

**ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ
ЦИЛИНДРА В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

П. П. Мосолов, В. П. Мясников

(Москва)

С использованием вариационного метода построения пограничного слоя изучается принцип выбора единственного решения для идеально пластической среды при переходе к ней от вязкопластической среды при коэффициенте вязкости, стремящемся к нулю.

Пусть в вязкопластической среде движется с постоянной скоростью в направлении своей оси бесконечно длинный цилиндр. Поле скоростей частиц вязкопластической среды, индуцированное движущимся цилиндром, в системе координат x, y, z (ось цилиндра совпадает с осью z , а поперечное сечение ω расположено в плоскости x, y) имеет вид: $u = (0, 0, u(x, y))$. В работе [1] показано, что $u(x, y)$ минимизирует функционал

$$I_1(w) = \int_{R^2 \setminus \omega} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla w|^2 + \tau_0 |\nabla w| \right] dw - Fw|_{d\omega}, \quad w|_{d\omega} = \text{const}$$

где μ, τ_0 — коэффициент вязкости и предел текучести среды, F — продольное усилие, вызывающее движение цилиндра. При заданном F можно определить скорость движения цилиндра, которая равна значению $u(x, y)$ на $d\omega$.

Если скорость движения цилиндра равна u_0 , то $u(x, y)$ минимизирует функционал

$$(1) \quad I_2(w) = \int_{R^2 \setminus \omega} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla w|^2 + \tau_0 |\nabla w| \right] dw, \quad w|_{\partial\omega} = u_0$$

При этом сила, необходимая для осуществления такого движения, находится по формуле

$$u_0 F = I_2(u) + \int_{R^2 \setminus \omega} \frac{\mu}{2} |\nabla u|^2 d\omega$$

В дальнейшем будет рассматриваться именно этот случай, когда скорость движения цилиндра задана.

В работе [1] показано, что в случае выпуклой области ω движение цилиндра возможно, если $F > \tau_0 \text{mes } d\omega$.

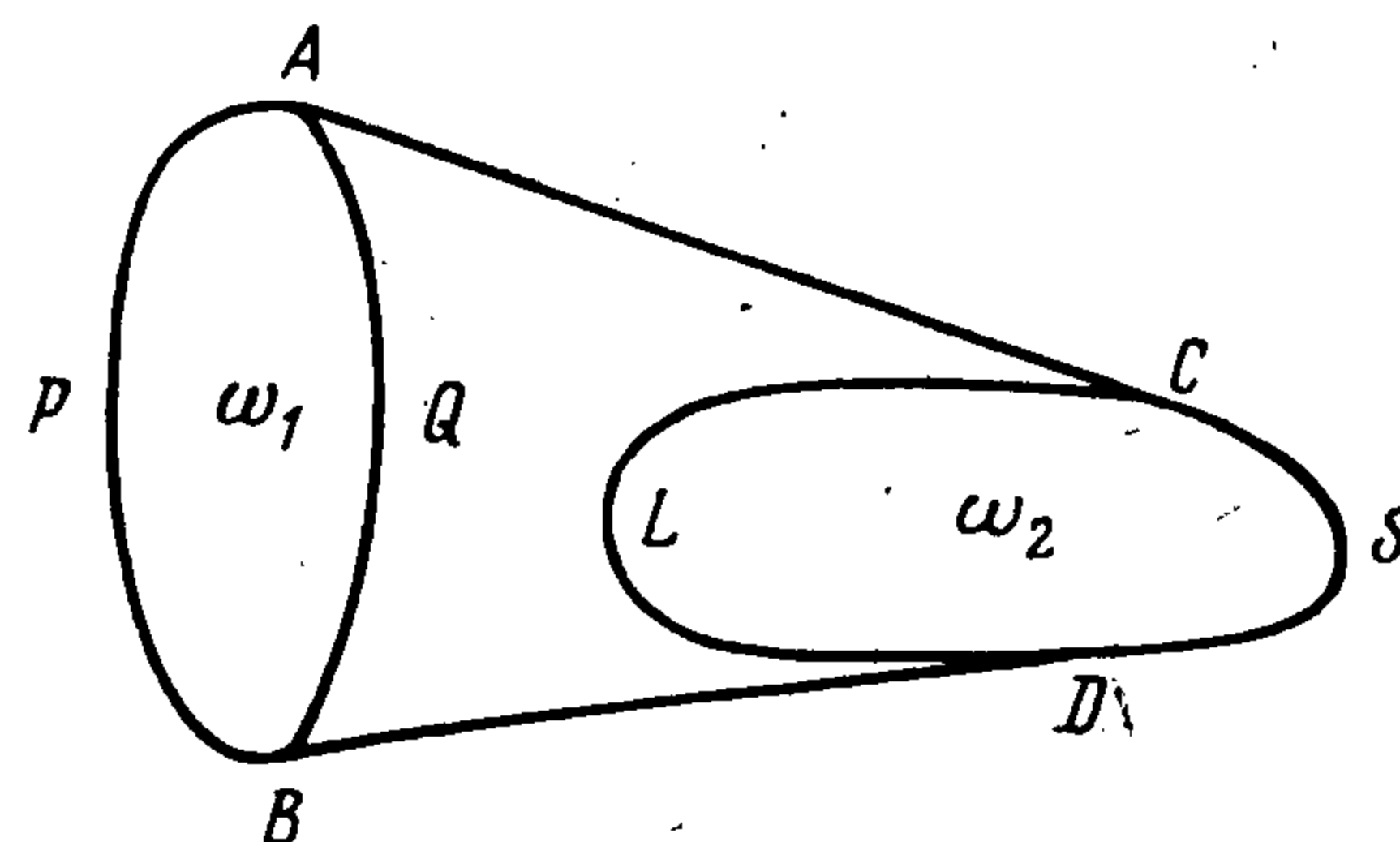
Предельным случаем вязкопластической среды является идеально пластическая среда, для которой $\mu = 0$.

Стационарное движение здесь возможно лишь при $F = \tau_0 \text{mes } \partial\omega$. При этом распределение скоростей стационарного движения таково:

$$u(x, y) = \begin{cases} u_0, & (x, y) \in \partial\omega \\ 0, & (x, y) \in R^2 \setminus \omega \end{cases}$$

В работе [2] было рассмотрено движение системы цилиндров с параллельными осями в идеально пластической среде. Полученные там результаты проиллюстрируем на примере двух цилиндров с поперечными сечениями ω_1, ω_2 (см. фиг. 1).

