сходимость последовательности приближений $\{\mathbf{t}^{(i)}\}$.

Действительно, запишем систему (1.13) для $(i - 1)$-го приближения

$$\frac{\partial t_k^{(i-1)}}{\partial z} + \tau_k^{(i-1)} \frac{\partial t_k^{(i-1)}}{\partial r} = f_k^{(i-1)} + g_k^{(i-1)} u^{(i-1)}, \quad k = 1, 2 \tag{2.25}$$

Если теперь из уравнений (2.4) вычесть уравнения (2.25) соответственно и воспользоваться при этом соотношениями, аналогичными (2.21), получаемыми с помощью теоремы о конечных приращениях, то для определения $\delta_k^{(i)} = t_k^{(i)} - t_k^{(i-1)}$ получим линейную систему

$$\frac{\partial \delta_k^{(i)}}{\partial z} + \tau_k^{(i)} \frac{\partial \delta_k^{(i)}}{\partial r} = \Pi_k^{\beta} \delta_\beta^{(i)} + M_k^{\alpha} \rho_\alpha^{(i)}, \quad k, \beta = 1, 2; \ \alpha = 1, 2 \tag{2.26}$$

Здесь так же как и в (2.22), Π_k^{β}, M_k^{α} определяются через функции f_k, g_k, $\mathbf{l}_k$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{U}$ и производные от них.

Интегрируя (2.26) вдоль характеристик, лежащих в G_0, получаем для каждой точки G_0

$$|\delta_k^{(i)}| \leqslant \int_0^z |\Pi_k^{\beta} \delta_\beta^{(i)} + M_k^{\alpha} \rho_\alpha^{(i)}| \, d\tau$$

где для Π_k^{β}, M_k^{α} в силу (2.13) имеют место неравенства

$$\| \Pi_k^{\beta} \| \leqslant A, \quad \| M_k^{\alpha} \| \leqslant A, \quad A = \text{const}$$

Тогда, если ввести

$$D_i(z) = \max_{\tau,\, r \in G_0,\, \tau \leqslant z} \| \delta^{(i)} \|$$

и воспользоваться неравенством (2.24), записанным для $R_i(z)$, получим

$$D_i(z) \leqslant A \int_0^z [D_{i-1}(\tau) + D_i(\tau)]\, d\tau, \qquad D_i(z) \leqslant c \int_0^z D_{i-1}(\tau)\, d\tau$$

или

$$D_i(z) \leqslant \text{const} \frac{(cz)^{i-1}}{(i-1)!} \tag{2.27}$$

что и доказывает равномерную сходимость в G_0 последовательности приближений $\{\mathbf{t}^{(i)}\}$.

Заметим, что из (2.24) и из (2.27) следует равномерная сходимость в G_0 последовательности $\{\mathbf{U}^{(i)}\}$.

Наконец, воспользовавшись непрерывной зависимостью решения задачи Коши от входных данных, получаем из рассмотрения продолженной системы (2.8) равномерную сходимость последовательности $\{\mathbf{H}^{(i)}\}$, а следовательно, и $\{\partial \mathbf{t}^{(i)}/\partial r\}$, $\{\partial \mathbf{t}^{(i)}/\partial z\}$.

По известной теореме анализа это означает, что функции $\mathbf{t} = \lim \mathbf{t}^{(i)}$, $\mathbf{U} = \lim \mathbf{U}^{(i)}$, $i \to \infty$ непрерывно дифференцируемы в G_0. Переходя в уравнениях (2.4), (2.6) к пределу, заключаем, что $\mathbf{t}$, $\mathbf{U}$ — решение задачи (1.13), (1.14), (2.1).

Отметим следующее:

1) доказательство сходимости предлагаемого метода решения задачи Коши, так как оно проведено методом характеристик, без существенного изменения переносится на случай характеристической задачи, а также смешанной задачи для системы (1.7);

2) рассмотренный метод решения уравнений неполной пластичности может быть применен к произвольным гиперболическим квазилинейным системам с двумя независимыми переменными, допускающим разделение в указанном ранее смысле;

3) приведенный приближенный метод решения уравнений неполной пластичности, соответствующих граням призмы Треска для осесимметричного случая, по существу, сводится к решению ряда плоских задач теории идеальной пластичности (плоская деформация), численные методы решения которых достаточно хорошо развиты; отличием от плоской задачи будет лишь наличие в рассматриваемых уравнениях неоднородности (см. уравнения (1.10), (1.11)).

В заключение автор благодарит Е. И. Шемякина за руководство работой и ценные замечания.

Поступила 26 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С. А., Шемякин Е. И.* К теории идеальной пластичности. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
2. *Haar A., Karman Th.* Zur Theorie der Spannugszüstände in plastischen und sandartigen medien. Nachr. von der Königlichen Geselschaft der Wissenschaft zu Göttingen. Math-phus. Kl, 1909, s. 204. (Рус. перев.: К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах. М., Изд-во иностр. лит., 1948.)
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., «Наука», 1968.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными и их приложения к газовой динамике. М., «Мир», 1964.