Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ БИФУРКАЦИИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА В СКОРОСТЯХ ИЗМЕНЕНИЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТ

Л. И. Балабух, М. Г. Яковенко

(Москва)

Предлагается новый вариант построения трехмерной теории упругой устойчивости. Бифуркация рассматривается как смена материальных частиц в фиксированной точке пространства. В качестве кинематической переменной используется скорость изменения лагранжевых координат частиц. На основе полученных точных уравнений развивается приближенный подход, пригодный в случае малых докритических деформаций и поворотов.

При обычно используемом лагранжевом представлении движения сплошной среды [1, 2] в уравнения, определяющие изменения тензора напряжений, обязательно входят повороты материальных частиц. В результате в линеаризированные дифференциальные уравнения равновесия в общем случае входят искомые критические напряжения [1]. Вызывает интерес изучение такого варианта краевой задачи устойчивости, когда параметры существенно входят только в граничные условия. Одним из таких вариантов является предложенный Л. С. Лейбензоном [3] и затем независимо А. Ю. Ишлинским [4]. Однако его нельзя получить, используя лангранжево представление при линеаризации исходных уравнений нелинейной теории упругости.

В данной работе получены уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровом представлении с использованием в качестве кинематической переменной скорости изменения лагранжевых координат [5]. На основе этих уравнений рассматривается бифуркация равновесия изотропного упругого тела. Преимущество предлагаемого варианта состоит в том, что изменения тензора напряжений Коши связываются только с тензором деформации введенных скоростей. Поэтому в дифференциальные уравнения равновесия попадают только те параметры добифуркационного состояния, которые обусловлены изменением физических свойств тела в процессе деформирования. Компоненты тензора вращений этих скоростей входят лишь в граничные условия в связи с изменением формы тела в момент бифуркации. Параметры, стоящие в граничных условиях множителями при компонентах тензора вращений, являются наиболее существенной частью параметров докритического состояния, входящих в структуру полученной краевой задачи нейтрального равновесия.

Для слабодеформированного в докритическом состоянии изотропного упругого тела отмеченное обстоятельство позволяет предложить простой приближенный вариант уравнений нейтрального равновесия, в котором искомый параметр критической нагрузки входит только в граничные условия. Если отвлечься от физического содержания искомых функций, входящих в дифференциальные уравнения и граничные условия, то оказывается, что приближенный вариант краевой задачи близок к использованному Л. С. Лейбензоном.

1. Рассматривается медленное движение деформируемого тела, когда можно не учитывать силы инерции. Используются декартовы координаты, связанные с неподвижным пространством. Лагранжевы координаты частиц определяются декартовыми координатами (a_1, a_2, a_3) их положения в пространстве в начальном ненапряженном состоянии тела. В текущем состоянии в произвольный момент времени фиксированная частица находится в точке пространства с координатами $x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t)$, $i = 1,2,3$. Тогда уравнения $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t)$ определяют ту частицу, которая находится в данный момент времени в точке пространства (x_1, x_2, x_3). Для этой точки вводится величина $v_i^* = - \partial a_i / \partial t$, которую можно назвать скоростью изменения лагранжевых координат. Связь ее со скоростью материальной частицы v_i устанавливается с помощью тождества

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + v_m \frac{\partial a_i}{\partial x_m} = 0 \tag{1.1}$$

Следовательно, для любого момента времени

$$v_i^* = v_m \frac{\partial a_i}{\partial x_m}, \qquad v_i = v_m^* \frac{\partial x_i}{\partial a_m}, \qquad v_m^* \frac{\partial}{\partial a_m} = v_m \frac{\partial}{\partial x_m} \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем считать, что $v_i^* = v_i^*(a_1, a_2, a_3, t)$.

Введенная скорость изменения лагранжевых координат позволяет изучать процессы в фиксированной точке пространства.

Рассмотрим скорость изменения плотности среды в текущем состоянии, ρ, связанной с плотностью среды в начальном состоянии ρ° соотношением $\rho / \rho^\circ = \det \| \partial a_n / \partial x_m \|$. Дифференцируя это выражение по времени при $x_i = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\rho^\circ}\right) = A_{is} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_s}\right) = -A_{is} \frac{\partial v_i^*}{\partial x_s} = -A_{is} \frac{\partial a_m}{\partial x_s} \frac{\partial v_i^*}{\partial a_m} = -\frac{\rho}{\rho^\circ} \frac{\partial v_i^*}{\partial a_i} \tag{1.3}$$

Здесь A_{is} — алгебраическое дополнение элемента $\partial a_i / \partial x_s$ в матрице $\| \partial a_n / \partial x_m \|$.