Структура поля скоростей в такой системе определяется взаимным расположением ω_1 и ω_2 . Именно, если $\text{mes } \partial(\omega_1 \cup \omega_2) < \text{mes } \partial(\omega_1 \cup \Omega \cup \omega_2)$, то цилиндры движутся независимо одно от другого со скоростями u_1 и u_2 , а среда неподвижна. Наоборот, при $\text{mes } \partial(\omega_1 \cup \omega_2) > \text{mes } \partial(\omega_1 \cup \Omega \cup \omega_2)$ движется с постоянной скоростью область $\omega_1 \cup \Omega \cup \omega_2$, а остальная часть среды неподвижна. В предельном случае, когда $\text{mes } \partial(\omega_1 \cup \omega_2) = \text{mes } \partial(\omega_1 \cup \Omega \cup \omega_2)$, функция $u(x, y)$ имеет вид



Фиг. 1

$$(2) \quad u(x, y) = \begin{cases} u_1, & (x, y) \in \partial\omega_1 \\ u_2, & (x, y) \in \partial\omega_2 \\ u_0, & (x, y) \in \Omega \\ 0, & (x, y) \in R^2 \setminus (\omega_1 \cup \Omega \cup \omega_2) \end{cases}$$

$$u_1 \geq u_0, \quad u_2 \geq u_0, \quad u_0 \geq 0$$

Таким образом, здесь возможны различные конфигурации поля скоростей. Отметим, что при движении той же системы цилиндров в вязкопластической среде конфигурация скоростей определяется однозначно. Возникает естественный вопрос о том, какая из конфигураций поля скоростей является предельной при $\mu \rightarrow 0$.

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо изучить характер поля скоростей в указанной выше задаче для вязкопластической среды с малой вязкостью. Ниже будет показано, что выбор предельной конфигурации поля скоростей определяется диссипацией энергии в пограничном слое, возникающем в окрестностях линий разрыва функции $u(x, y)$ в формуле (2). Предлагаемая ниже схема построения поля скоростей в пограничном слое опирается на вариационный асимптотический метод, различные примеры использования которого были даны в [3-5].

Итак, рассмотрим функционал (1) и перейдем в нем к безразмерным переменным. Отнесем x и y к длине L контура $\partial\omega$, а поле скоростей к u_0 . Тогда I_2 переписется в виде

$$(3) \quad I_2'(w) = \tau_0 u_0 L \int_{R^2/\omega} \left[\frac{\varepsilon}{2} |\nabla w|^2 + |\nabla w| \right] d\omega, \quad w|_{\partial\omega} = 1.$$

$$(4) \quad \varepsilon = \mu u_0 / \tau_0 L \ll 1$$

Основная цель данной работы — найти с определенной точностью аппроксимацию функции минимизирующей (3). Именно, если u_ε — функция, минимизирующая (3), то

$$(5) \quad I_2(u_\varepsilon) = \tau_0 u_0 L [1 + c_1 f_1(\varepsilon) + c_2 f_2(\varepsilon) + \dots]$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_n(\varepsilon)}{f_{n-1}(\varepsilon)} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

причем ряд в (5) — асимптотический и функции $f_i(\tau)$ не зависят от геометрии контура. Назовем функцию u_ε^k аппроксимацией порядка k , если

$$I_2(u_\varepsilon^k) - I_2(u_\varepsilon) = \tau_0 L u_0 g_{k+1}(\varepsilon)$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{g_{k+1}(\varepsilon)}{f_{k+1}(\varepsilon)} \right| < \infty$$

Можно показать [3], что

$$(6) \quad \int_{R^2/\omega} |\nabla u_\varepsilon^k - \nabla u_\varepsilon|^2 d\omega \leq \frac{4}{\varepsilon} g_{k+1}(\varepsilon) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Неравенство (6) представляет собой оценку различия между истинным полем скоростей и его аппроксимацией.

Пограничным слоем будем называть аппроксимацию u_ε первого порядка. Отметим, что если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g_2(\varepsilon) / \varepsilon) \neq 0$, то пограничный слой, вообще говоря, не дает представления о качественном поведении u_ε . Поэтому для исследования u_ε приходится рассматривать аппроксимации более высоких порядков.

Опишем процедуру построения аппроксимаций. Отметим, что при определении порядка аппроксимации наиболее существенным моментом является оценка снизу для функционала (3). Перейдем в функционале (3) к криволинейным ортогональным координатам (s, n) так, что внешность ω отображается в полуполосу $0 \leq s \leq a, n \geq 0$; $n = 0$ определяет границу ω и

$$I_2 = \tau_0 L u_0 \int_0^a \int_0^\infty \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[A^2(s, n) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + C^2(s, n) \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left[A^2(s, n) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + C^2(s, n) \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \Delta ds dn \\ \Delta = \left| \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial n} \right|$$

Введем функционал

$$I_2^*(u) = \tau_0 u_0 L \int_0^a \int_0^\infty \left[\frac{\varepsilon}{2} A^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \left| A \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right] \Delta ds dn$$

Очевидно, $I_2 \geq I_2^*$ и, следовательно, $\inf I_2 \geq \inf I_2^*$. Пусть u_ε^* минимизирует функционал I_2^* . Тогда для $\inf I_2$ имеет место двусторонняя оценка

$$(7) \quad I_2(u_\varepsilon^*) \geq \inf I_2(u) \geq I_2^*(u_\varepsilon^*)$$

Заметим, что если в качестве координат взять линии уровня функции u_ε и ортогональные к ним линии, то неравенства (7) превращаются в равенства. Таким образом, можно предложить следующий метод построения аппроксимаций. Взяв произвольную систему координат, определяем функционал I_2^* и находим для него функцию u_ε^* . Далее, вводим новую систему координат, определяемую линиями уровня u_ε^* и ортогональными к ней линиями. В этой новой системе координат опять определяем функционал I_2^* , находим для него u_ε^* и далее повторяем предыдущие построения. Очевидно, что на каждом следующем шагу неравенства (7) точнее, чем на предыдущем. Неравенства (7) определяют порядок аппроксимации. Важно отметить, что для нахождения u_ε необходимо решать дифференциальное уравнение в частных производных, в то время как для определения u_ε^* нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение.

Изложенную выше конструкцию можно осуществить и в случае неортогональных координат. Однако здесь следует учесть, что точность аппроксимации зависит от степени неортогональности координат.

Одной из возможных координатных систем для рассматриваемой задачи является следующая система:

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= x(s) + y'(s)n, & y &= y(s) - x'(s)n \\ (0 \leq s \leq 1, \quad n \geq 0) \end{aligned}$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ — натуральное уравнение контура $\partial\omega$. Будем предполагать функции $x(s)$, $y(s)$ достаточно гладкими и кривизну контура $k(s)$ строго положительной. В переменных (8) I_2 имеет вид

$$\begin{aligned} I_2(u) &= \tau_0 L u_0 \int_0^1 \int_0^\infty \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{(1+kn)^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + (1+kn)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+kn} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + (1+kn)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} (1+kn) ds dn \\ I_2^* &= \tau_0 L u_0 \int_0^1 \int_0^\infty \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right\} (1+kn) ds dn \end{aligned}$$

Функция u_ε^* определяется формулой

$$(9) \quad u_\varepsilon^* = 1 - \int_0^n \frac{k(s)(\gamma(s)-t)}{\varepsilon(1+k(s)t)} dt \quad \left(\varepsilon = k(s) \int_0^{\gamma(s)} \frac{\gamma(s)-t}{1+k(s)t} dt \right)$$

где $\gamma(s)$ определяется из уравнения, указанного в скобках.