Если плотность среды в начальном состоянии $\rho^\circ = \text{const}$, то справедлива следующая форма уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i^*}{\partial a_i} = 0 \tag{1.4}$$

В качестве мер деформаций при эйлеровом представлении движения удобно использовать вторую меру Коши [6] $c_{ij} = (\partial a_m / \partial x_i)(\partial a_m / \partial x_j)$, связанную с тензором деформаций Альманси ε_{ij} соотношением $c_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$, или вторую меру Фингера $f_{ij} = (\partial x_i / \partial a_m)(\partial x_i / \partial a_m)$. Тензоры c_{ij} и f_{ij} взаимно обратные. Для дальнейшего получим скорости изменения этих тензоров в фиксированной точке пространства. Вначале вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} &= -\frac{\partial v_m^*}{\partial x_i} \frac{\partial a_m}{\partial x_j} - \frac{\partial a_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_j} = -\frac{\partial v_m^*}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_i} \frac{\partial a_m}{\partial x_j} - \\ &- \frac{\partial v_m^*}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial x_j} \frac{\partial a_m}{\partial x_i} = -\frac{\partial a_m}{\partial x_i} \frac{\partial a_n}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_m^*}{\partial a_n} + \frac{\partial v_n^*}{\partial a_m}\right) = \\ &= -2\overset{*}{e}_{mn} \frac{\partial a_m}{\partial x_i} \frac{\partial a_n}{\partial x_j}, \qquad \overset{*}{e}_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_n^*}{\partial a_m} + \frac{\partial v_m^*}{\partial a_n}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Дифференцируя зависимость $c_{im} f_{mj} = \delta_{ij}$, получим

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial t} = -f_{im} \frac{\partial c_{mn}}{\partial t} f_{nj} = 2\overset{*}{e}_{mn} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \tag{1.6}$$

Введенный здесь тензор e^*_{mn} будем называть тензором деформации скоростей изменения лагранжевых координат. Введем также тензор вращения скоростей $v_i{}^*$

$$\omega^*_{mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_n{}^*}{\partial a_m} - \frac{\partial v_m{}^*}{\partial a_n}\right)$$

2. В произвольный момент времени при отсутствии объемных сил в эйлеровом представлении справедливы следующие уравнения равновесия в объеме и граничные условия на той части поверхности, где заданы внешние силы:

$$(2.1)\qquad \partial\sigma_{ij} / \partial x_i = 0, \qquad n_i\sigma_{ij} = F_j$$

Соответственно в лагранжевом представлении

$$(2.2)\qquad \frac{\partial\pi_{ij}}{\partial a_i} = 0, \quad n_i{}^\circ\pi_{ij} = \frac{F_j dS}{dS^\circ} \quad \left(\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho^\circ}\frac{\partial x_i}{\partial a_m}\pi_{mj}\right)$$

Здесь σ_{ij} — тензор напряжений Коши, π_{ij} — тензор напряжений Пиола (эти тензоры связаны соотношением [6], указанным в скобках), F_j — вектор поверхностной нагрузки, отнесенной к площади граничной поверхности в текущем состоянии, dS и dS° — площади элементов граничной поверхности соответственно в текущем и начальном состоянии, n_i и $n_i{}^\circ$ — векторы единичной нормали к граничной поверхности соответственно в текущем и начальном состоянии, при этом [6]

$$(2.3)\qquad n_i = n_m{}^\circ \frac{\partial a_m}{\partial x_i}\frac{\rho^\circ}{\rho}\frac{dS^\circ}{dS}$$

Для фиксированной точки пространства уравнения рановесия в скоростях изменения тензора напряжений [7]

$$(2.4)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t}\right) = 0$$

Граничные условия необходимо относить к фиксированным материальным частицам. Поэтому в любой момент времени должны выполняться уравнения

$$\frac{dn_i}{dt}\sigma_{ij} + n_i\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{dF_j}{dt}$$

Вычисляя производную dn_i / dt путем дифференцирования формулы (2.3) при $a_j = \text{const}$, получим силовые граничные условия в скоростях изменения тензора напряжений

$$(2.5)\qquad n_i\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + v_m\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m}\sigma_{mj} + \delta_{ij}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right)dS = \frac{d}{dt}(F_j dS)$$

Геометрические граничные условия определяются заданием скоростей v_i.

3. Для дальнейшего необходимо получить зависимость тензоров напряжений Коши и Пиола от меры деформаций Фингера f_{mn}. В случае однородного изотропного идеально упругого тела удельная потенциальная энергия Φ, отнесенная к первоначальному объему, является функцией трех независимых инвариантов первой меры деформаций Коши [6]. Те же инварианты могут быть выражены и через компоненты второй меры деформаций Фингера f_{mn}. Это позволяет считать, что $\Phi = \Phi(f_{mn})$. Нужные соотношения можно тогда получить, исходя из известного выражения [1]

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial x_j / \partial a_i)} \tag{3.1}$$

Так как $\Phi = \Phi(f_{mn})$, то

$$\pi_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial f_{mn}} \frac{\partial f_{mn}}{\partial (\partial x_j / \partial a_i)} = 2 \frac{\partial x_n}{\partial a_i} \frac{\partial \Phi}{\partial f_{nj}} \tag{3.2}$$

Применяя формулу, приведенную в скобках в (2.2), найдем представление тензора напряжений Коши

$$\sigma_{ij} = 2 \frac{\rho}{\rho^\circ} f_{in} \frac{\partial \Phi}{\partial f_{nj}} \tag{3.3}$$

Важно, что тензор напряжений Коши зависит только от компонентов тензора f_{mn}. Подробное обсуждение вопроса о представлении тензора напряжений Коши через меры деформаций c_{mn} и f_{mn} можно найти в [8].

Используя зависимости (3.3), (1.3), (1.6), (3.2), получим выражение для скорости изменения тензора напряжений Коши в фиксированной точке пространства

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho^\circ} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} (B_{mjst} e_{st}^* + 2 \overset{*}{e}_{ms} \pi_{sj} - \pi_{mj} e_{ss}^*) \tag{3.4}$$

$$B_{mjst} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_{nj} \partial f_{pq}} \frac{\partial x_n}{\partial a_m} \frac{\partial x_p}{\partial a_s} \frac{\partial x_q}{\partial a_t} \tag{3.5}$$

Тензор B_{mjst} определяет физические характеристики тела в процессе деформирования. В начальный момент времени, когда тело недеформировано, тензор B_{mjst} равен изотропному тензору (λ и μ — модули упругости Ляме)

$$D_{mjst} = \lambda \delta_{mj} \delta_{st} + \mu (\delta_{ms} \delta_{jt} + \delta_{mt} \delta_{js}) \tag{3.6}$$

Отличительной особенностью определяющих уравнений (3.4) является то, что в них входят только компоненты тензора деформации скоростей изменения лагранжевых координат e_{st}^* и не входят компоненты тензора вращений ω_{st}^*.

4. На основе уравнений (2.4), (2.5), (3.4) выведем полную систему дифференциальных уравнений и граничных условий относительно вектора v_i^*.

При подстановке (3.4) в (2.5) следует использовать тождество Пиола

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho}{\rho^\circ} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \right) = 0 \tag{4.1}$$

которое в несколько иной форме приведено в [1]. С учетом этого тождества дифференциальные уравнения равновесия приобретают следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial a_m}(B_{mjst}e_{st}{}^* + 2\overset{*}{e}_{ms}\pi_{sj} - \pi_{mj}e_{ss}{}^*) = 0 \tag{4.2}$$

Для преобразования граничных условий к скоростям $v_i{}^*$ следует воспользоваться тождеством

$$n_i\left(v_m \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_m} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m}\sigma_{mj} + \sigma_{ij}\frac{\partial v_m}{\partial x_m}\right)dS = \tag{4.3}$$
$$= n_i^\circ\left(v_m{}^* \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial a_m} - \frac{\partial v_i{}^*}{\partial a_m}\pi_{mj} + \pi_{ij}\frac{\partial v_m{}^*}{\partial a_m}\right)dS^\circ$$

которое проверяется непосредственно. С учетом этого тождества и выражений (3.4), (2.3) силовые граничные условия (2.5) принимают вид

$$n_m{}^\circ\left(B_{mjst}e_{st}{}^* + \frac{\partial v_s{}^*}{\partial a_m}\pi_{sj} + v_s{}^*\frac{\partial \pi_{mj}}{\partial a_s}\right)dS^\circ = \frac{d}{dt}(F_j dS) \tag{4.4}$$

На той части поверхности, где заданы скорости материальных частиц v_i, скорости изменения лагранжевых координат $v_i{}^*$ должны быть определены с помощью формулы (1.2).