Формула (9) дает возможность построить функцию

$$(10) \quad v_\varepsilon^* = \begin{cases} 1 - \frac{k}{\varepsilon} n \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{k}} - \frac{n}{2} \right), & 0 \leq n \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{k}} \\ 0, & n \geq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{k}} \end{cases}$$

Функцию v_ε^* строим по u_ε^* , используя разложение ее по формуле Тейлора. Непосредственно проверяется, что

$$(11) \quad I_2^*(u_\varepsilon^*) - I_2^*(v_\varepsilon^*) = O(\varepsilon)$$

Далее, также непосредственно проверяется, что

$$(12) \quad I_2| (v_\varepsilon^*) - I_2^*(v_\varepsilon^*) = O(\varepsilon)$$

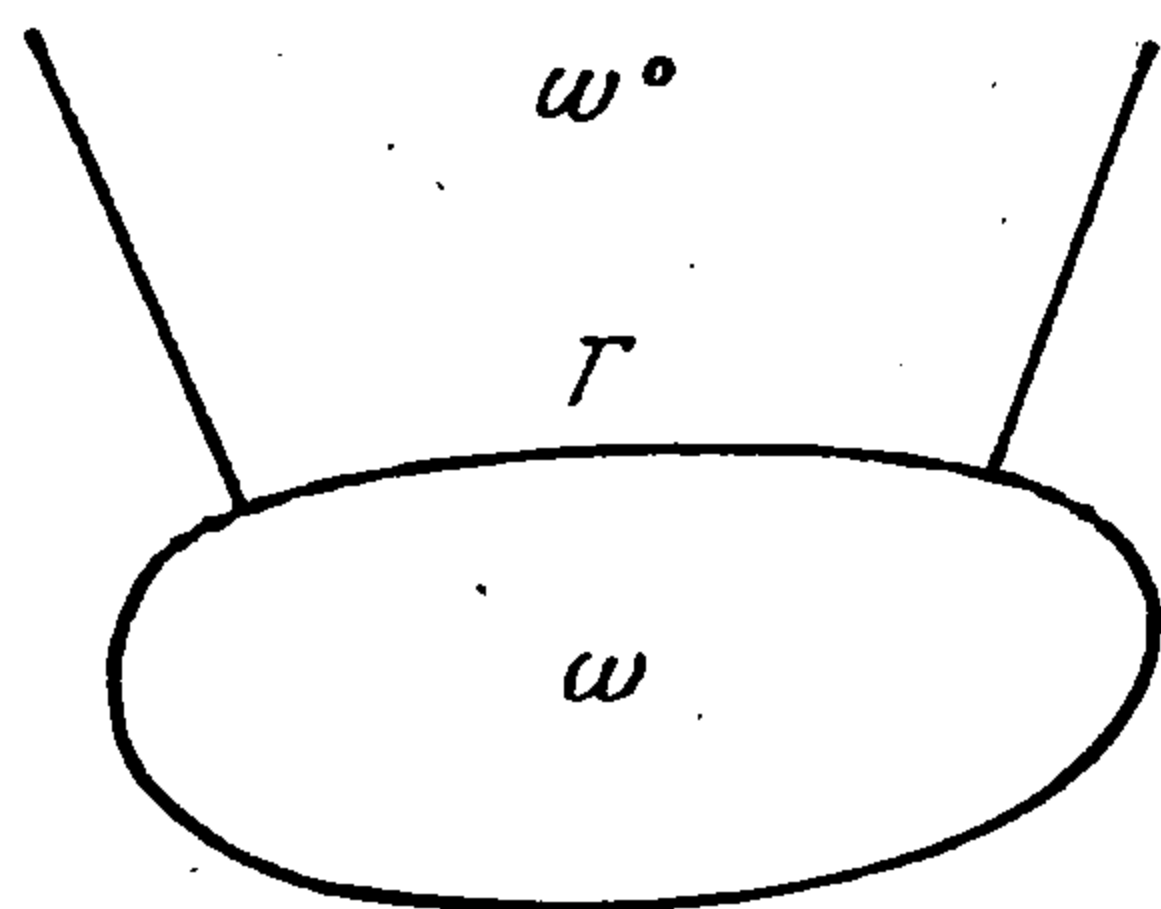
Заметим, что правые части в равенствах (11), (12) легко оценить через исходные характеристики задачи. Из (11), (12) и (7) находим

$$(13) \quad \inf_w I_2(w) = I_2(v_\varepsilon^*) + O(\varepsilon) = \tau_0 L u_0 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \sqrt{k} ds + O(\varepsilon) \right)$$

Таким образом

$$f_1(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}, \quad c_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{k} ds$$

причем v_ε^* — пограничный слой для u_ε и $g_2(\varepsilon) = \varepsilon$. Приведенные выше рассуждения являются локальными, т. е. если рассмотреть Γ — часть контура — и область ω_0 , ограниченную Γ и нормальными к Γ в конечных точках (см. фиг. 2), то



Фиг. 2

$$(14) \quad \inf_w I_2(w) = \tau_0 \text{mes } \Gamma u_0 \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{2} \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \sqrt{k} ds + O(\varepsilon) \right)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu u_0}{\tau_0 \text{mes } \Gamma}$$

где $w|_\Gamma = 1$ и w стремится к нулю при удалении точки в ω к бесконечности по нормали к Γ . Здесь, как и в формуле (13), введена безразмерная переменная, $0 \leq s \leq 1$. Перепишем формулу (14) в исходных переменных

$$(15) \quad \inf_w I_2(w) = \tau_0 \text{mes } u_0 \Gamma + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu \tau_0 u_0^3} M(\text{mes } \Gamma) + O(\mu)$$

$$M(\text{mes } \Gamma) = \int_0^{\text{mes } \Gamma} \sqrt{k(s)} ds$$

Из оценки (6) следует, что

$$(16) \quad \int_{R^2 \setminus \omega} |\nabla u_\varepsilon - \nabla v_\varepsilon^*|^2 d\omega < \infty$$

Однако, вообще говоря, интеграл (16) может не стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, для определения функции u_ε нужно строить аппроксимации более высоких порядков.]

Используем функцию v_ε^* для построения координатной системы.