Уравнения (4.2) можно преобразовать также к форме

$$\frac{\partial}{\partial a_m}\left(B_{mjst}e_{st}{}^* + \frac{\partial v_s{}^*}{\partial a_m}\pi_{sj} + v_s{}^*\frac{\partial \pi_{mj}}{\partial a_s}\right) = 0 \tag{4.5}$$

Уравнения (4.2) и (4.4) — искомые уравнения нелинейной теории упругости в скоростях изменения лагранжевых координат. При этом скорости $v_i{}^*$ входят в них линейно. Нелинейность определяется выражением (3.5) для тензора B_{mjst} и компонентами тензора напряжений Пиола π_{st}.

При решении конкретных задач можно, например, воспользоваться методом последовательных нагружений. Зная скорости изменения лагранжевых координат, можно определить приращения перемещений материальных частиц, вычислить по (3.5) тензор B_{mjst}, найти напряжения π_{st} и затем снова определить скорости для следующего этапа нагружения.

В процессе последовательного нагружения может оказаться, что при какой-то величине нагрузки однородная краевая задача для скоростей $v_i{}^*$ будет иметь нетривиальное решение. Это соответствует появлению собственного движения, т. е. бифуркации равновесия.

5. В случае потенциальных («мертвых») поверхностных нагрузок правая часть уравнений (4.4) обращается в нуль, и система уравнений (4.2) и (4.4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial a_m}(B_{mjst}e_{st}{}^* + 2\overset{*}{e}_{ms}\pi_{sj} - \pi_{mj}e_{ss}{}^*) = 0 \tag{5.1}$$

$$n_m{}^\circ\left(B_{mjst}e_{st}{}^* + \frac{\partial v_s{}^*}{\partial a_m}\pi_{sj} + v_s{}^*\frac{\partial \pi_{mj}}{\partial a_s}\right) = 0 \tag{5.2}$$

Для получения однородной краевой задачи нейтрального равновесия процесс бифуркации будем рассматривать как появление собственного движения среды. Скорости этого движения будем также обозначать через v_i^*. На той части граничной поверхности, где заданы скорости материальных частиц, скорость собственного движения следует считать равной нулю. Параметры B_{mjst} и π_{st} для добифуркационного состояния должны, строго говоря, определяться из решения исходных нелинейных уравнений. Если эти параметры известны, то условие существования нетривиального решения уравнений (5.1) и (5.2) определяет критическое состояние деформируемого тела.

Уравнения (5.1) и (5.2) могут быть получены как соответственно уравнения Эйлера и естественные граничные условия некоторой вариационной задачи. Будем исходить из известного функционала [9]

$$I = \int_{\tau_0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\partial x_j / \partial a_i)\, \partial (\partial x_m / \partial a_n)} \frac{\partial v_j}{\partial a_i} \frac{\partial v_m}{\partial a_n} d\tau_0 \tag{5.3}$$

Условие его стационарности приводит к уравнениям нейтрального равновесия в лагранжевом представлении

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\partial x_j / \partial a_i)\, \partial (\partial x_m / \partial a_n)} \frac{\partial v_m}{\partial a_n}\right) = 0 \tag{5.4}$$

$$n_i^\circ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\partial x_j / \partial a_i)\, \partial (\partial x_m / \partial a_n)} \frac{\partial v_m}{\partial a_n} = 0$$

Подставляя в (5.3) следующее из (1.2) соотношение

$$\frac{\partial v_m}{\partial a_n} = \frac{\partial v_s^*}{\partial a_n} \frac{\partial x_m}{\partial a_s} + v_s^* \frac{\partial^2 x_m}{\partial a_s \partial a_n}$$

получим

$$I = \int_{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial (\partial x_j / \partial a_i)\, \partial (\partial x_m / \partial a_n)} \frac{\partial x_m}{\partial a_s} \frac{\partial v_s^*}{\partial a_n} + v_s^* \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial a_s}\right) \frac{\partial v_j}{\partial a_i} d\tau_0$$

Используя теперь (3.1) и (3.2), приходим к выражению

$$I = \int_{\tau_0} \left(B_{ijmn} e_{mn}^* + \frac{\partial v_m^*}{\partial a_i} \pi_{mj} + v_m^* \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial a_m}\right) \frac{\partial v_j}{\partial a_i} d\tau_0 \tag{5.5}$$

Функционал (5.5) смешанный, в него входят одновременно скорости v_m^* и v_j, связанные соотношением (1.2). Из условия стационарности функционала (5.5) можно получить сразу два варианта краевой задачи нейтрального равновесия: один в форме уравнений (5.4), другой — в виде уравнений (4.5) и (5.2).

В случае однородного начального деформированного состояния, когда $\partial^2 x_m / (\partial a_i \partial a_j) = 0$, функционал (5.5) преобразуется к виду

$$I = \int_{\tau_0} \left(G_{ijmn} e_{mn}^* e_{ij}^* + t_{ij} \frac{\partial v_i^*}{\partial a_m} \frac{\partial v_j^*}{\partial a_m}\right) d\tau_0 \tag{5.6}$$

$$G_{ijmn} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial f_{st} \partial f_{pq}} \frac{\partial x_s}{\partial a_i} \frac{\partial x_t}{\partial a_j} \frac{\partial x_p}{\partial a_m} \frac{\partial x_q}{\partial a_n}, \qquad t_{ij} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial f_{st}} \frac{\partial x_s}{\partial a_i} \frac{\partial x_t}{\partial a_j}$$

В функционал (5.6) входят только скорости v_i^*.

6. Строгие уравнения нейтрального равновесия (5.1), (5.2), полученные в скоростях изменения лагранжевых координат, содержат компоненты тензора вращений только в граничных условиях. Это открывает возможность построения приближенных уравнений, в которых параметры докритического напряженного состояния не будут входить в дифференциальные уравнения краевой задачи.

Интересно отметить, что такие уравнения при однородных начальных напряжениях без каких-либо дополнительных упрощающих предположений получаются при использовании закона состояния в форме Сетха [6] (ε_{ij} — тензор деформаций Альманси)

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ss}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (\varepsilon_{ss} = \varepsilon_{st}\delta_{ts}) \tag{6.1}$$

Действительно, из (6.1) получим, используя (1.5)

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda\frac{\partial\varepsilon_{st}}{\partial t}\delta_{ts}\delta_{ij} + 2\mu\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} = \lambda\overset{*}{e}_{mn}\frac{\partial a_m}{\partial x_s}\frac{\partial a_n}{\partial x_t}\delta_{st}\delta_{ij} + 2\mu\overset{*}{e}_{mn}\frac{\partial a_m}{\partial x_i}\frac{\partial a_n}{\partial x_j} = \lambda\overset{\circ}{f}_{mn}\overset{*}{e}_{mn}\delta_{ij} + 2\mu\overset{*}{e}_{mn}\frac{\partial a_m}{\partial x_i}\frac{\partial a_n}{\partial x_j} \tag{6.2}$$

где $f_{mn}{}^\circ = (\partial a_m / \partial x_s)(\partial a_n / \partial x_s)$ — первая мера Фингера.

Для сокращения записи следующих дальше уравнений условимся, что суммирования по двум одинаковым индексам, из которых один взят в скобки, проводить не нужно. Тогда, если начальное напряженное состояние однородно и направления главных осей тензора напряжений совпадают с направлениями осей декартовой системы координат x_j, то можно записать, что $x_j = \lambda_{(j)}a_j$. Здесь λ_j — главные удлинения. Переходя в (6.2) к переменным x_j и $v_j{}^{*\prime} = v_j{}^* / \lambda_{(j)}$, что соответствует использованию сопутствующей системы координат, получим

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda e_{ss}{}^{*\prime}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}{}^{*\prime}, \qquad e_{ij}{}^{*\prime} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j{}^{*\prime}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i{}^{*\prime}}{\partial x_j}\right) \tag{6.3}$$

Соотношения (6.3) имеют вид обычного закона Гука линейной теории упругости и явно не содержат параметров докритического напряженного состояния. Уравнения (2.4) при этом приобретают форму уравнений Ляме линейной теории упругости

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_s{}^{*\prime}}{\partial x_s}\right) + \mu\frac{\partial^2 v_j{}^{*\prime}}{\partial x_s\partial x_s} = 0 \tag{6.4}$$