Возьмем функцию $w_\varepsilon^* = 1 - n\sqrt{(2k/\varepsilon)}$ и рассмотрим ее линии уровня. Семейство линий, ортогональных к этим линиям уровня, не определяется простыми формулами. Поэтому ограничимся требованием, чтобы координатные линии были ортогональны с точностью до n^2 . Указанные соображения приводят к следующей системе координат:

$$(17) \quad x = x(s) + y'(s) \frac{n}{\sqrt{k(s)}} + x'(s) \frac{k'(s)}{4k^2(s)} n^2$$

$$y = y(s) - x'(s) \frac{n}{\sqrt{k(s)}} + y'(s) \frac{k'(s)}{4k^2(s)} n^2$$

Перепишем I_2 в криволинейных координатах (17)

$$(18) \quad I_2 = \tau_0 L u_0 \int_0^1 \int_0^\infty \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[A^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + 2C \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial s} + B^2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right] + \left[A^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + 2C \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial s} + B^2 \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \Delta ds dn$$

Для функционала (18) I_2^* имеет вид

$$(19) \quad I_2^* = \tau_0 L u_0 \int_0^1 \int_0^\infty \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(A^2 - \frac{C^2}{B^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \sqrt{A^2 - \frac{C^2}{B^2}} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right] \Delta ds dn$$

Видно, что $I_2 \geq I_2^*$ и, значит, $\inf I_2 \geq \inf I_2^*$. Функция u_ε^* , минимизирующая функционал (19), определяется формулой

$$(20) \quad u_\varepsilon^* = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\varepsilon} H(n, s), & 0 \leq n \leq \gamma(s) \\ 0, & n \geq \gamma(s) \end{cases}$$

$$H(n, s) = \int_0^n \Delta(n', s) \frac{\Phi(\gamma(s), s) - \Phi(n', s)}{\Phi^2(n', s)} dn'$$

Функция $\gamma(s)$ определяется из уравнения

$$(21) \quad \varepsilon = H(\gamma(s), s)$$

Здесь

$$\Phi^2 = \left[A^2(s, n) - \frac{C^2(s, n)}{B^2(s, n)} \right] \Delta^2(s, n)$$

$$\Delta(s, n) = \frac{1}{\sqrt{k}(s)} + n + \frac{k''k - k'^2}{4k^3 \sqrt{k}} n^2 + \frac{k'^2}{8k^3} n^3$$

$$A^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left[1 + 2n \sqrt{k} + \left(k - \frac{5k'^2}{4k^3} + \frac{k''}{2k^2} \right) n^2 + \right. \\ \left. + \frac{2k''k - 3k'^2}{4k^2 \sqrt{k}} n^3 + \left\{ \left[\left(\frac{k'}{4k^2} \right)' \right]^2 + \frac{k'^2}{16k^2} \right\} n^4 \right]$$

$$B^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{1}{k} + \frac{k'^2}{4k^4} n^2 \right)$$

$$C = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{k'}{4k \sqrt{k}} n^2 + \frac{k'}{8k^2} \left(\frac{k'}{k^2} \right)' n^3 \right]$$

Для определения $\gamma(s)$ следует подынтегральную функцию в (21) разложить по формуле Тейлора по степеням n' . Точность, которая требуется от $\gamma(s)$ для определения разложения (5), следующая:

$$\gamma(s) = \sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon R + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} M + \varepsilon^2 N + O(\varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon})$$

Коэффициенты R, M, N выражаются через $k(s)$ и ее производные из уравнения (21). Например

$$R = \frac{1}{3} \left[\sqrt{k} + \frac{5}{2} \frac{k'^2}{k^3 \sqrt{k}} - \frac{k''}{k^2 \sqrt{k}} \right]$$

Формулы для M и N не приводим из-за их громоздкости.

Найденную функцию u_ε^* (20) подставляем в функционалы (18), (19). Используя разложение u_ε^* по степеням n и проводя непосредственные вычисления, находим, что функционалы (18), (19) отличаются на величину порядка ε^2 . Таким образом, получаем следующее разложение:

$$(22) \quad \inf I_2 = \tau_0 L u_0 \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \sqrt{kcs} ds + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^1 \left[k - \frac{k'^2}{12k^3} \right] ds - \right. \\ \left. - \frac{53\sqrt{2}}{90} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \int_0^1 \left[k \sqrt{k} + \frac{169}{53} \frac{k'^2}{k^2 \sqrt{k}} - \frac{13}{212} \frac{k'^4}{k^6 \sqrt{k}} + \frac{1}{53} \frac{k''}{k^4 \sqrt{k}} \right] ds + O(\varepsilon^2) \right\}$$

Из разложения (22) следует, что найденная функция u_ε^* является аппроксимацией третьего порядка функции u_ε , и оценка (6) имеет вид

$$\int_{R^2 \setminus \omega} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u_\varepsilon^*|^2 d\omega \leq C\varepsilon$$

Вернемся к задаче о выделении единственного решения в задаче о движении цилиндров в идеально пластической среде при помощи исчезающе малой вязкости. Предположим, что ω_1, ω_2 (фиг. 1) — выпуклые области, границы которых во всех точках имеют положительную кривизну и

$$\text{mes } \partial\omega_1 + \text{mes } \partial\omega_2 = \text{mes } \partial(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \Omega)$$

Предположим далее, что силы, действующие на цилиндры, так зависят от μ , что скорость цилиндра с поперечным сечением ω_i равна u_i ($i = 1, 2$); u_i те же, что и в формуле (2). Пусть для определенности $u_1 \geq u_2$. Очевидно, что $F_i \rightarrow \tau_0 \text{mes } \omega_i$ при $\mu \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$). Если области ω_1, ω_2 одинаковы и $u_1 = u_2$, то $F_1 = F_2$. Решение соответствующей задачи для идеально пластической среды дано формулой (2), причем u_0 может быть любым в пределах $0 \leq u_0 \leq u_2$. Будет показано, что при $\mu \rightarrow 0$ решения вязкопластических задач сходятся к решению идеально пластической задачи с $u_0 = u_2$.

Предположим противное. Пусть существует последовательность $\mu_i \rightarrow 0$ такая, что решения вязкопластических задач сходятся к решению (2) с $u_0 < u_2$.

Рассмотрим функционал

$$I_3(w) = \int_{R^2 \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla w|^2 + \tau_0 |\nabla w| \right] d\omega - F_1 w|_{\partial\omega_1} - F_2 w|_{\partial\omega_2}$$

и рассмотрим некоторые особенности структуры функции u_μ , минимизирующей $I_3(w)$. В [1] было доказано, что если цилиндр с поперечным сечением ω движется под действием силы F в вязкопластической среде, то для длин линий уровня $u_\mu = h$ распределения скоростей имеет место неравенство]

$$(23) \quad \tau_0 \int_\alpha^\beta \text{mes } \partial(u_\mu > h) dh \leq F(\beta - \alpha)$$

Из неравенства (23) следует, что у функции u_μ , минимизирующей I_3 , существует линия уровня $u_\mu = u_0 + \rho(\mu)$ ($\rho \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$), разделяющая линии уровня u_μ на два класса. Именно, при $u_\mu < u_0 + \rho(\mu)$ линии уровня u_μ односвязны и охватывают область $\omega_1 \cup \omega_2$; при $u_\mu > u_0 + \rho(\mu)$ линии уровня u_μ двусвязны и каждая из компонент охватывает соответствующую область ω_i ($i = 1, 2$).