Соответствующие однородные граничные условия получим из (2.5), (1.2). Они имеют вид (σ_i — главные напряжения)

$$n_i\left(\lambda e_{ss}{}^{*\prime}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}{}^{*\prime} - \lambda_{(i)}{}^2\sigma_{(j)}\frac{\partial v_i{}^{*\prime}}{\partial x_j} + \lambda_{(m)}^2\frac{\partial v_m{}^{*\prime}}{\partial x_m}\sigma_{(i)}\delta_{ij}\right) = 0 \tag{6.5}$$

Уравнения (6.4), (6.5) образуют краевую задачу бифуркации, в которой, как видно, параметры докритического напряженного состояния (главные удлинения и главные напряжения) входят только в граничные условия.

Выясним теперь, при каких упрощающих допущениях можно получить для краевой задачи устойчивости те же уравнения Ляме в случае идеально упругого тела. Для определенности удельную потенциальную энергию зададим в виде [1]

$$\Phi = {}^1/_2\lambda I_1^2 + \mu I_2, \qquad I_1 = \overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}\delta_{mn}, \qquad I_2 = \overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}\overset{\circ}{\varepsilon}_{nm} \tag{6.6}$$

где ε_{ij}° — тензор деформаций Грина, связанный с первой мерой Коши $c_{ij}^\circ = (\partial x_m / \partial a_i)(\partial x_m / \partial a_j)$ соотношением $\varepsilon_{ij}^\circ = (c_{ij}^\circ - \delta_{ij}) / 2$. Используя равенство инвариантов тензоров c_{ij}° и f_{ij}, из (3.3) получим закон состояния

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho^\circ}[(\lambda I_1 - \mu) f_{ij} + \mu f_{im} f_{mj}] \tag{6.7}$$

где нужно считать, что

$$I_1 = (f_{mn}\,\delta_{mn} - 3) / 2 \tag{6.8}$$

Применяя (1.3), (1.6) и следующее из (6.8) выражение $\partial I_1 / \partial t = c_{st}^\circ e_{ts}^*$, получим]

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = -e_{ss}^*\sigma_{ij} + \frac{\rho}{\rho^\circ}\frac{\partial x_i}{\partial a_m}\frac{\partial x_j}{\partial a_n}[\lambda c_{st}^\circ e_{ts}^*\delta_{mn} + 2\mu c_{ms}^\circ e_{sn}^* + 2\mu e_{ms}^* c_{sn}^\circ + 2(\lambda I_1 - \mu) e_{mn}^*] \tag{6.9}$$

Это уравнение может быть преобразовано к форме (3.4), причем здесь

$$B_{mjst} = [\lambda c_{st}^\circ\delta_{mn} + \mu(c_{ms}^\circ\delta_{nt} + c_{mt}^\circ\delta_{ns})]\frac{\partial x_j}{\partial a_n}$$

Введем энергетический тензор напряжений [6] $\sigma_{ij}^\circ = \partial\varphi / \partial\varepsilon_{ij}^\circ$, который при рассматриваемой форме потенциальной энергии (6.6) равен

$$\sigma_{ij}^\circ = \lambda\overset{\circ}{\varepsilon}_{mn}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^\circ$$

Тогда (6.9) можно придать вид

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho^\circ}\frac{\partial x_i}{\partial a_m}\frac{\partial x_j}{\partial a_n}[\lambda e_{ss}^*\delta_{mn} + 2\mu e_{mn}^* + 2\sigma_{ms}^\circ e_{sn}^* + 2e_{ms}^*\overset{\circ}{\sigma}_{sn} - \sigma_{mn}^\circ e_{ss}^* + 2\lambda(\varepsilon_{st}^\circ e_{st}^*\delta_{mn} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ss}e_{mn}^*)] \tag{6.10}$$

Рассмотрим теперь случай, когда критические напряжения при потере устойчивости значительно меньше модулей упругости, а критические деформации много меньше единицы. Такое предположение выполняется, например, для металлических строительных конструкций. Тогда первые два слагаемых, входящих в квадратные скобки в (6.10), с множителями λ, μ существенно больше остальных слагаемых, определяющих деформационную анизотропию упругого тела. В этом случае в выражении (6.10) допустимо пренебречь теми слагаемыми, которые состоят из произведений компонентов начальных напряжений и деформаций на компоненты тензора деформаций e_{st}^*, что равносильно пренебрежению деформационной анизотропией упругого тела. Выражение (6.10) при этом переходит в следующее:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \frac{\rho}{\rho^\circ} \frac{\partial x_i}{\partial a_m} \frac{\partial x_j}{\partial a_n} (\lambda e_{ss}^* \delta_{mn} + 2\mu e_{mn}^*) \tag{6.11}$$