Граница множества уровня $u_\mu = u_0 + \rho(\mu) = u_0^\mu$ изображена на фиг. 3 сплошной линией.

Используя эту линию уровня, рассмотрим области $T_1 - T_6$ (фиг. 4). Прямые AA_0, BB_0 , перпендикулярны к $\partial\omega_1$; CC_0, DD_0 перпендикулярны к $\partial\omega_2$. Далее

$$(24) \quad A + \inf I_3(w) \geq \sum_1^6 \inf I_2(w_k, T_k)$$

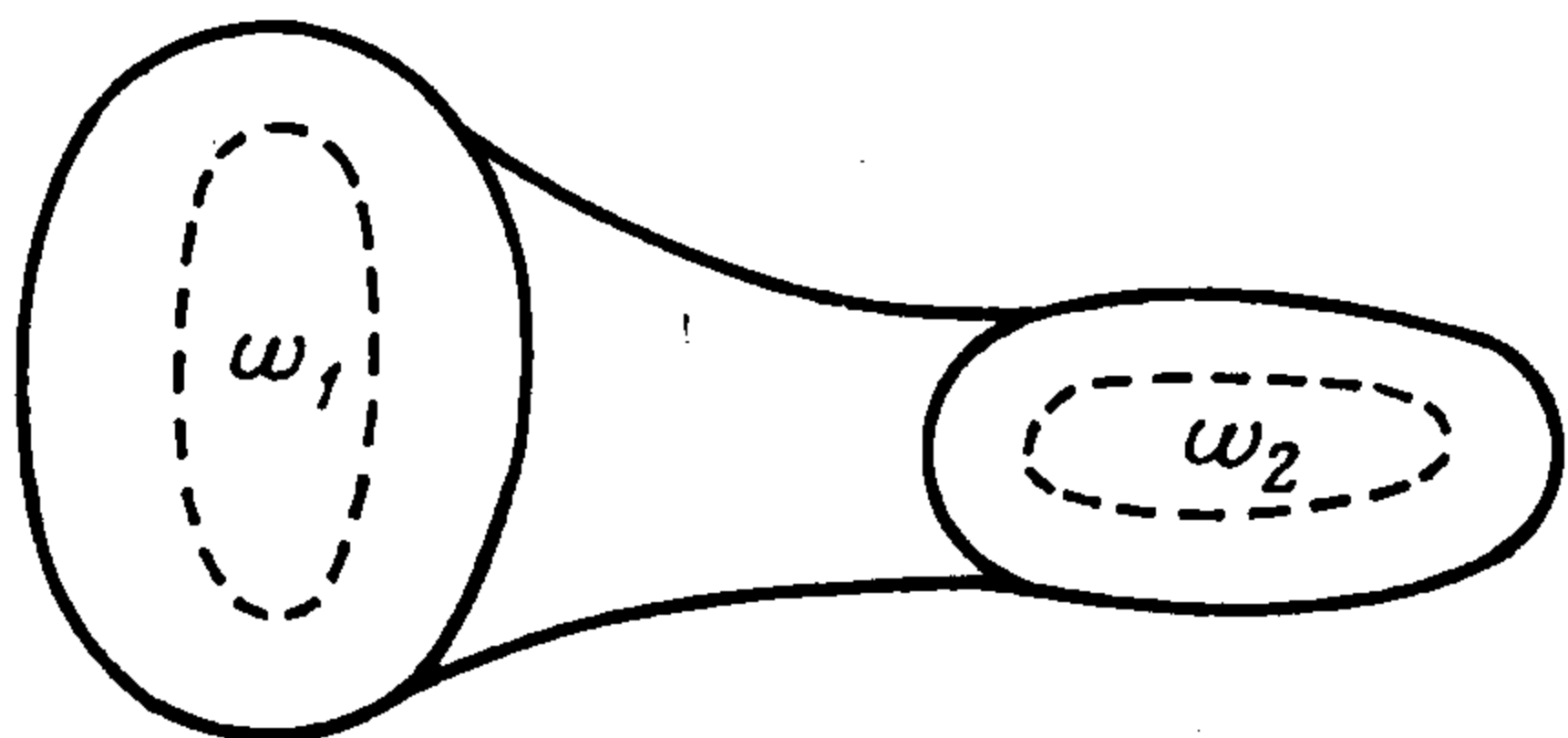
$$I_2(\varphi, \Omega) = \int_{\Omega} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \varphi|^2 + \tau_0 |\nabla \varphi| \right] d\omega$$

$$A = F_1 u_1 |_{\partial \omega_1} + F_2 u_2 |_{\partial \omega_2}$$

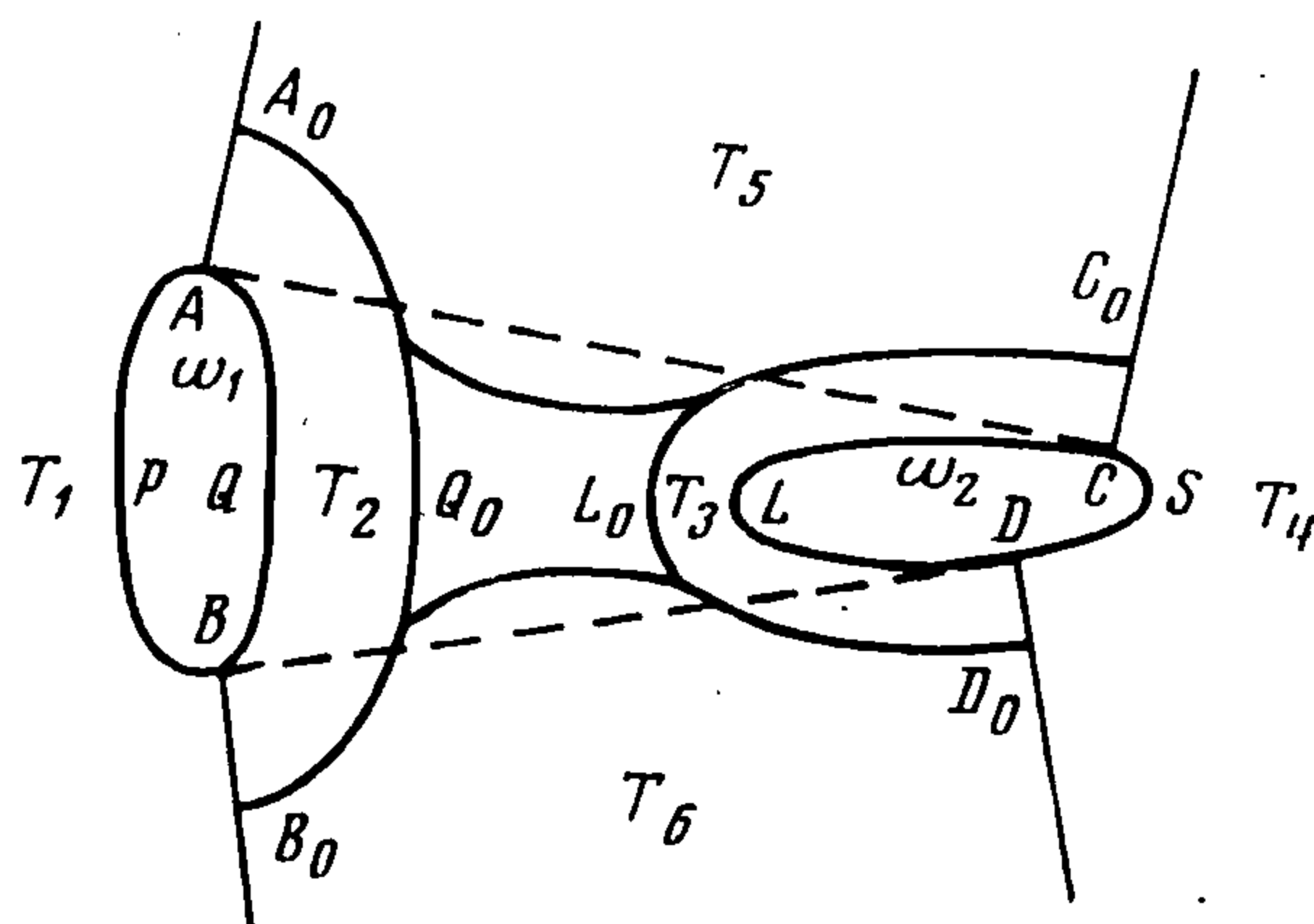
$$w_1 |_{APB} = u_1, \quad w_2 |_{AQB} = u_1, \quad w_2 |_{A_0 Q_0 B_0} = u_0^\mu, \quad w_3 |_{CLD} = u_2$$

$$w_3 |_{C_0 L_0 D_0} = u_0^\mu, \quad w_4 |_{CSD} = u_2, \quad w_5 |_{A_0 C_0} = u_0^\mu, \quad w_6 |_{B_0 D_0} = u_0^\mu$$

и w_1, w_4, w_5, w_6 стремятся к нулю при удалении точки на бесконечность в соответствующей области.



Фиг. 3



Фиг. 4

Используя формулу (15), находим

$$(25) \quad \inf_{w_1} I_2(w_1, T_1) \geq \tau_0 u_1 \text{mes } APB + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu \tau_0 u_1^3} M(\text{mes } APB) + O(\mu)$$

$$\inf_{w_2} I_2(w_2, T_2) \geq \tau_0 (u_1 - u_0^\mu) \text{mes } AQB +$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu \tau_0} (u_1 - u_0^\mu)^{3/2} M(\text{mes } AQB) + O(\mu)$$

$$\inf_{w_3} I_2(w_3, T_3) \geq \tau_0 (u_2 - u_0^\mu) \text{mes } CLD +$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu \tau_0} (u_2 - u_0^\mu)^{3/2} M(\text{mes } CLD) + O(\mu)$$

$$\inf_{w_4} I_2(w_4, T_4) \geq \tau_0 u_2 \text{mes } CSD + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu \tau_0 u_2^3} M(\text{mes } CSD) + O(\mu)$$

Видно, что справедливы следующие соотношения:

$$(26) \quad I_2(w_5, T_5) \geq \tau_0 \int_{T_5} |\nabla w_5| d\omega =$$

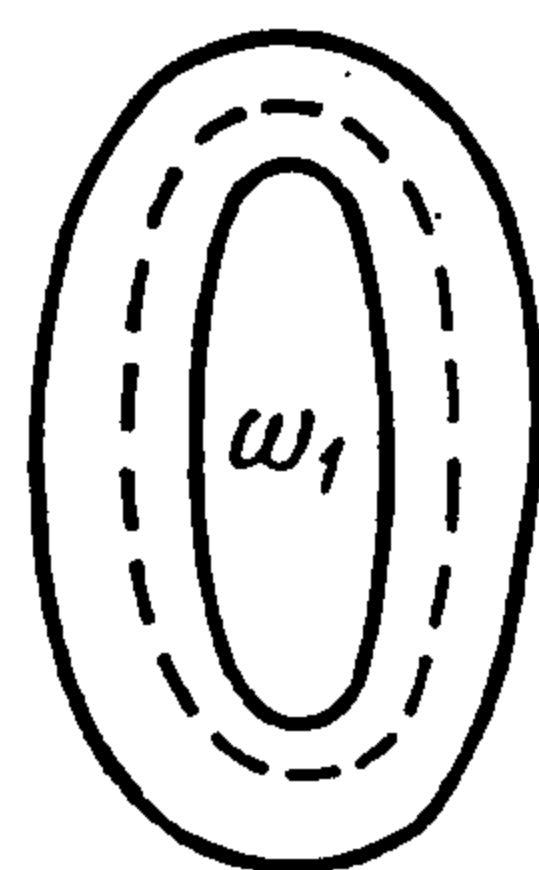
$$= \tau_0 \int_0^{u_0} \text{mes} [\partial(w_5 > h) \setminus \partial T_5] dh \geq \tau_0 u_0^\mu \text{mes } AC$$