Уравнения равновесия (2.5) при учете тождества (4.1) приобретают вид

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \left[(\lambda e_{ss}^* \delta_{mn} + 2\mu e_{mn}^*) \frac{\partial x_j}{\partial a_n} \right] = 0 \tag{6.12}$$

Если к тому же малы и начальные повороты, то $\partial x_j \,/\, \partial a_n \approx \delta_{nj}$ и вместо (6.12) будут выполняться уравнения

$$\frac{\partial}{\partial a_m} (\lambda e_{ss}^* \delta_{mn} + 2\mu e_{mn}^*) = 0 \tag{6.13}$$

Соответствующие граничные условия следуют из (2.3), (2.5), (4.3)

$$n_m{}^\circ \left(\lambda e_{ss}^* \delta_{mn} + 2\mu e_{mn}^* - e_{ms}^* \pi_{sn} + \omega_{ms}^* \pi_{sn} + v_s^* \frac{\partial \pi_{mn}}{\partial a_s} \right) = 0 \tag{6.14}$$

Здесь, кроме того, использовано равенство $\partial v_m^* \,/\, \partial a_s = e_{ms}^* - \omega_{ms}^*$.

Тензор докритических напряжений Пиола в (6.14) нужно считать равным тензору напряжений, определяемому с помощью линейной теории упругости, так как начальные деформации и повороты считаются малыми. С той же степенью точности, с которой осуществлен переход от (6.10) к (6.11), в уравнениях (6.14) можно также пренебречь членами $e_{ms}^* \pi_{sn}$. Тогда граничные условия становятся такими:

$$n_m{}^\circ \left(\lambda e_{ss}^* \delta_{mn} + 2\mu e_{mn}^* + \omega_{ms}^* \pi_{sn} + v_s^* \frac{\partial \pi_{mn}}{\partial a_s} \right) = 0 \tag{6.15}$$

Уравнения (6.13) могут быть записаны в форме уравнений Ляме

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{\partial v_m^*}{\partial a_m} \right) + \mu \frac{\partial^2 v_n^*}{\partial a_m \partial a_m} = 0 \tag{6.16}$$

Итак, для приближенного решения задач устойчивости слабодеформируемых упругих тел можно воспользоваться краевой задачей (6.15), (6.16) с параметром в граничных условиях. Для ее получения были сделаны предположения о возможности пренебрежения докритическими деформациями и поворотами, что соответствует такой постановке задачи устойчивости, когда в докритическом состоянии упругое тело считается напряженным, но не деформированным.

Краевая задача, определяемая уравнениями (6.14), (6.15), близка к соответствующей краевой задаче метода Л. С. Лейбензона [3]. Если отвлечься от интерпретации входящих в уравнения искомых функций, то эти задачи различаются только малосущественными слагаемыми в граничных условиях. На правомерность применения метода Л. С. Лейбензона для приближенного решения задач устойчивости слабодеформируемых изотропных упругих тел ранее указал один из авторов данно статьи [1].

Уравнения (6.15), (6.16) не являются естественными граничными условиями и уравнениями Эйлера какого-нибудь функционала, подобного (5.6). Однако, по мнению авторов, при определении первого наименьшего собственного числа краевой задачи это обстоятельство несущественно. В то же время применение полученных приближенных уравнений может значительно облегчить решение конкретных задач, особенно в тех случаях, когда известны простые решения однородных уравнений Ляме.

Поступила 2 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л. —М., Гостехиздат, 1948.
2. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. *Лейбензон Л. С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1951.
4. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, вып. 2.
5. *Гольденблат И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М., «Наука», 1969.
6. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
7. *Biot M. A.* Mechanics of incremental deformations. N. Y., Wiley, 1965.
8. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. New York—Berlin, Springer, 1965.
9. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит. 1963.

[1] Балабух Л. И. Анализ метода Л. С. Лейбензона исследования устойчивости упругих тел. IV. Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике. Тезисы докл., М., 1972.