$$(27) \quad I_2(w_6, T_6) \geq \tau_0 u_0^\mu \text{mes } BD$$

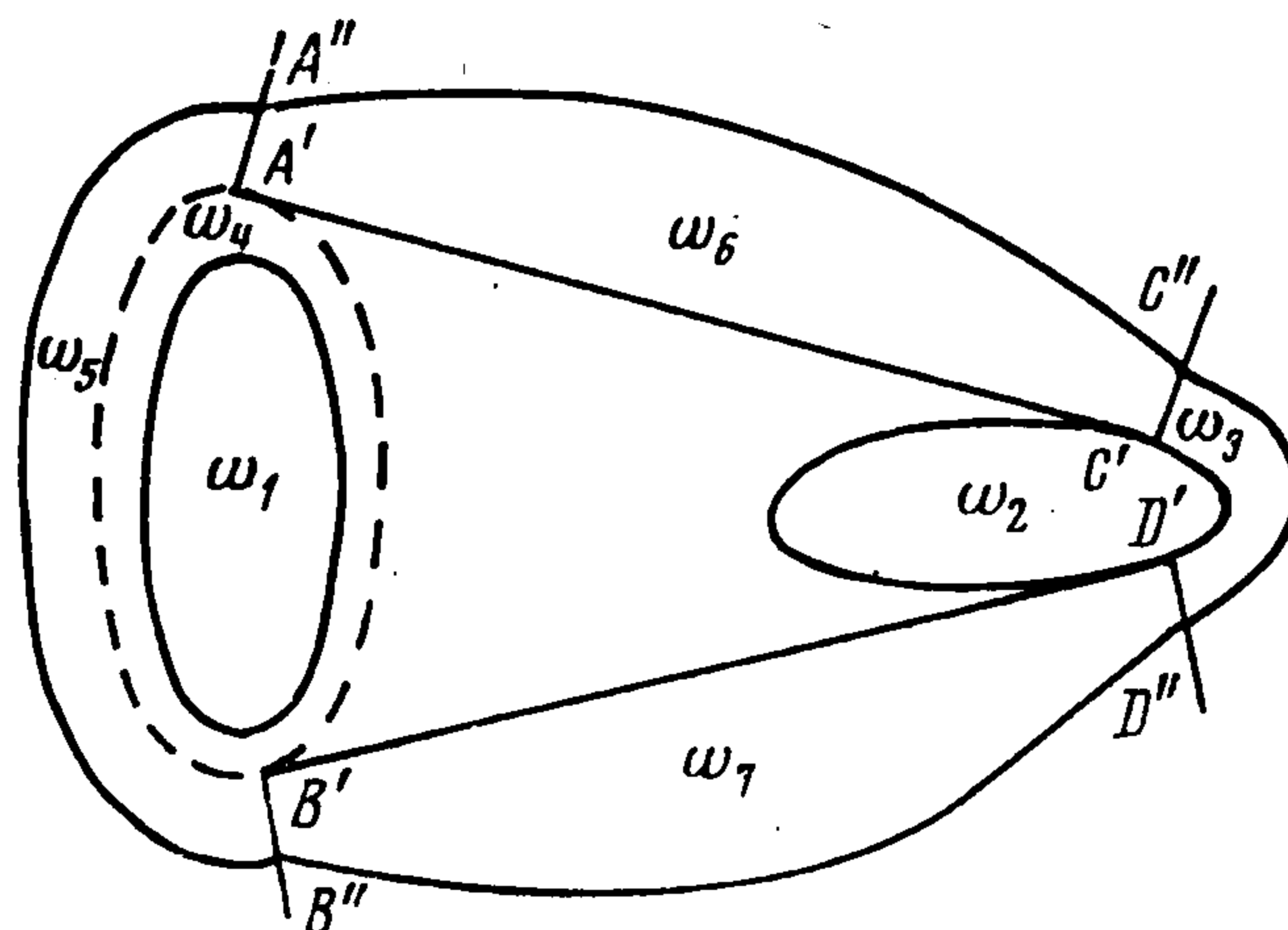
Итак, окончательно из формул (24)–(27) получаем следующую оценку снизу:

$$(28) \quad \begin{aligned} A + \inf I_3 \geq & \tau_0 u_1 \text{mes } APB + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} u_1^{3/2} M (\text{mes } APB) + \\ & + \tau_0 (u_1 - u_0^\mu) \text{mes } AQB + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} (u_1 - u_0^\mu)^{3/2} M (\text{mes } AQB) + \\ & + \tau_0 (u_2 - u_0^\mu) \text{mes } CLD + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} (u_2 - u_0^\mu)^{3/2} M (\text{mes } CLD) + \\ & + \tau_0 u_2 \text{mes } CSD + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} u_2^{3/2} M (\text{mes } CSD) + \\ & + \tau_0 u_0^\mu \text{mes } AC + \tau_0 u_0^\mu \text{mes } BP + O(\mu) \end{aligned}$$

Для доказательства невозможности неравенства $u_0 < u_2$ достаточно построить функцию v_μ , для которой $I_3(v_\mu) + A$ строго меньше правой части в неравенстве (28). Рассмотрим пограничный слой для областей ω_i .



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 пунктиром обозначена линия уровня $u_\mu^* = u_2$ в пограничном слое для ω_1 . Поле скоростей в нем определяется формулой (10). Приступим к построению функции v_μ . Проведем общие касательные к пунктирной линии и $\partial\omega_2$ (фиг. 5). Эти касательные определяют точки A', C', D', B' (фиг. 6). Прямые $A''A', C''C'$ перпендикулярны к $A'C'$, прямые $B''B', D''D'$ перпендикулярны к $B'D'$. Функция v_μ равна соответствующим значениям в пограничных слоях в областях $\omega_3, \omega_4, \omega_5$. В ω_6, ω_7 линии уровня v_μ — параболы. При этом v_μ — непрерывная функция с кусочно-непрерывными производными. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что существует семейство парабол в областях ω_6, ω_7 такое, что

$$(29) \quad I_2(v_\mu, \omega_6 \cup \omega_7) = \tau_0 u_2 \text{mes } A'C' + \tau_0 u_2 \text{mes } B'D' + O(\sqrt{\mu})$$

Заметим, что для выполнения соотношения (29) ширина областей ω_6, ω_7 должна иметь порядок $\mu^{1/2}$. Таким образом, v_μ определяет кинематически возможное движение, в котором часть среды движется со скоростью цилиндра ω_2 .

Вычислим $A + I_3$ на функции v_μ .

$$(30) \quad \begin{aligned} A + I_3 = & I_2(v_\mu, \omega_3) + I_2(v_\mu, \omega_4 \cup \omega_5) + O(\sqrt{\mu}) + \tau_0 u_2 \text{mes } A'C' + \\ & + \tau_0 u_2 \text{mes } B'D' \end{aligned}$$

В силу (15) имеет место соотношение

$$(31) \quad I_2(v_\mu, \omega_3) = \tau_0 u_2 \text{mes } C'SD' + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} u_2^{3/2} M (\text{mes } C'SD') + O(\mu)$$

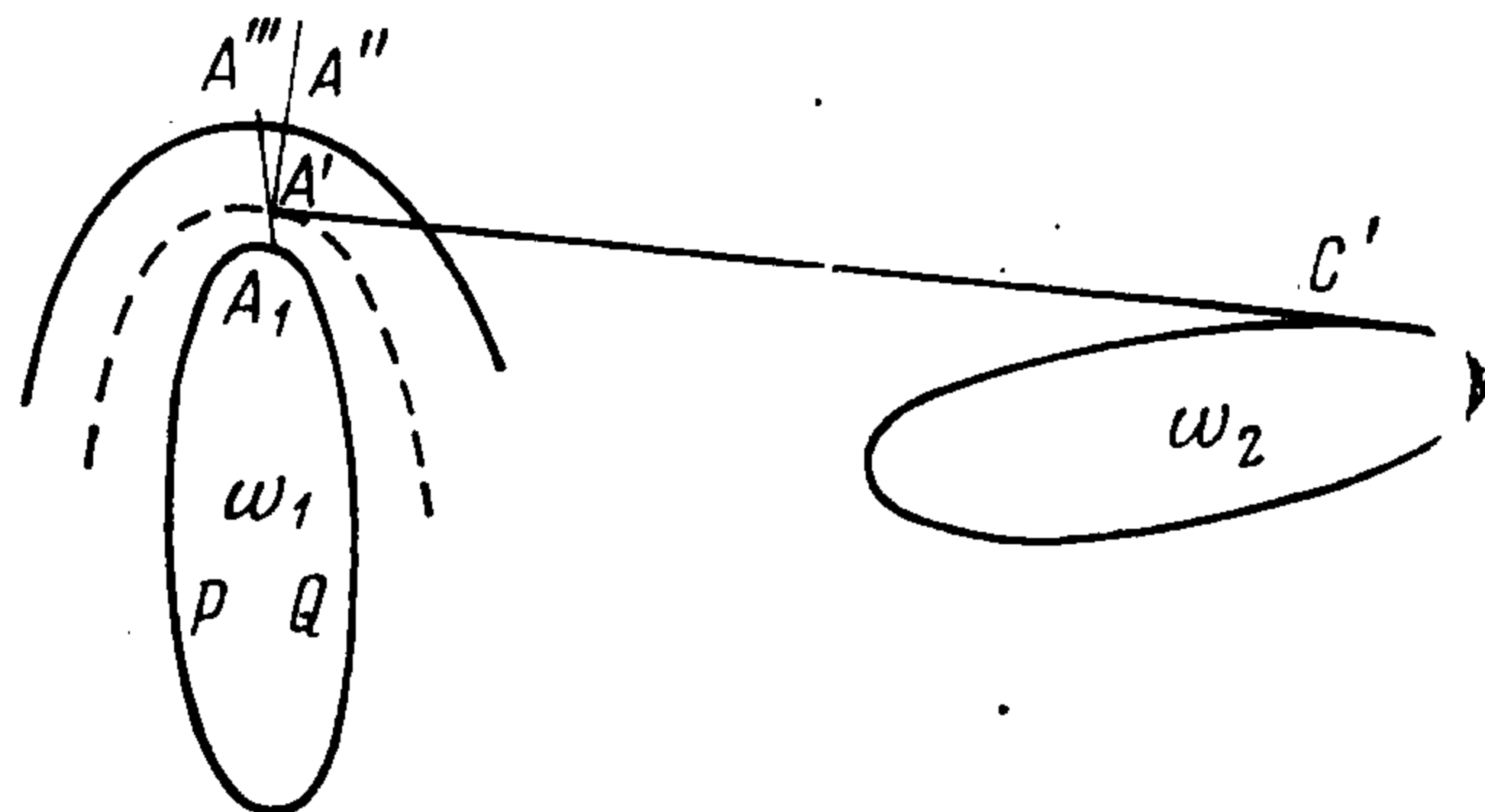
Рассмотрим второй интеграл в (20). Проведем через точки A', B' (фиг. 6) нормали к $\partial\omega_1$ (см. фиг. 7).

Используя вид функции v_μ (10), непосредственно определяем, что

$$I_2(v_\mu, A'A''A''') = o(\sqrt{\mu}), \quad I_2(v_\mu, B'B''B''') = o(\sqrt{\mu})$$

Поэтому справедливо следующее соотношение:

$$(32) \quad \begin{aligned} I_2(v_\mu, \omega_4 \cup \omega_5) = & \\ = & \tau_0 u_1 \text{mes } A_1PB_1 + \tau_0(u_1 - \\ & - u_2) \text{mes } A_1QB_1 + \\ & + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} u_1^{3/2} M(\text{mes } A_1PB_1) + \\ & + \frac{12\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} (u_1 - \\ & - u_2)^{3/2} M(\text{mes } A_1, QB_1) + \\ & + o(\sqrt{\mu}) \end{aligned}$$



Фиг. 7

Из соотношений (30) — (32) находим

$$(33) \quad \begin{aligned} A + I_3(v_\mu) = & \tau_0 u_1 \text{mes } A_1PB_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} u_1^{3/2} M(\text{mes } A_1PB_1) + \\ & + \tau_0(u_1 - u_2) \text{mes } A_1QB_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} (u_1 - u_2)^{3/2} M(\text{mes } A_1QB_1) + \\ & + \tau_0 u_2 \text{mes } C'SD' + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} u_2^{3/2} M(\text{mes } C'SD') + \\ & + \tau_0 u_2 \text{mes } A'C' + \tau_0 u_2 \text{mes } B'D' + o(\sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

Из формул (28), (33) находим

$$(34) \quad \begin{aligned} \inf I_3 - I_3(v_\mu) = & \tau_0 u_2 (\text{mes } A_1QB_1 + \text{mes } C'LD' - \\ & - \text{mes } A'C' - \text{mes } B'D') + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} (u_2 - u_0)^{3/2} M(\text{mes } CLD) + o(\sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

При определении правой части в (34) было использовано соотношение $A' \rightarrow A, B' \rightarrow B, C' \rightarrow C, D' \rightarrow D$ при $\mu \rightarrow 0$.

Нетрудно показать, что

$$(35) \quad \text{mes } A_1QB_1 + \text{mes } C'LD' - \text{mes } A'C' - \text{mes } B'D' \geq o(\sqrt{\mu})$$

Неравенство (35) следует из того, что

$$\text{mes } AQB + \text{mes } CLD = \text{mes } AC + \text{mes } BD$$

и предположения о существовании положительной кривизны во всех точках $\partial\omega_1, \partial\omega_2$.

Из соотношений (34), (35) следует

$$(36) \quad \inf I_3 - I_3(v_\mu) \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\mu\tau_0} (u_2 - u_0)^{3/2} M(\text{mes } CLD) + o(\sqrt{\mu})$$

Из неравенства (36) получаем, что предположение $u_0 < u_2$ было неверным.

Таким образом, действительно, из решений идеально пластической задачи (2) исчезающе малая вязкость выбирает решение, у которого $u_0 = u_2$.

Установленный принцип выбора решения для идеально пластической среды в рассматриваемой задаче опирается на предположение о положительности кривизны границ $\partial\omega_i$. Тем не менее, видно, что этот же принцип остается справедливым и при некоторых ослаблениях этого предположения.

В заключение заметим, что задача выбора стационарного решения для идеально пластической среды рассматривалась в [2] с иной точки зрения. Учет инерционных свойств среды также приводит в рассматриваемой задаче к выделению единственного решения, однако это решение радикально отличается от построенного выше. Среда в этом случае не вовлекается в движение, а движутся только цилиндры. Сопоставление этих двух способов выбора стационарного решения показывает, что выделяемые решения зависят от способа получения строго выпуклого функционала из исходного, причем инерционные и вязкостные свойства действуют в разных направлениях, а их комбинация может приводить при предельном переходе к решениям промежуточного типа.

Поступила 26 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Мосолов П. П., Мясников В. П. О прямолинейных стационарных движениях вязкопластической среды. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 2.
2. Мосолов П. П., Мясников В. П. О прямолинейных движениях идеально пластической среды. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 3.
3. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. Изд-во МГУ, 1971.
4. Мосолов П. П. Связь пространственных и плоских задач в механике сплошных сред. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 1.
5. Мосолов П. П. Асимптотическая теория тонких прямолинейных панелей. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2.